

**4. Zur Dynamik elastisch gekoppelter  
Punktsysteme;  
von Erwin Schrödinger.**

---

Es ist sehr oft behauptet worden<sup>1)</sup> und gehört sozusagen zu dem Glaubensbekenntnis des Atomistikers, daß alle partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, welche die räumlichen und zeitlichen Variationen irgendwelcher physikalischen Variablen (Temperatur, Deformation, Feldstärke usw.) verknüpfen, im streng mathematischen Sinne unrichtig sind. Denn das mathematische Symbol des Differentialquotienten schreibt den Grenzübergang zu *beliebig* kleinen räumlichen Variationen vor, während wir doch überzeugt sind, daß wir bei der Bildung solcher „physikalischer“ Differentialquotienten bei „physikalisch unendlich kleinen“ Räumen Halt machen müssen, d. h. bei solchen, die noch immer sehr viele Moleküle enthalten; würden wir den Grenzprozeß weiter treiben, so würden die betreffenden Quotienten, die bis dahin wirklich einer bestimmten Grenze immer näher und näher zu rücken und sie schon praktisch erreicht zu haben schienen, wieder sehr stark zu variieren beginnen, um sich erst viel später eventuell wirklich einem echten Grenzwert zu nähern. Für den letzteren aber würden, abgesehen davon, daß wir ihn nie messen können, nicht entfernt jene einfachen Gesetze bestehen, die sich in den partiellen Differentialgleichungen aussprechen und die immer für die „Pseudogrenzwerte“ der ersten Art gelten.

Wenn wir mit dieser Auffassung Ernst machen wollen, so erwächst uns eine doppelte Aufgabe. Nämlich erstens, alle jene Differentialgleichungen, die zunächst durch Betrachtung eines kontinuierlichen Mediums als Differentialgleichungen im strengen Sinn gewonnen sind, nunmehr auch im oben angedeuteten Sinn als Differenzgleichungen unter Zugrunde-

---

1) L. Boltzmann, Ann. d. Phys. 60. p. 231; 61. p. 790. 1897 (Populäre Schriften p. 141 ff.).

legung eines aus Molekülen aufgebauten Modells abzuleiten. Diese Aufgabe gehört meist nicht zu den schwierigsten, sie ist in den allermeisten Fällen gelöst worden.<sup>1)</sup> Sie gehört aber auch nicht zu den dankbaren. Denn es ist damit immer nur der Beweis erbracht, daß die atomistische Auffassung des Vorganges möglich, d. h. mit den Erfahrungen verträglich ist, nie daß sie von ihnen gefordert wird. Und wir befinden uns dem Phänomenologen gegenüber stets in dem Nachteil, daß er meist durch einen einfachen und plausiblen Ansatz auf viel rascherem Wege zu dem Ziel kommt, das wir erst durch eine Folge von mühsamen und verwickelten, zum Teil sogar unsauber erscheinenden Überlegungen erreichen.

Der Atomistik erwächst daher noch eine zweite Aufgabe, durch deren Lösung sie erst ihre Alleinberechtigung gegenüber den phänomenologischen Theorien zu beweisen imstande ist. Es handelt sich darum, *solche* Bedingungen aufzusuchen und vorherzusagen, unter denen tatsächlich die auf der Vorstellung eines Kontinuums beruhenden Differentialgleichungen wegen der in Wahrheit atomistischen Struktur der Materie zu beobachtbar unrichtigen Resultaten führen. Die bedeutendsten und vielleicht die einzigen Erfolge in dieser Richtung liegen auf dem Gebiete der kinetischen Gastheorie: der *Temperatursprung bei der Wärmeleitung* und die *endliche Gleitung* verdünnter Gase an den Rohrwänden sind Tatsachen, welche zwar die Molekulartheorie, nicht aber die phänomenologische Theorie der Wärmeleitung und inneren Reibung vorauszusehen imstande war.

Der einzige Weg, solche Fälle aufzufinden, ist natürlich der, daß man das Verhalten des Kontinuums und das Verhalten eines geeignet erscheinenden molekularen Modells unter den verschiedensten Bedingungen schrittweise nebeneinander verfolgt. Die Schwierigkeiten liegen dabei durchaus auf der Seite des letzteren. Dasselbe stellt immer ein mechanisches System von einer ungeheuren Zahl von Freiheitsgraden dar, und es ist die Aufgabe, die Bewegungsgleichungen dieses Systems für beliebige Anfangsbedingungen zu integrieren. Allerdings ist es bekanntlich möglich, einiges über das Verhalten solcher Systeme auszusagen, auch ohne diese Integration auszuführen;

---

1) Historisch liegt der Fall gewöhnlich umgekehrt: die Herleitung aus atomistischen Vorstellungen ist gewöhnlich älter.

diesem Umstande verdanken wir die mechanische Begründung der Thermodynamik, der „Physik der Gleichgewichtszustände“, durch Gibbs und Ludwig Boltzmann. Sobald es sich aber nicht mehr um Gleichgewichtszustände handelt, also insbesondere zur Berechnung der räumlich-zeitlichen Änderungsgesetze gewisser Koordinatenfunktionen, versagen die allgemeinen Methoden der statistischen Mechanik und die wirkliche Integration des Bewegungsproblems scheint notwendig.

Von diesen allgemeinen Gesichtspunkten aus schien mir die im folgenden besprochene Integrationsmethode eines altbekannten Bewegungsproblems, das in letzter Zeit für die Berechnung der spezifischen Wärme fester Körper<sup>1)</sup> und des Temperatureffekts bei den Interferenzerscheinungen der Röntgenstrahlen<sup>2)</sup> neue Bedeutung gewonnen hat, von genügendem Interesse zu sein, um sie für sich allein mitzuteilen. Es handelt sich um ein System von Massenpunkten, welches beim Grenzübergang in dem oben angedeuteten Sinne die partielle Differentialgleichung der schwingenden Saite, die eindimensionale Wellengleichung liefert. Es scheint mir, daß die Beziehungen zwischen den Bewegungsgesetzen des Punktsystems und der Fortpflanzung von Wellen in einem eindimensionalen elastischen Medium in der hier gegebenen Lösung deutlicher zutage treten, als nach der üblichen Methode.

Das mechanische System, welches wir betrachten wollen, ist das folgende. Auf einer Geraden befinden sich abzählbar unendlich viele Massenpunkte, alle mit der gleichen Masse  $m$ , welche wir mit den Zahlen  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  numerieren. Zwei Massenpunkte, welche benachbarte Nummern tragen, nennen wir benachbart, und zwar den mit der höheren Nummer den rechten Nachbarn des andern, oder auch den darauffolgenden Massenpunkt. Auf der Geraden zählen wir eine Koordinate von einem Punkte Null aus in einer ihrer Richtungen positiv (wir wollen immer sagen nach rechts). Je zwei Nachbarpunkte sollen eine Kraft aufeinander ausüben, und zwar soll die Kraft zwischen dem  $n^{\text{ten}}$  und  $n+1^{\text{ten}}$  Massenpunkt verschwinden, wenn der letztere um  $+a$  von dem ersteren absteht; beträgt

1) Born u. v. Kármán, Phys. Zeitschr. **13**. p. 297. 1912; vgl. auch **14**. p. 15 u. 65. 1913; Hans Thirring, Phys. Zeitschr. **14**. p. 867. 1913; **15**. p. 127 u. 180. 1914.

2) P. Debye, Ann. d. Phys. (4) **43**. p. 49. 1914; E. Schrödinger, Physik. Zeitschr. **15**. p. 79. 1914.

dieser Abstand  $a + \xi$ , so soll der  $n + 1^{\text{te}}$  eine Kraft  $-f \cdot \xi$  von dem  $n^{\text{ten}}$  erleiden und eine Kraft  $+f \cdot \xi$  auf ihn ausüben, wo  $f$  eine Konstante. Eine stabile Gleichgewichtslage des Systems besteht dann darin, daß der  $0^{\text{te}}$  Massenpunkt im Ursprung liegt, der  $\pm 1^{\text{te}}$ ,  $\pm 2^{\text{te}}$ ,  $\pm 3^{\text{te}}$  ... bzw. die Koordinaten  $\pm a$ ,  $\pm 2a$ ,  $\pm 3a$  ... usw. haben. Wir wollen die Bewegungen dieses nunmehr vollkommen definierten mechanischen Systems studieren, aber nur von solchen Anfangskonfigurationen aus, in denen die Abstände der Punkte von der erwähnten Gleichgewichtskonfiguration für alle unter einer angebbaren endlichen Schranke liegen. Hierdurch ist zugleich garantiert, daß nie unendliche Kräfte auf einen Massenpunkt wirken.<sup>1)</sup> Wir führen dann zunächst als Koordinaten die Abstände der Punkte aus jenen Ruhelagen ein und bezeichnen sie mit

$$\dots \xi_{-n}, \xi_{-n+1} \dots \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots \xi_{n-1}, \xi_n \dots$$

Diese Größen sind dann von Anfang an und nach jeder endlichen Zeit stets endlich. Die Bewegungsgleichungen des Systems lauten:

$$(1) \quad m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = f(\xi_{n+1} - \xi_n) - f(\xi_n - \xi_{n-1}), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Das Interesse des unendlichen Gleichungssystems (1) liegt für uns darin, daß man von ihm aus durch Grenzübergang (für  $a=0$ ;  $m/a$ ,  $fa$  endlich) zur Differentialgleichung der unendlichen gespannten Saite oder des unendlichen elastischen Stabes gelangen kann; und mehr noch darinnen, daß man von einer dreidimensionalen Verallgemeinerung dieses Gleichungssystems auf demselben Wege zu den Gleichungen der Elastizitätstheorie für ein unendliches anisotropes Medium gelangt (vgl. die oben zitierten Arbeiten von Born und v. Kármán). Eben diese Grenzübergänge näher zu beleuchten und die Frage, in welchen Fällen die Bewegungen des Punktsystems tatsächlich mit den Bewegungen des Kontinuums Ähnlichkeit aufweisen, ist der Zweck der folgenden Untersuchungen.

Das System (1) läßt sich bekanntlich sehr leicht durch den Ansatz

$$(2) \quad \xi_n = a_n e^{i(\nu' t + n \varphi)}$$

1) Die Endlichkeit aller Kräfte für die Anfangslage zu fordern würde nicht genügen. Man könnte z. B. den Punkten  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  die Anfangslagen bzw.  $0, \mp a, \mp 2a, \mp 3a, \dots$  geben. Solche Anfangslagen wollen wir also ausschließen. Für die physikalische Anwendung, kommen natürlich überhaupt nur *kleine* Abweichungen von der Gleichgewichtskonfiguration in Betracht.

integrieren, wobei  $\varphi$  willkürlich,  $\nu'$  und die  $a_n$  gewisse Funktionen von  $\varphi$  sind. Die allgemeinste Lösung von (1) läßt sich dann als Superposition einer kontinuierlichen Folge von Lösungen wie (2) (für kontinuierlich variierendes  $\varphi$ ) darstellen. Die Methode hat Ähnlichkeit mit der Fourierschen Methode bei der Saite. Sie hat den Nachteil, daß, wie bei dieser, ein willkürlich vorgegebener Anfangszustand erst einer Fourieranalyse unterworfen werden muß, um die weitere Bewegung beurteilen zu können, und daß die Bewegung unmittelbar als Superposition einer kontinuierlichen Folge von Normalschwingungen gegeben ist, so daß die resultierende Schwingung sich kaum überblicken läßt.

Die Form der Gleichung (1) legt eine andere Form der Lösung nahe, welche in manchen Fällen einen besseren Überblick gestattet. Um dies zu zeigen, führen wir statt der  $\xi_n$  und  $\dot{\xi}_n$  neue Koordinatenbezeichnungen ein; wir wollen die Größen

$$\dots \sqrt{f}(\xi_{-2} - \xi_{-1}), \sqrt{m} \dot{\xi}_{-1}, \sqrt{f}(\xi_{-1} - \xi_0), \sqrt{m} \dot{\xi}_0, \\ \sqrt{f}(\xi_0 - \xi_1), \sqrt{m} \dot{\xi}_1, \sqrt{f}(\xi_1 - \xi_2) \dots$$

mit den Buchstaben

$$\dots x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3 \dots$$

bezeichnen, so daß also

$$(3) \quad x_{2n} = \sqrt{m} \dot{\xi}_n, \quad x_{2n+1} = \sqrt{f}(\xi_n - \xi_{n+1}).$$

Die Größen  $x_n$  reichen in Wahrheit noch nicht vollkommen aus, um den Bewegungszustand festzulegen. Sie bestimmen nur die Geschwindigkeiten und die *relativen* Lagen aller Massenpunkte. Da aber die Lage des Punktsystems als ganzen (auch eine etwaige gleichförmige Translation desselben, welche sich natürlich über jede seiner Bewegungen superponieren kann) für uns jedenfalls ohne alles Interesse ist, dürfen wir die letzte Koordinate (als welche man etwa ein beliebiges  $\xi$  wählen könnte) außer Betracht lassen. Schreiben wir nun (1) in die Variablen  $x_n$  um, so erhalten wir, wenn wir noch die Abkürzung

$$(4) \quad \nu = 2 \sqrt{\frac{f}{m}}$$

einführen:

$$(5) \quad \frac{d x_{2n}}{d t} = - \frac{\nu}{2} (x_{2n+1} - x_{2n-1}).$$

Nun gilt aber wegen (3) und (4) als Identität

$$(6) \quad \frac{dx_{2n+1}}{dt} = -\frac{\nu}{2}(x_{2n+2} - x_{2n})$$

ebenfalls für alle  $n$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$ . (5) und (6) können wir nun dahin zusammenfassen, daß für alle  $n$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  gilt

$$(7) \quad \frac{dx_n}{dt} = -\frac{\nu}{2}(x_{n+1} - x_{n-1}).$$

Dies ist aber (abgesehen von dem Faktor  $\nu$ ) eine von den beiden fundamentalen Funktionalbeziehungen zwischen drei Zylinderfunktionen, welche im Parameterabstand 1 aufeinander folgen. Wir sehen also, daß wir eine Lösung erhalten, wenn wir eines der  $x_n$  einer beliebigen Zylinderfunktion vom Argument  $\nu t$  gleichsetzen; jedes andere wird dann einfach erhalten, indem man den Parameter der Zylinderfunktion um die Differenz der Ordnungszahlen ändert.

Wahrscheinlich ließe sich auf diesem Wege, indem man verschiedene spezielle Zylinderfunktionen einsetzt, der eine oder der andere interessante Spezialfall unseres Problems mit großer Leichtigkeit behandeln. Wir wollen aber sogleich dazu übergehen, auf Grund dieser Erkenntnis die allgemeine Lösung für einen beliebig vorgegebenen Anfangszustand aufzustellen. Wir wollen setzen:

$$(8) \quad x_n = x_k^0 J_{n-k}(\nu t), \quad n = -\infty \dots +\infty.$$

Dabei seien die  $J_n$  die gewöhnlichen Besselschen Funktionen erster Art,  $k$  eine beliebige positive oder negative ganze Zahl,  $x_k^0$  eine beliebige Konstante. Nun verschwinden aber mit verschwindendem Argument alle  $J_n$  außer  $J_0$ , folglich stellt (8) die Bewegung von einem sehr einfachen Anfangszustand aus dar, nämlich die, welche eintritt, wenn für  $t=0$  alle Geschwindigkeiten und Spannungen gleich Null sind, nur eine einzige Geschwindigkeit oder Spannung, nämlich  $x_k$ , von Null verschieden, und zwar  $=x_k^0$  ist. Indem wir nun alle möglichen Lösungen wie (8) superponieren, erhalten wir offenbar die allgemeinste Lösung in folgender Form:

$$(9) \quad x_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k^0 J_{n-k}(\nu t), \quad n = -\infty \dots +\infty,$$

wodurch also die  $x_n$  in der einfachsten Weise als Funktionen der Zeit  $t$  und ihrer Werte zu Anfang der Zeit, der  $x_n^0$ , dargestellt sind.

Als einfachstes Beispiel für die zum Teil überraschenden Folgerungen, welche diese Formel mit großer Leichtigkeit zu ziehen gestattet, betrachten wir folgenden Fall. Es sollen zur Zeit  $t=0$  alle Massenpunkte in ihren Ruhelagen *ruhen*, nur der 0<sup>te</sup> sei um die Strecke  $+\varepsilon$  aus seiner Ruhelage herausgezogen worden, habe aber ebenfalls im Anfang die Geschwindigkeit Null. Dann verschwinden also für  $t=0$  alle  $\xi_n$  und alle  $\dot{\xi}_n$ , nur  $\xi_0 = \varepsilon$ . Dann sind nach (3) auch alle  $x_n^0 = 0$ , nur  $x_1^0 = \varepsilon \sqrt{f}$ ,  $x_{-1}^0 = -\varepsilon \sqrt{f}$ . Folglich erhalten wir nach (9)

$$x_n = \varepsilon \sqrt{f} (J_{n-1}(v t) - J_{n+1}(v t)),$$

und speziell für  $n=2l$

$$\begin{aligned} x_{2l} &= \sqrt{m} \dot{\xi}_l = \varepsilon \sqrt{f} (J_{2l-1}(v t) - J_{2l+1}(v t)) \\ &= \frac{2\varepsilon}{v} \sqrt{f} \frac{d}{dt} J_{2l}(v t), \end{aligned}$$

oder, da für  $t=0$  alle  $\xi$  verschwinden, und mit Rücksicht auf (4)

$$(10)^1 \quad \xi_l = \int_0^t \dot{\xi}_l dt = \varepsilon \int_0^t \frac{d}{dt} J_{2l}(v t) \cdot dt = \varepsilon J_{2l}(v t).$$

In diesem Falle liefern also die Massenpunkte in ihrer Gesamtheit durch ihre Bewegung ein mechanisches Bild sämtlicher geradzahligter Besselfunktionen erster Art.

Es ist interessant zu bemerken, daß bei dieser elementaren Störung von einer Ausbreitung mit irgendeiner bestimmten Schallgeschwindigkeit, wie man sie etwa wegen der Analogie mit dem gespannten Seil hätte erwarten können, nicht im entferntesten die Rede sein kann. Ein Seil, an welchem man einen kleinen „Buckel“ hervorbringt, kommt bekanntlich an der gestörten Stelle sogleich wieder zur Ruhe. Der Buckel teilt sich in zwei von halber Höhe und diese laufen ungeschwächt mit Schallgeschwindigkeit nach beiden Seiten.

Ganz anders hier. Rufen wir uns den Graph der Funktionen  $J_n$  (Fig. 1), ferner die bekannten Sätze über die reellen

---

1) Die Ableitung der Formel (10) ist nur für  $l \neq 0$  richtig. Sie gilt aber auch für  $l=0$ , da hier zu dem Zeitintegral noch der Anfangswert von  $\xi_0$ , nämlich  $+\varepsilon$  hinzutritt, der sich mit dem  $-\varepsilon$ , das in diesem Fall von der unteren Integralgrenze geliefert wird, tilgt.

Nullstellen und die asymptotische Darstellung für große Argumentwerte

$$(11) \quad J_n(\nu t) = \sqrt{\frac{2}{\pi \nu t}} \cos\left(\nu t - \frac{2n+1}{4}\pi\right)$$

in Erinnerung, so gewinnen wir folgendes Bild von dem betrachteten Bewegungsvorgang. Der „gestörte“ Massenpunkt schwingt in die Ruhelage zurück, darüber hinaus, kehrt

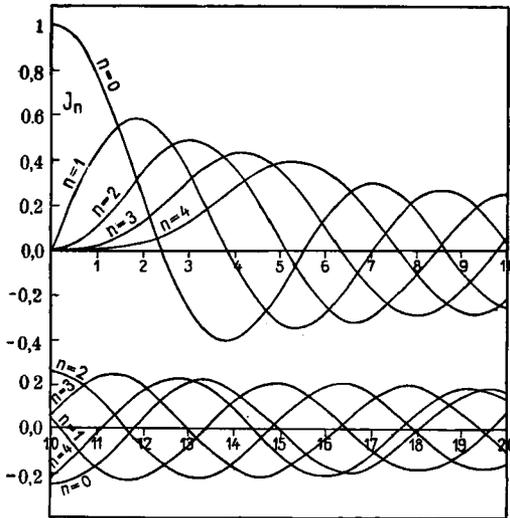


Fig. 1.

Graph der ersten fünf Besselschen Funktionen  $J_n$ .

nach Erreichung einer kleineren Elongation wieder um usw. Seine Bewegung nähert sich immer mehr einer gewöhnlichen Sinusschwingung mit einer Frequenz, die anfangs etwas größer als  $\nu$  ist, aber schon nach wenigen Schwingungen dem Werte  $\nu$  sehr nahe kommt, z. B. vergeht zwischen dem ersten und dritten Durchgang durch die Ruhelage die Zeit

$$\frac{3,115 \dots + 3,135 \dots}{\nu},$$

zwischen dem vierten und sechsten

$$\frac{2 \times 3,140 \dots}{\nu}.$$

Die Amplitude nimmt allmählich ab, nach einiger Zeit annähernd wie  $1/\sqrt{t}$ . Dies rührt daher, daß die Schwingungsenergie des Punktes allmählich zum Teil auf seine Nachbarn übergeht.<sup>1)</sup> Nach längerer Zeit (wenn  $\nu t$  genügend groß geworden ist, um die Formel (11) für die Besselfunktionen der niedrigeren Ordnungen verwenden zu können), schwingt die Umgebung des Nullpunktes annähernd in der Art der „Grenzschwingung“ unseres Gebildes<sup>2)</sup>: einfache Sinusschwingungen von der Frequenz  $\nu$ , Nachbarpunkte in entgegengesetzter Phase; die Amplituden nehmen aber alle im Verhältnis  $1/\sqrt{t}$  ab, während sich das Gebiet, in welchem annähernd dieser einfache Schwingungszustand herrscht, immer weiter ausdehnt.

Auffallend ist, daß, streng genommen, alle Punkte schon im ersten Augenblick in Bewegung geraten, und zwar alle (außer dem 0<sup>ten</sup>) zunächst in positiver Richtung. Betrachten wir noch die Art und Weise, in der ein etwas entfernterer Punkt, etwa der  $l^{\text{te}}$ , seine Bewegung beginnt. Je größer  $l$  ist, um so langsamer ist im Anfang seine Bewegung, um so länger dauert es, bis seine Elongation einen merklichen Wert erreicht. Denn  $J_{2l}(\nu t)$  verschwindet im Nullpunkt wie  $t^{2l}$ , zeigt also dort eine Berührung von der  $2l^{\text{ten}}$  Ordnung mit der  $t$ -Achse.

Beim ersten Maximum von  $J_{2l}$  kehrt der Punkt seine Bewegung um und geht wieder durch die Ruhelage, wenn  $\nu t$  die erste Wurzel von  $J_{2l}$  passiert. Diese liegt (für  $l > 1$ ) zwischen  $\sqrt{2l(2l+2)}$  und  $\sqrt{2(2l+1)(2l+2)^3}$ , d. h. für einigermaßen große  $l$  ist dieser  $t$ -Wert von der Größenordnung  $2l/\nu$ . Nun kann man, wie Born und v. Kármán l. c. gezeigt haben und wie wir auch weiter unten sehen werden, die Größe

$$a \sqrt{\frac{f}{m}} = \frac{a \nu}{2}$$

als Schallgeschwindigkeit in unserem Gebilde ansprechen, für Wellen, welche lang sind gegen den Abstand  $a$  zweier Nachbarpunkte.

1) Wir haben hier ein gutes Beispiel für den „dämpfenden“ Einfluß der Nachbarn, wie ihn z. B. Einstein, Ann. d. Phys. **35**. p. 679. 1911, betrachtet hat. Es ist zu beachten, daß diese Dämpfung ohne irgendwelche dissipative Kräfte zustande kommt.

2) Vgl. Born u. v. Kármán, Physik. Zeitschr. **18**. p. 297. 1912.

3) N. Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 174. 1904.

$$\frac{2l}{v} = \frac{la}{\frac{av}{2}}$$

ist also gerade die Zeit, zu welcher der  $l^{\text{te}}$  Massenpunkt von einer solchen Welle, die zur Zeit 0 vom Ursprung ausgeht, erreicht würde. Man kann also wohl sagen, daß der eigentliche Schwingungsvorgang an jedem Punkt erst nach dem Verstreichen der entsprechenden Schallzeit einsetzt, während vorher die Bewegung nur sehr klein ist und nur *einmal* das Zeichen wechselt. Später nähert sich die Schwingungsdauer immer mehr dem Wert  $2\pi/v$ .

Bei alledem bleibt das Maximum der Bewegungsintensität immer an der Störungsstelle, während sie nach beiden Seiten allmählich auf Null herabsinkt. Der ganze Vorgang scheint weit eher eine entfernte Ähnlichkeit mit der Ausbreitung einer Temperaturstörung in einem linearen Leiter als mit der Ausbreitung einer Schallwelle zu haben. Angesichts dieses merkwürdigen Verhaltens scheint es mir nicht ohne Interesse, zu untersuchen, welche Beziehungen überhaupt zwischen unserer Lösung (9) und den allgemeinen Integralen der Wellengleichung bestehen. Wir legen uns also jetzt die Frage vor: *Welchen Charakter muß das System der Anfangswerte  $x_n^0$  haben, damit die Bewegung unseres Punktgebildes wirklich eine gewisse Ähnlichkeit mit der Bewegung eines kontinuierlichen elastischen Mediums aufweist?* Wir wählen dazu den Weg, daß wir die Größen  $x_n$  nach (9) in die Mac-Laurinsche Reihe nach Potenzen von  $\nu t$  entwickeln. Dazu müssen wir also die Reihe (9) ein-, zwei-, drei- . . . mal nach  $\nu t$  differenzieren und danach immer  $t = 0$  setzen. Betrachten wir nun allgemein eine Reihe von der Form

$$(12) \quad R = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l J_l(2y),$$

so liefert eine einmalige Differentiation nach  $y$

$$\frac{dR}{dy} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l (J_{l-1} - J_{l+1}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (a_{l+1} - a_{l-1}) J_l.$$

Eine Reihe von der Form (12) wird also nach dem halben Argument der Zylinderfunktionen differenziert, indem man jeden Koeffizienten durch die Differenz aus dem darauffolgenden und dem vorhergehenden ersetzt. Die abgeleitete Reihe ist von derselben Form wie die gegebene. Man kann

auf sie den eben gefundenen Satz anwenden, und man erhält also die Koeffizientenreihen aller Ableitungen von  $R$ , indem man in der angedeuteten Art sukzessive die Differenzenreihen der Größen  $a_i$  bildet:

$$\begin{array}{cccc}
 \dots a_{-3}, & a_{-2}, & a_{-1}, & a_0, \dots \dots \dots \\
 \dots \dots a_{-1} - a_{-3}, & a_0 - a_{-2}, & a_1 - a_{-1}, & \dots \dots \dots \\
 \dots \dots \dots a_1 + a_{-3} - 2 a_{-1}, & a_2 + a_{-2} - 2 a_0, & \dots & \dots \dots \dots \\
 \dots \dots \dots & \dots & \dots & \dots \dots \dots
 \end{array}$$

Die Werte der Ableitungen für  $y = 0$  finden wir alle in der „0<sup>ten</sup>“ Spalte dieses Schemas, da für  $y = 0$  alle  $J_n$  verschwinden, nur  $J_0(0) = 1$  wird. Um dieses Bildungsgesetz auf eine der Reihen (9) anzuwenden, haben wir die Größen  $a_n$  zu ersetzen durch die folgenden

$$(13) \quad \dots x_n^0 + 3, x_n^0 + 2, x_n^0 + 1, x_n^0, x_n^0 - 1, x_n^0 - 2, x_n^0 - 3 \dots$$

Die Ableitungen von  $x_n$  nach  $\nu t/2$  für  $t = 0$  finden sich in der Spalte  $x_n^0$  der aus diesen Koeffizienten in der angegebenen Weise gebildeten Differenzenreihen. Bezeichnen wir diese zur Abkürzung mit

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots \Delta_n^{(1)+3}, & \Delta_n^{(1)+2}, & \Delta_n^{(1)+1}, & \Delta_n^{(1)}, & \Delta_n^{(1)-1}, & \Delta_n^{(1)-2}, & \Delta_n^{(1)-3} \dots \\
 \dots \Delta_n^{(2)+3}, & \Delta_n^{(2)+2}, & \Delta_n^{(2)+1}, & \Delta_n^{(2)}, & \Delta_n^{(2)-1}, & \Delta_n^{(2)-2}, & \Delta_n^{(2)-3} \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

so daß also

$$(14) \quad \Delta_n^{(1)} = x_n^0 - 1 - x_n^0 + 1,$$

und allgemein die Rekursionsformel gilt

$$(15) \quad \Delta_n^{(k)} = \Delta_{n-1}^{(k-1)} - \Delta_{n+1}^{(k-1)},$$

so erhalten wir

$$(16) \quad \left(\frac{2}{\nu}\right)^k \left(\frac{d^k x_n}{d t^k}\right)_{t=0} = \Delta_n^{(k)}.$$

Die Mac-Laurinsche Reihe für  $x_n$  lautet also, wenn noch der Gleichförmigkeit halber  $\Delta_n^{(0)}$  für  $x_n^0$  geschrieben wird:

$$(17) \quad x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu t)^k}{2^k k!} \Delta_n^{(k)}, \quad n = -\infty \dots + \infty.$$

Wir müssen nun zu den Variablen  $\xi_n$  zurückkehren und nehmen der Einfachheit halber an, daß für  $t = 0$   $\xi_0 = 0$  sei, worin natürlich keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit liegt. Wir erhalten leicht aus (3)

$$\begin{aligned} \xi_n &= \xi_0 - \frac{1}{\sqrt{f}} \sum_{l=1}^n x_{2l-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{m_0}} \int_0^t x_0 dt - \frac{1}{\sqrt{f}} \sum_{l=1}^n x_{2l-1} \end{aligned}$$

und nach (17), mit Rücksicht auf (4)

$$(18) \quad \xi_n = \frac{1}{\sqrt{f}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu t)^k}{2^k k!} \left( \Delta_0^{(k-1)} - \sum_{l=1}^n \Delta_{2l-1}^{(k)} \right).$$

Die Rekursionsformel (15) liefert

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \Delta_{2l-1}^{(k)} &= \sum_{l=1}^n \left( \Delta_{2l-2}^{(k-1)} - \Delta_{2l}^{(k-1)} \right) = \sum_{l=0}^{n-1} \Delta_{2l}^{(k-1)} - \sum_{l=1}^n \Delta_{2l}^{(k-1)} \\ &= \Delta_0^{(k-1)} - \Delta_{2n}^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$(19) \quad \xi_n = \frac{1}{\sqrt{f}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu t)^k}{2^k k!} \Delta_{2n}^{(k-1)}.$$

Nun müssen wir noch zusehen, in welcher Weise sich die Größen  $\Delta_n^{(k)}$ , die als Differenzreihen der Größen (13) definiert sind, aus den Anfangswerten der  $\xi_n$  und  $\dot{\xi}_n$  selbst, die wir mit  $\xi_n^0$  und  $\dot{\xi}_n^0$  bezeichnen wollen, zusammensetzen. Die Größen (13) können wir uns nach Definition (3) selbst wieder als erste Differenzenreihe (immer in der beschriebenen Art gebildet) unter die Reihe der folgenden Größen geschrieben denken:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} \dots \sqrt{f} \xi_{n+1}^0, & -\sqrt{m} \sum_{i=1}^{n+1} i \dot{\xi}_i^0, & \sqrt{f} \xi_n^0, & -\sqrt{m} \sum_{i=1}^n i \dot{\xi}_i^0, & \sqrt{f} \xi_{n-1}^0 & \dots \\ \dots x_{2n+2}^0, & x_{2n+1}^0, & x_{2n}^0, & x_{2n-1}^0, & x_{2n-2}^0 & \dots \\ \dots \Delta_{2n+2}^{(1)}, & \Delta_{2n+1}^{(1)}, & \Delta_{2n}^{(1)}, & \Delta_{2n-1}^{(1)}, & \Delta_{2n-2}^{(1)}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right.$$

Die untere Grenze der Summen  $\sum_i i \dot{\xi}_i^0$  ist willkürlich, aber für alle gleich zu wählen. Wir finden also die Größen  $\Delta_{2n}^{(k)}$ , die

uns in (19) interessieren, in derjenigen Spalte dieses Differenzschemas, die mit  $\sqrt{f} \xi_n^0$  beginnt. Diese Spalten bleiben, wie man sich leicht überzeugt, ungeändert, wenn man die erste Zeile folgendermaßen abändert

$$\dots \sqrt{f} \xi_{n-1}^0, \sqrt{m} \sum_l^n \xi_l^0, \sqrt{f} \xi_n^0, \sqrt{m} \sum_l^{n+1} \xi_l^0, \sqrt{f} \xi_{n+1}^0 \dots$$

Die Umkehrung der Reihenfolge kompensiert nämlich gerade den Vorzeichenwechsel der Summenglieder. Außerdem lösen wir noch die Koeffizienten  $\sqrt{f}$  und  $\sqrt{m}/a$  ab<sup>1)</sup> und betrachten jetzt also direkt die Differenzenreihen des Schemas

$$(21) \left\{ \begin{array}{cccccc} \dots & \xi_{n-1}^0 & a \sum_l^n \xi_l^0 & \xi_n^0 & a \sum_l^{n+1} \xi_l^0 & \xi_{n+1}^0 \dots \\ \dots & \delta_{n-1}^{(1)} & \cdot & \delta_n^{(1)} & \cdot & \delta_{n+1}^{(1)} \dots \\ \dots & \delta_{n-1}^{(2)} & \cdot & \delta_n^{(2)} & \cdot & \delta_{n+1}^{(2)} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right.$$

Die Bedeutung der Zeichen  $\delta_n^{(i)}$ , die wir für diejenigen Größen des Schemas, welche für uns in Betracht kommen, eingeführt haben, bedarf wohl keiner weiteren Erläuterung. Man erkennt leicht, daß

$$\Delta_{2n}^{(2k-1)} = \sqrt{f} \delta_n^{(2k)}, \quad \Delta_{2n}^{(2k)} = \frac{\sqrt{m}}{a} \delta_n^{(2k+1)}.$$

Demnach erhalten wir aus (19), indem wir die geraden und ungeraden Glieder trennen,

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu t)^{2k}}{2^{2k} (2k)!} \delta_n^{(2k)} + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{m}{f}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu t)^{2k+1}}{2^{2k+1} (2k+1)!} \delta_n^{(2k+1)}.$$

Durch leichte Umformung geben wir diesem Ausdruck noch, mit Rücksicht auf (4) folgende definitive Gestalt:

$$(22) \quad \xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a \nu t}{2}\right)^{2k}}{(2k)! a^{2k}} \delta_n^{(2k)} + \frac{1}{a \nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a \nu t}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)! a^{2k+1}} \delta_n^{(2k+1)}.$$

1) Warum wir auch den Faktor  $1/a$  abtrennen, wird sogleich ersichtlich werden ( $a$  ist der Abstand zweier Nachbarpunkte in der Ruhelage).

Diese Entwicklung würde nun genau mit der D'Alembertschen Lösung der Wellengleichung übereinstimmen, wenn wir das Wertesystem der  $\xi_n^0$  und das der  $\xi_n^0$  jedes für sich als kontinuierliche Funktion der Koordinate  $x = na$ , etwa  $\xi(x)$  und  $\eta(x)$  auffassen dürften, ferner  $a \sum_{i=1}^n \xi_i^0$  als ein unbestimmtes Integral  $\int^x \eta(x) dx$ , und die Differenzenquotienten

$$\frac{\delta_n^{(2k)}}{a^{2k}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\delta_n^{(2k+1)}}{a^{2k+1}}$$

als die betreffenden Differentialquotienten der Funktionen  $\xi(x)$  bzw.  $\int^x \eta(x) dx$ ; als Schallgeschwindigkeit tritt dabei, wie oben vorausgreifend bemerkt, die Größe  $a v/2 = a \sqrt{f/m}$  auf.

Um uns hiervon zu überzeugen, erinnern wir uns, daß die von D'Alembert gegebene allgemeine Lösung der Wellengleichung

$$(23) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

die Form hat

$$\xi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct).$$

Ist nun für  $t = 0$  vorgeschrieben

$$\xi(x, t)_{t=0} = \xi(x); \quad \left[ \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} \right]_{t=0} = \eta(x),$$

so findet man leicht

$$(24) \quad \xi(x, t) = \frac{1}{2} [\xi(x + ct) + \xi(x - ct)] \\ + \frac{1}{2c} \left[ \int^x \eta(x) dx - \int^x \eta(x) dx \right].$$

Entwickelt man nun in die Mac-Laurinsche Reihe nach  $t$ , so tilgen sich in der ersten Klammer die ungeraden, in der zweiten die geraden Potenzen von  $t$ , und man erhält

$$(25) \quad \xi(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ct)^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{d^{2k} \xi(x)}{dx^{2k}} + \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ct)^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}} \int^x \eta(x) dx.$$

Die formale Übereinstimmung mit der Entwicklung (22) ist ersichtlich.

Aus dem Bildungsgesetz der Koeffizienten  $\delta_n^{(2k)}$  und  $\delta_n^{(2k+1)}$  nach dem Schema (21) ist ohne weiteres klar, daß die in (22) auftretenden Differenzenquotienten tatsächlich in die betreffenden Differentialquotienten übergehen, wenn man zur Limite  $a = 0$  geht. Genauer gesprochen müßte man dabei folgendermaßen verfahren. Man hätte zwei analytische Funktionen  $\xi(x)$  und  $\eta(x)$  zu definieren, welche für  $x = na$  ( $n = -\infty \dots +\infty$ ) mit den vorgegebenen Werten  $\xi_n^0$  bzw.  $\xi_n^0$  übereinstimmen. Dann hätte man den Grenzübergang (natürlich unter entsprechender Variation von  $f$  und  $m$ ) so zu vollziehen, daß man für jeden Zwischenwert von  $a$ , etwa  $a'$ , an jeder Stelle  $na'$ , an welche *nunmehr* die Ruhelage eines Massenpunktes fällt, die Werte  $\xi(na')$  bzw.  $\eta(na')$  als  $\xi_n^0$  bzw.  $\xi_n^0$  vorgegeben denkt.

Ein derartiger Grenzübergang ist natürlich physikalisch ziemlich sinnlos. Die Frage, die wir oben aufgeworfen haben, war aber die: Wie muß das System der Anfangswerte beschaffen sein, damit *bei einem bestimmten unveränderlichen*  $a$  die durch (9) oder (22) dargestellte Bewegung einige Ähnlichkeit mit der Saitenbewegung hat? Die Antwort läßt sich nun an der Hand der vorstehenden Entwicklungen mit einiger Sicherheit geben, wenn wir auch, wie in der Frage selbst, so in der Antwort auf strenge mathematische Präzision Verzicht leisten müssen.

*Das wird nämlich dann der Fall sein, wenn die beiden Größensysteme der  $\xi_n^0$  und der  $\xi_n^0$  genügende Ähnlichkeit mit den Werteverteilungen zweier kontinuierlicher Funktionen von  $x$  haben, welche erst auf Strecken, die groß gegen den Punktabstand  $a$  sind, merkliche Änderungen aufweisen.* Dann werden nämlich zum Mindesten die ersten der in (22) auftretenden Differenzenquotienten sehr angenähert mit den betreffenden Differentialquotienten zusammenfallen, und solange  $t$  nicht so groß geworden ist, daß auch solche Glieder der beiden Reihen, für welche das nicht mehr der Fall ist, merklichen Einfluß gewinnen, wird die Bewegung angenähert durch die aus den Anfangswerten gebildete D'Alembertsche Lösung dargestellt werden. Nach genügend langen Zeiten werden allerdings bei endlichem  $a$  immer Abweichungen eintreten. Das folgt übrigens auch unmittelbar aus der anfangs erwähnten Fourierschen Methode. Man findet da nämlich (vgl. Born und von Kár-

mán l. c.), daß eine reine Sinuswelle von der Wellenlänge  $2\pi a/\varphi^1$ ) sich mit der Geschwindigkeit

$$a \sqrt{\frac{f}{m}} \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{\varphi} = \frac{a \nu \sin \frac{\varphi}{2}}{\varphi}$$

fortpflanzt. Es findet also auch für lange Wellen eine wenn auch sehr geringe Dispersion statt. Folglich wird eine willkürlich gestaltete Welle, auch wenn ihre Struktur so grob ist, daß sie im wesentlichen aus *langwelligen* Fourierbestandteilen zusammengesetzt ist, dennoch nach genügend langer Zeit merkliche Formänderungen erfahren, wenn ihre Fourierbestandteile infolge der Dispersion um endliche Stücke getrennt worden sind.

Man könnte nun allerdings meinen, daß der Bedingung des langsamen und regelmäßigen Variierens der Anfangswerte praktisch immer dadurch genügt wird, daß ja bei derartigen molekularmechanischen Bildern nie den Variablen selbst, sondern immer nur ihren Mittelwerten über Bereiche, welche sehr viele Moleküle enthalten, eine physikalische Bedeutung zukommt. Man überzeugt sich leicht, daß alle bisherigen Entwicklungen unverändert gelten, wenn man unter den  $\xi_n$  die Mittelwerte derjenigen Größen versteht, welche wir bisher so bezeichnet haben, und zwar Mittelwerte über eine beliebige, aber ein für allemal festgelegte Zahl von benachbarten Massenpunkten.

Diese Überlegung ist stichhaltig, wenn tatsächlich die Mittelwerte der  $\xi_n$  oder beliebiger zeitlicher Differentialquotienten derselben oder irgendwelcher aus ihnen *linear* zusammengesetzter Größen mit den beobachtbaren physikalischen Variablen zu identifizieren sind. Wir können uns z. B. auf diesem Wege von der unregelmäßigen Wärmebewegung befreien, welche sich den längeren akustischen Wellen superponiert, und erkennen, daß dieselbe im ganzen keinen Einfluß auf die Ausbreitung der letzteren hat.

Dagegen ist diese Überlegung nicht anwendbar, wenn es sich etwa um die Ausbreitung einer Wärmestörung selbst handelt. Das Analogon einer Wärmestörung in unserem eindimensionalen Punktgebilde wäre im einfachsten Fall etwa

1)  $\varphi$  ist dieselbe Größe wie in (2). Es ist die konstante Phasendifferenz zweier Nachbarpunkte.

so vorzustellen, daß auf einer kleinen Strecke, die aber immer noch sehr groß gegen  $a$  sein soll, die  $\xi_n^0$  und  $\dot{\xi}_n^0$  von 0 verschiedene Werte haben, alle übrigen Punkte aber zur Zeit  $t=0$  ungestört sind. Die  $\xi_n^0$  und  $\dot{\xi}_n^0$  müßte man sich aber auf dieser kleinen Strecke ganz unregelmäßig verteilt denken, so daß sehr oft Nachbarpunkte entgegengesetzte Elongationen und Geschwindigkeiten aufweisen. Die Mittelwerte dieser Größen müssen dann zur Zeit  $t=0$  auch in dem gestörten Teil verschwinden. Das Gegenteil würde ja heißen, daß die gestörte Stelle *als Ganzes* eine Verschiebung oder einen Bewegungsimpuls besitzt, was eben *nicht* der Fall sein soll. Die Gleichungen (9) oder (22) liefern dann, auf diese Mittelwerte angewendet, das von vornherein zu erwartende Resultat, daß sie auch zu allen Zeiten und überall  $=0$  bleiben werden. Über die Ausbreitung der Wärmestörung erfahren wir aber damit gar nichts, weil diese ja von den *Quadraten der  $\xi_n^0$*  abhängt, deren Mittelwerte natürlich nicht allgemein verschwinden.

Wir wollen auf die Frage an dieser Stelle nicht näher eingehen, sondern nur soviel bemerken: Die Ausbreitung von Störungen dieser Art wird auch nicht mehr die entfernteste Ähnlichkeit mit einer Wellenbewegung aufweisen. Denn schon die ersten Differenzenquotienten des Schemas (21) werden nichts weniger als Differentialquotienten von analytischen Funktionen sein, in welche man die  $\xi_n^0$  und  $\dot{\xi}_n^0$  zusammenfassen kann, weil diese schon von einem Punkt zum nächsten völlig unregelmäßig variieren werden. Alle Schlüsse, welche man aus der Analogie solcher Punktgebilde, deren einfachsten Repräsentanten wir hier betrachtet haben, mit kontinuierlichen elastischen Medien auf die Ausbreitung von *Wärmestörungen* in solchen Gebilden zu ziehen versucht sein mag<sup>1)</sup>, scheinen mir daher mit großer Vorsicht aufzunehmen.

1) Vgl. P. Debye, Ann. d. Phys. 43. p. 64 u. 65. 1914; Göttinger Nachr. 1913. p. 144; Vorträge über die kinetische Theorie etc. p. 43 (Teubner 1914); M. Born, Physik. Zeitschr. 15. p. 191. 1914. Natürlich glaube ich ebensowenig wie die Herren Born und Debye, daß ein endliches Kristallstück aus einem Punktgitter ohne alle Unregelmäßigkeiten besteht; schon in einer vor zwei Jahren veröffentlichten Studie über Pyro- und Piezoelektrizität (Wien. Ber. 121 (2a), p. 1948. 1912) habe ich die gegenteilige Annahme gemacht. Aber ich glaube *nicht*, mit Hrn. Born, daß diese Unregelmäßigkeiten für das Zustandekommen endlicher Wärmeleitungsphänomene *wesentlich* sind, wenn sie auch die

**Anhang.**

**Die Gruppengeschwindigkeit in der elastischen Punktreihe.**

Die zuletzt vorgebrachten Überlegungen scheinen vielleicht auf den ersten Blick mit den Resultaten der Fourierschen Analyse unseres Punktgebildes in Widerspruch zu stehen. Wie oben beiläufig erwähnt, läßt sich zeigen, daß eine reine Sinuswelle von der Wellenlänge

$$(1) \quad \lambda = \frac{2\pi a}{\varphi}$$

sich mit der Geschwindigkeit

$$(2) \quad c = 2a \sqrt{\frac{f}{m}} \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\varphi} = \frac{a\nu \sin \frac{\varphi}{2}}{\varphi}$$

fortpflanzt, und zwar *ohne irgendeine Formänderung*. Den kleinsten Wert nimmt  $c$  für  $\varphi = \pi$  an, also für  $\lambda = 2a$ . Es sind das zugleich die kürzesten Wellen, von denen man in unserem Punktgebilde vernünftigerweise sprechen kann. Für sie hat  $c$  den Wert

$$c_{\min} = \frac{a\nu}{\pi} = 0,658 \cdot c_{\infty},$$

wenn wir den Grenzwert für lange Wellen

$$\frac{a\nu}{2} = c_{\infty}$$

setzen. Es hat danach den Anschein, als wäre die Dispersion selbst für die kürzesten Wellen nicht sehr bedeutend und als müßten sich demnach auch solche Störungen, welche größtenteils aus Fourierbestandteilen von kleiner Wellenlänge bestehen, mit einer Geschwindigkeit ausbreiten, die von der Schallgeschwindigkeit der Größenordnung nach nicht verschieden ist.

Dieser Schluß ist unrichtig, und zwar aus folgendem Grund.  $c$  ist die Geschwindigkeit einer homogenen Welle, welche durch die ganze Punktreihe hindurchläuft, die sogenannte *Phasengeschwindigkeit*. Diese ist bekanntlich in dispergierenden Medien immer etwas verschieden von der *Signalgeschwindigkeit*

Größe der Wärmeleitungs-konstante beeinflussen mögen. Und ich glaube *nicht*, mit Hrn. Debye, daß es notwendig ist, Abweichungen vom Hooke-schen Gesetz anzunehmen, um einen endlichen Wert für die Wärmeleit-fähigkeit zu erhalten.

keit; die letztere läßt sich für ein beliebig gestaltetes Signal überhaupt nicht angeben, weil sie von der Gestalt des Signals abhängt. Besteht dasselbe aus dem „Wellenkopf“ einer im übrigen homogenen Welle, so pflegt man bekanntlich als Signalgeschwindigkeit die sogenannte *Gruppengeschwindigkeit* anzusehen, d. i. die Geschwindigkeit, mit der die Interferenzminima eines Wellenzuges fortschreiten, der aus zwei einfachen Wellen von nahe benachbarter Frequenz superponiert ist. Die Gruppengeschwindigkeit  $v$  hat bekanntlich den Wert

$$(3)^1) \quad v = c \left( 1 + \frac{\tau}{c} \frac{dc}{d\tau} \right)^{-1}.$$

$\tau$  ist die Schwingungsdauer. Führt man statt  $c$  die Wellenlänge

$$(4) \quad \lambda = c\tau$$

ein, so findet man nach leichter Umformung

$$(5) \quad v = \frac{d\left(\frac{1}{\tau}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}.$$

In unserem Falle ist nun nach (1), (2) und (4)

$$\frac{1}{\tau} = \frac{c}{\lambda} = \frac{v \sin \frac{\varphi}{2}}{2\pi}; \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{\varphi}{2\pi a};$$

also

$$v = c_{\infty} \cos \frac{\varphi}{2}.$$

*Die Gruppengeschwindigkeit unseres Gebildes geht also für die kürzesten Wellen ( $\varphi = \pi$ ) gegen Null.* Hierdurch ist, glaube ich, der Widerspruch zwischen den oben aufgestellten Behauptungen und der scheinbar geringen Dispersion, die sich aus der Fourierschen Analyse ergibt, behoben.

Wien, II. physikalisches Institut der Universität,  
5. März 1914.

1) Der gewöhnlich benutzte Wert

$$v = c \left( 1 - \frac{\tau}{c} \frac{dc}{d\tau} \right)$$

ist eine Annäherung, die nur bei geringer Dispersion gestattet ist.

(Eingegangen 6. März 1914.)