VIII. *Geschwindigkeit der Molecularbewegung
und des Schalles in Gasen;
von E. Mulder in Utrecht.*

Nach Clausius¹⁾ ist:

$$p = \frac{nmC^2}{3v},$$

m ist die Masse des Molecüls, n die Anzahl Molecüle, C die Geschwindigkeit, v das Volum des Gefäßes und p der Druck auf die Flächeneinheit. Nach dieser Gleichung ist dann z. B. für Sauerstoff bei 0° C. die Moleculargeschwindigkeit 461 Meter in einer Secunde²⁾.

Angenommen, daß diese Geschwindigkeit die mittlere der Molecüle sey, so ist für ein Kilogramm Sauerstoff bei 0° C. die molecule lebendige Kraft:

$$\frac{mC^2}{2} = \frac{1 \times 461^2}{2 \times 9,80890} = 10,833 \text{ (—) Meterkilogramm} = \frac{10833}{424} = 25,5 \text{ W. E.}$$

Die in einem Volum eines Gases bei 0° C. vorhandene lebendige Kraft der Molecüle ausgedrückt in W. E. ist:

$$\frac{3 \times 0,0691}{2} = 0,10365 \text{ und } 0,10365 \times 273 = 28,2 \text{ W. E.}$$

Also besitzt 1,10563 Kilogramm Sauerstoff 28,2 W. E. und ein Kilogramm: $\frac{28,2}{1,10563} = 25,5 \text{ W. E.}$, wodurch die mittlere Geschwindigkeit der Sauerstoff Molecüle einigermaassen controlirt ist.

Ist $461 = x$, so kann also x bestimmt werden, denn 25,5 und 424 sind bekannt, woraus folgt, daß 10833 bekannt ist, und durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{2 \times 9,80896} = 10833,$$

1) Pogg. Ann. Bd 100, S. 373.

2) In dieser Geschwindigkeit hat man einigermaassen ein Mittel, um das Maximum des Moleculargewichts zu bestimmen, welches ein Gas bei 0° C. besitzen kann, denn:

$$C_T = 260,9^m \sqrt{\frac{T}{273 M}} \text{ Je größer } M, \text{ desto kleiner } C_T.$$

kann x gefunden werden. Also kann die Geschwindigkeit ¹⁾ der Molecüle berechnet werden, ausgehend von dem theoretischen Gesetz von Clausius und Naumann, daß $\frac{\gamma - \gamma'}{\mu} = \frac{2}{3}$ (γ und γ' sind die spec. Wärmen bei constantem Druck und constantem Volumen, μ die Ausdehnungswärme). Umgekehrt kann ausgehend von der Geschwindigkeit z. B. der Sauerstoff-Molecüle, 461 Meter in der Secunde, bewiesen werden, daß $\frac{\gamma - \gamma'}{\mu} = \frac{2}{3}$. So ist z. B.: $\frac{1 \times 461^2}{2 \times 9,80896} = 10833$
 (—) Meter-Kilogramm und $\frac{10833}{424} = 25,5$ W. E., und $\frac{25,5}{273} = 0,093$ und $0,093 \times 1,10563 = 0,102$ und:

$$0,102 : 0,069 = 3 : 2 \text{ ungefähr.}$$

Da 461 berechnet werden kann ohne Anwendung höherer Mathematik (Zöppritz ²⁾), so ist dies auch der Fall mit $\frac{\gamma - \gamma'}{\mu} = \frac{2}{3}$.

Stößt ein Molecül gegen eine Wand, so soll es in Folge seiner Elasticität, nehmen wir an, etwas eingedrückt werden, und beim Reflectiren die Form wiederum bekommen. Zwischen dem Anstoßen des Molecüls gegen die Wand und dem Reflectirtwerden verläuft einige Zeit. Während dieser Zeit ist der Druck des Molecüls derselbe. Die Geschwindigkeit des Molecüls ist dann verschwindend klein und kann $= 0$ genommen werden. Bei dem Zusammendrücken des Molecüls wird also Arbeit geleistet (lebendige Kraft vernichtet), und das Molecül ist wie eine gespannte Stahlfeder, bis es reflectirt ist.

Auch beim Zusammentreffen der Molecüle werden diese eingedrückt, also Arbeit geleistet. Hieraus folgt dann, daß die z. B. in einem Kilogramm Sauerstoff anwesende lebendige Kraft theilweise besteht als potentielle Energie, theil-

$$1) x = \sqrt{\frac{g}{\rho} (\gamma - \gamma') 3 T z},$$

worin $s = 1,10563$, $g = 9,80896$, $\gamma - \gamma' = 0,0691$, $T = 273$, $z = 424$.

2) »Grundriß der Thermo-Chemie« von A. Naumann, S. 35.

Poggendorff's Annal. Bd. CXL.

19

weise als actuelle Energie. Die Summe dieser ist constant; je mehr potentielle Energie, desto weniger actuelle Energie.

Bei der Moleculargeschwindigkeit hat man also zu unterscheiden die mittlere Geschwindigkeit:

- 1) aller Molecüle, auch der Molecüle in Ruhe, die potentielle Energie also in Rechnung gebracht;
- 2) der Molecüle in Bewegung;
- 3) aller Molecüle, und der Molecüle in Ruhe, gedacht in Bewegung zu versetzen. Also wird dann keine potentielle Energie angenommen.

Im letzteren Falle bekommt man nothwendig für die Geschwindigkeit z. B. der Sauerstoff-Molecüle das Maximum wie im zweiten Falle.

Im ersten Falle soll die Geschwindigkeit eine kleinere seyn. Wir nennen dieselbe ¹⁾ die *wirklich* mittlere Geschwindigkeit, die im dritten Falle die *abstract* mittlere Geschwindigkeit.

Wie viel kleiner die erste sey als die letzte, mit andern Worten, welches das Verhältniß sey zwischen potentieller und actualer Energie bei Gasen, scheint allein mit einiger Wahrscheinlichkeit in bestimmten Fällen, so beim Schalle, ausgemacht werden zu können.

Beim Schalle trifft man die Fortpflanzung von lebendiger Kraft. Mechanisch lebendige Kraft wird hier umgesetzt in Wärme, und umgekehrt. Die Fortpflanzung kann allein stattfinden durch Stößen der Molecüle gegen einander, und so auch die genannte Umsetzung. Die Quantität lebendiger Kraft zum Hervorbringen des Schalls kann sehr unbedeutend seyn (siehe später) im Vergleich mit dem Gehalt an lebendiger Kraft der Gase. Selbst bei verschiedenen Gasen scheint diese Quantität auf die Geschwindigkeit keinen merklichen Einfluß auszuüben. Es ist demnach nicht unwahrscheinlich, obwohl gar nicht bewiesen, daß beim Schalle

1) Wenn es n Molecüle giebt, und s der Weg ist, welcher durch diese Molecüle in einer Secunde zurückgelegt wird, so ist $\frac{s}{n} = c$ gleich der wirklich mittleren Geschwindigkeit.

die Molecularbewegungswärme eine Hauptrolle zu erfüllen habe.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Sauerstoff bei 0° ist 316 Meter in der Secunde (genauer 316,18 Meter). Die lebendige Kraft des Schalles und die potentielle Energie nicht mitgerechnet, könnte sie vielleicht 461 Meter seyn (angenommen, die abstracte mittlere Geschwindigkeit der Molecüle sey anzugeben). Nun ist $\frac{461}{316} = 1,4$ ungefähr, und 1,4 der wohl bekannte Quotient und das Maass für geleistete Arbeit, nämlich das Verhältniß der specifischen Wärme bei constantem Druck zu derjenigen bei constantem Volum. Aber $\frac{461}{316}$ ist $= 1,45$.

Nach Clausius ist:

$$p = \frac{nm C^2}{3r} \text{ (siehe später)}$$

also:

$$C = \sqrt{\frac{3vp}{nm}}.$$

C giebt die mittlere Geschwindigkeit an der Molecüle (bei Annahme von potentieller Energie, wohl zu verstehen in Folge eines Stosses). Wäre das Verhältniß dieser zu der gefundenen Geschwindigkeit $= 1,41 = \frac{c}{c'}$ oder $\frac{c}{c'} = 1,45$, so würde die Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles seyn:

$$S = \frac{c'}{c} \sqrt{\frac{3vp}{nm}} \text{ (siehe später).}$$

Nach Newton ist die Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles:

$$V = \sqrt{g \cdot \frac{b}{s}},$$

s ist die Dichtigkeit z. B. der Luft, bezogen auf diejenige des Quecksilbers, bei 0° , $76 = b$, und $g = 9^{\text{m}}, 8088$.

Nach Laplace entsteht in Folge von Verdichtung

Wärme ¹⁾, wodurch die Schnelligkeit größer werden würde, und Poisson und Biot führten den Factor $\sqrt{\frac{c}{c'}}$ ein:

$$V = \sqrt{g \cdot \frac{h}{s}} \cdot \frac{c}{c'}.$$

Nach der Formel von Newton ist für Sauerstoff bei 0° C.:
 $V = 266,15$ Meter in der Secunde. Nun ist $461 - 266 = 195$ und $\frac{296}{195}$ ungefähr $= 1,4$ (genauer $461 - 266,15 = 194,85$ und $\frac{266,15}{194,85} = 1,36$).

Für 461 und 316 ist das Verhältniß ($461 - 316 = 145$):
 $\frac{316}{145} = 2,18$.

$\sqrt{\frac{c}{c'}}$, nicht mitgerechnet, würde dann beim Schalle zur Arbeitsleistung eine Quantität Zeit ²⁾ verbraucht werden, worin ein Weg von 195 Meter zurückgelegt seyn könnte, während 266 dann die wirklich mittlere Geschwindigkeit der Moleculé angäbe; mit $\sqrt{\frac{c}{c'}}$ ist sie 145 Meter.

Nach Newton ist:

$$V = \sqrt{g \cdot \frac{h}{s}}.$$

Nach Clausius:

$$C = \sqrt{\frac{3vp}{nm}}.$$

Nun ist $\frac{vp}{nm} = g \cdot \frac{h}{s}$ (siehe später). Diefs angenommen ist dann:

- 1) Der Einfluß von $\sqrt{\frac{c}{c'}}$ ist sehr groß, denn $316 - 266 = 50$ Meter in der Secunde.

Die Quantität lebendiger Kraft des Schalls (wodurch allein die Verdichtungswärme entsteht) kann sehr gering seyn, z. B. $\frac{1}{1\,000\,000\,000}$ Meterkilogramm, auf 1 Meter Abstand (gar nicht das Minimum) $= \frac{1}{424\,000\,000\,000}$ W. E., wodurch 1 Kilogr. Luft um 0,000000001° C. in Temp. erhöht werden kann.

- 2) Potentielle Energie bei Sauerstoff unter gewöhnlichen Umständen mitgerechnet (siehe später).

$$nm = \frac{G}{g}, \text{ also } \frac{vp}{G} = g \cdot \frac{b}{s}, \text{ also: } \frac{vp}{G} = \frac{b}{s}.$$

Für Luft z. B. ist $b = 0,76$ Meter und $s = 0,000095122$
 $= \frac{0,001293187}{13,5959}$ (das Gewicht in Grammen von 1 CC. Luft
 und 1 CC. Quecksilber), also:

$$\frac{b}{s} = \frac{0,76}{0,000095122}.$$

Setzen wir in $\frac{vp}{G}$, $G = 1$ Kilogramm Luft, und v dessen
 Volumen in Kub.-Meter, $p = 10334,5$ Kilogramm auf das
 Quadratmeter, so hat man:

$$\begin{aligned} \frac{vp}{G} &= \frac{10334,5 \times 0,77328}{1} = \frac{10334,5}{1} = \frac{10334,5}{1,293187} \\ &= \frac{10334,5}{13595,9} \\ &= \frac{0,76}{0,000095122} = \frac{b}{s}. \end{aligned}$$

Woraus folgt, dafs $g \cdot \frac{vp}{G} = g \cdot \frac{b}{s}$, und das $G = nm g$, also

$$\frac{vp}{nm} = g \cdot \frac{b}{s}.$$

Die Formel von Clausius:

$$C = \sqrt{\frac{3vp}{nm}},$$

kann nun also geschrieben werden:

$$C = \sqrt{3g \cdot \frac{b}{s}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I),$$

während die Formel von Newton ist:

$$V = \sqrt{g \cdot \frac{b}{s}} \quad \text{und} \quad V = \sqrt{\frac{vp}{nm}} \quad . \quad . \quad (II).$$

Die Geschwindigkeit des Schalles nach der Formel von
 Newton ist also mit $\sqrt{s}$ zu multipliciren, um die abstract
 mittlere Moleculargeschwindigkeit zu bekommen. Durch
 Theilung:

$$\frac{C}{V} = \frac{\sqrt{3g \cdot \frac{b}{s}}}{\sqrt{g \cdot \frac{b}{s}}} = \sqrt{3}, \text{ also } \frac{C^2}{V^2} = 3 \quad . \quad . \quad \text{(III)},$$

und

$$\frac{\frac{m C^2}{2}}{\frac{m V^2}{2}} = 3 \quad . \quad . \quad . \quad \text{(IV)}.$$

Für Sauerstoff ist $V=266$ und $C=461$ Meter, und $\frac{461}{266} = \sqrt{3}$,
also $\frac{461^2}{266^2} = 3$ (genauer $\frac{461^2}{266,15^2} = 3$).

Nach Poisson und Biot ist für die Geschwindigkeit des Schalles:

$$S = \sqrt{g \cdot \frac{b}{s} \cdot \frac{c}{c'}} \quad \left(\frac{c}{c'} = 1,41 = \sqrt{2} \right).$$

Da $C = \sqrt{3g \cdot \frac{b}{s}}$ ist:

$$\frac{C}{V^2} = \sqrt{g \cdot \frac{b}{s}}.$$

$$\frac{C V \frac{c}{c'}}{\sqrt{3}} = \sqrt{g \cdot \frac{b}{s} \cdot \frac{c}{c'}^2}^1, \text{ also:}$$

$$S = C \sqrt{\frac{c}{3c'}} \quad \text{(V)} \quad \text{oder: } S = \sqrt{\frac{v p}{n m}} \cdot \frac{c}{c'} \quad \text{(VI)}.$$

Für Sauerstoff ist $C = 461$ Meter und $S = 316$ Meter (genauer 316,18).

- 1) Nimmt man an, der Aether sey eine Materie, wie z. B. Wasserstoff, und geht man aus von seiner Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so kann s berechnet werden, und also das Moleculargewicht des Aethers, also auch das Gewicht z. B. eines Liters bei 0° C. und 0m,76, das wohl nicht viel betragen würde.

Ist der Aether eine Materie, wie z. B. Wasserstoff, so ist er nothwendig ein Element.

Durch die große Geschwindigkeit seiner Molecüle scheint dieses hypothetische Element keine chemische Verbindungen einzugehen (bloß etwas verdichtet werden zu können). Ursache der geringeren Geschwindigkeit des Lichtes in Wasser als in Luft etc.

Wäre die Schnelligkeit des Schalles in Sauerstoff 319 Meter, so: $\frac{461}{319} = \sqrt[3]{3}$, und:

$$S = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \sqrt{3g \cdot \frac{b}{s}}. \quad (\sqrt[3]{3} = 1,442), \text{ dann sollte aber } \frac{c}{c'} = 1,43 \text{ seyn müssen.}$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist jedoch für $\frac{c}{c'}$ = 316,18 Meter, und $\frac{461}{316} = 1,458$.

Für $\frac{c}{c'} = 1,4$ (siehe später), ist die Schnelligkeit des Schalles in Sauerstoff: $266,15 \times \sqrt[3]{1,4} (= 1,183) = 314,7$ Meter, und $\frac{461}{314,7} = 1,464$ und $1,464^3 = 3,1387$ und $3,1415 (= \pi) - 3,1387 = 0,002$. Für $\frac{c}{c'} = 1,4$ ist demnach (beinahe genau):

$$S = \sqrt[3]{\frac{1}{3,14}} \sqrt{3g \cdot \frac{b}{s}}. \quad \left(\sqrt[3]{\frac{1,4}{3}} = \frac{1}{1,464}\right).$$

Für $\frac{c}{c'} = 1,41$, sollte:

$$S = \frac{c'}{c} \sqrt{3g \cdot \frac{b}{s}}$$

$S = 326$ Meter seyn müssen (für 461 Moleculargeschwindigkeit).

Für $\frac{c}{c'} = 1,41$ und $S = 316,18$ Meter, sollte in:

$$S = \frac{c'}{c} \sqrt{3g \cdot \frac{b}{s}}$$

die Moleculargeschwindigkeit 445,8 Meter seyn, also $461 - 445,8 = 15,6$ Meter weniger.

Dafs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Sauerstoff viel gröfser ist als 317 Meter, z. B. 326, kann nicht angenommen werden. Dafs $\frac{c}{c'}$ seyn sollte 1,43, ist nicht wahrscheinlich, vielmehr ist es 1,4.

Nennen wir nämlich die Hälfte der Ausdehnungswärme = a , und nehmen mit Clausius und Naumann 2:3:2

an als Verhältniß zwischen Ausdehnungswärme, Molecularbewegungswärme und Atombewegungswärme z. B. für Sauerstoff (und andere Moleculc mit zwei Atomen), so hat man:

$$\frac{b}{b-2a} = x,$$

worin b die specifische Wärme bei constantem Druck bezeichnet, und $2a$ die Ausdehnungswärme. Da $b = 2a + 3a + 2a = 7a$ ist, hat man:

$$\frac{7a}{7a-2a} = \frac{7a}{5a} = \frac{7}{5} = 1,4 \text{ } ^1).$$

Der Factor $\sqrt{3}$ in $\sqrt{3g \cdot \frac{b}{s}}$ kann nicht geringer werden ²⁾.

In wiefern die Anwesenheit von etwas potentieller Energie in den Gasen unter gewöhnlichen Umständen von Einfluß seyn kann auf den Werth von C , lassen wir dahingestellt; mehr wie wahrscheinlich ist jedoch $C = 461$ Meter.

Jedenfalls gilt für Gase (frei gedacht von potentieller Energie, wohl zu verstehen in Folge eines Stosses gegen einander oder die Wand):

$$C = \sqrt{3g \cdot \frac{b}{s}}, \text{ und:}$$

$$S = C \sqrt{\frac{c}{3c'}} \text{ } ^3) \text{ (angenommen, dafs: } S = \sqrt{g \cdot \frac{b}{s} \cdot \frac{c}{c'}} \text{)} \\ \text{(bei } 0^\circ \text{ C.)}$$

1) Der Arbeitswerth der Wärmeeinheit ist dann: $\frac{0,00364166 \times 10334,5}{1,2932 \times 0,06792}$

$$= 428,4 \text{ Meterkilogramm } \left(\frac{0,237733}{0,23773 - A} = 1,4, \text{ woraus } A = 0,06792 \right).$$

Die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft sollte mit $\frac{c}{c'} = 1,4$ nach

$$S = \sqrt{g \cdot \frac{b}{s} \cdot \frac{c}{c'}} \text{ ungefähr } 330 \text{ Meter seyn.}$$

2) Die Zahl 3 stammt her von der Formel $\frac{nmC^2}{h} \cos^2 \vartheta \cdot \sin \vartheta d\vartheta$

(Clausius l. l.), welche beim Integriren von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \frac{\pi}{2}$,

$$\text{giebt } \frac{nmC^2}{h} \cdot \frac{1}{3}, \text{ und für die Flächeneinheit } \frac{nmC^2}{3ah} = \frac{nmC^2}{3v} = p.$$

3) $\sqrt{\frac{c}{3c'}}$ ist vielleicht zu decompouiren in $\frac{1}{\frac{c}{c'} \cdot x} \left(= \frac{1}{1,45} \right) \cdot \frac{1}{\frac{c}{c'}} = \frac{c'}{c}$

ist dann der Factor für die potentielle Energie des Schalles, und x für

Besteht ein constanter Factor für Gase, womit die Moleculargeschwindigkeit zu multipliciren ist, um die des Schalles zu bekommen, so ist umgekehrt die letzte ein Mittel, um die erste kennen zu lernen. Für Flüssigkeiten würde vielleicht später auch solch ein Factor gefunden werden ¹⁾.

**IX. Ueber Erzeugung stehender Schwingungen und Klangfiguren in elastischen und tropfbaren Flüssigkeiten durch feste tönende Platten;
von August Kundt.**

Im Decemberheft 1869 dieser Annalen, (Bd. CXXXVIII, S. 560) hat Herr Vierth eine Notiz: »Ueber die Schwingungen einer Luftplatte, welche denen einer festen Scheibe entsprechen«; veröffentlicht. Er beginnt dieselbe mit den Worten: »Ohne von den Arbeiten des Prof. Kundt, welche derselbe im 7. Heft dieser Annalen S. 456 veröffentlichte, Kenntniss zu haben, hatte ich mich mit demselben Gegenstande, den Schwingungen einer Luftplatte, beschäftigt. Ich führe einige meiner Versuche an, weil sie zeigen, wie man auf einfachere Weise eine Luftscheibe erregen kann, als dies durch Herrn Prof. Kundt geschehen ist und weil sie zu gleicher Zeit den Zusammenhang mit den Chladni'schen Figuren erkennen lassen.« —

Gase (Sauerstoff und analoge) unter gewöhnlichen Umständen. Für

$$\frac{1}{\frac{c}{c'} \cdot z} = \frac{1}{1,45} \text{ und } \frac{c}{c'} = 1,41 \text{ ist } z = 1,028, \text{ also die potentielle Energie}$$

für Sauerstoff: $\frac{461}{1,028} = 449,4$ und $461 - 449,4 = 11,6$ Meter, 449,4 sollte dann die wirklich mittlere Geschwindigkeit in der Secunde ausdrücken für Sauerstoff-Molecüle.

- 1) Bei Flüssigkeiten scheint die Atomenbewegungswärme Theil zu nehmen an der Fortpflanzung des Schalls.