Sui sistemi di integrali indipendenti di una equazione lineare ed omogenea a derivate parziali di 1.° ordine.

(Memoria del prof. G. RICCI, a Padova.)

INTRODUZIONE.

Il problema dei sistemi ortogonali in una varietà ad n dimensioni è suscettibile di una generalizzazione, a cui, per quanto so, non è ancora stato posto mente e che forma l'oggetto delle ricerche qui svolte.

Si tratta di trovare le condizioni necessarie e sufficienti perchè una equazione a derivate parziali di 1.° ordine lineare ed omogenea con n variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_n$ ammetta un sistema di $n - 1$ integrali ortogonali fra di loro in una varietà ad n dimensioni, di cui è dato l'elemento lineare, e i cui punti si considerano determinati mediante quelle variabili; e verificate quelle condizioni riconoscere se e quanto gli integrali stessi siano determinati.

Se con Y_r si indica il coefficiente della derivata della funzione incognita rispetto ad x_r nella equazione a derivate parziali, con a_{rs} quello di $dx_r dx_s$ nel quadrato dell'elemento lineare e, posto $X_r = \sum_s a_{rs} Y_s$, si suppone che le X_r siano proporzionali alle derivate di una stessa funzione rispetto alle x_r , il problema enunciato coincide con quello dei sistemi ortogonali nella varietà, di cui si tratta. Se si suppone di più che l'espressione del quadrato dell'elemento lineare di questa con un cambiamento di variabili possa mettersi sotto la forma $\sum_1^n dy_r^2$, cioè che, secondo una classificazione da me proposta, quella espressione sia una forma quadratica differenziale di classe 0, il problema stesso è quello studiato dal DARBOUX nella sua bella Memoria pubblicata nel Volume VII della Serie 2.^a delle *Annales de l'École Normale Supérieure*, colla differenza che le equazioni, a cui noi giungeremo per questo caso, si riferiscono ad un sistema qualunque di variabili e non soltanto a quello, che dà al quadrato dell'elemento lineare la forma sopra indicata.

Anche prescindendo da queste speciali applicazioni, la cui importanza è ben nota, parmi che il problema enunciato e i risultati ottenuti abbiano un interesse loro proprio come quelli, che mettono in evidenza un nuovo aspetto della teoria delle equazioni lineari ed omogenee a derivate parziali di 1.° ordine e costituiscono in casi molto generali una riduzione notevole del problema della loro integrazione.

Da un mio recente lavoro (*) appare già come l'unire la considerazione di una forma differenziale quadratica ad n variabili allo studio delle funzioni di queste introduca nelle formule, che servono pel cambiamento di variabili nel calcolo differenziale, non soltanto una maggiore simmetria, ma ben'anche una maggiore generalità, di cui si può trarre partito per mettere le equazioni di dati problemi sotto la forma, che apparirà più opportuna per la loro soluzione. Ne avremo qui un esempio poichè vedremo che il problema della integrazione di una equazione lineare ed omogenea a derivate parziali di 1.° ordine presenta maggiore o minore difficoltà secondo la natura della forma quadratica differenziale, che vi si connette, il che potrà convincere qualcuno dell'aiuto, che si può trarre in altri ed importanti campi di ricerca dallo studio di dette forme.

Quando si cerca di tradurre il problema proposto in linguaggio analitico, si incontra dapprima, come vedremo nel § 2, una equazione algebrica di grado $n - 1$, i cui coefficienti dipendono tanto dalle Y_r quanto dalle a_{rs} e dalle derivate prime delle une e delle altre. Essa ha forma analoga a quella, che dà nel nostro spazio le curvature principali di un sistema di superficie e ne è la generalizzazione. Mediante alcune formule dimostrate nel § 1 si vede facilmente che le radici di detta equazione non dipendono affatto dalla scelta delle coordinate, ma soltanto dalla natura della varietà ad n dimensioni e da quella della equazione a derivate parziali. Potremo quindi chiamarla *equazione algebrica caratteristica* di questa equazione in quella varietà.

Nel § 3 consideriamo il caso in cui le radici $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$ della equazione algebrica caratteristica, le quali sono sempre reali, siano anche tutte disuguali. A una qualunque di esse ω_u corrisponde allora un sistema di n quantità H_{ru} ($r = 1, 2, \dots, n$) e se poniamo $Y_r = H_{rn}$ le linee di equazioni:

$$\frac{dx_1}{H_{1u}} = \frac{dx_2}{H_{2u}} = \dots = \frac{dx_n}{H_{nu}} \quad (u = 1, 2, \dots, n),$$

(*) *Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali* (Tomo XIV della Serie 2.^a di questi Annali).

sono ortogonali fra di loro due a due. Le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza degli $n - 1$ integrali ortogonali cercati sono allora quelle necessarie e sufficienti perchè, posto $\Xi_{ru} = \sum_s a_{rs} H_{su}$, ciascuna delle $n - 1$ equazioni differenziali totali $\sum_r \Xi_{ru} dx_r = 0$, ($u = 1, 2, \dots, n - 1$) sia integrabile con una sola primitiva $\rho_u = \text{costante}$ e, quando così è, $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$ costituiscono appunto il sistema cercato di integrali della equazione proposta ortogonali fra di loro due a due nella varietà data; sistema, che è quindi in questo caso completamente determinato. Se assieme alla equazione proposta stessa consideriamo le equazioni pure lineari ed omogenee a derivate parziali di 1.° ordine di coefficienti H_{ru} le condizioni indicate equivalgono alle seguenti: 1.° che siano completi gli $n - 1$ sistemi di equazioni, che si hanno combinando la proposta con una qualunque di quelle di coefficienti H_{ru} ; 2.° che siano completi gli $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ sistemi di equazioni, che risultano della proposta e di due di queste ultime equazioni. Abbiamo così due sistemi di equazioni di condizione affatto indipendenti l'uno dall'altro, e di cui l'uno S_1 ne comprende $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, l'altro S_2 ne comprende $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$. Queste ultime però si riducono ad $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}$ distinte nel caso del problema studiato da DARBOUX, cioè del problema dei sistemi ortogonali in una varietà, per cui il quadrato dell'elemento lineare è di classe 0.

Nel § 4 consideriamo il caso, in cui la equazione algebrica caratteristica ammette delle radici multiple. Allora ad ogni gruppo di m radici eguali ad ω_u corrisponde un gruppo G_u di m equazioni lineari ed omogenee a derivate parziali di 1.° ordine, i cui coefficienti sono determinati a meno di una sostituzione lineare tra di essi, e le condizioni necessarie e sufficienti per la esistenza del sistema di integrali ortogonali cercato consistono in ciò che siano completi: 1.° i sistemi di equazioni che risultano della proposta e di uno dei gruppi G_u ; 2.° quelli, che risultano della proposta e di due di questi ultimi gruppi. Allora al gruppo G_u di m radici eguali della equazione algebrica caratteristica corrisponde un sistema di m integrali della proposta, i quali possono prendersi come coordinate di una varietà ad m dimensioni contenuta nella data ad n . Due qualunque di queste varietà sono ortogonali fra di loro e tutte lo sono alla linea di equazioni:

$$\frac{dx_1}{Y_1} = \frac{dx_2}{Y_2} = \dots = \frac{dx_n}{Y_n}.$$

Però in questo caso il sistema di integrali ortogonali non è completamente determinato, essendo nell'interno di ciascuna di quelle varietà arbitraria la scelta del sistema di coordinate, purchè ortogonali.

È specialmente notevole e merita forse uno studio speciale il caso, in cui tutte le radici della equazione algebrica caratteristica sono eguali fra di loro. Allora nessuna condizione si richiede per l'esistenza del sistema di integrali ortogonali e questo è affatto indeterminato, poichè ogni integrale della proposta ne può far parte. Quando sia $n = 3$ e la varietà, che si considera sia lo spazio ordinario euclideo a tre dimensioni, a questa classe di equazioni appartiene quella, i cui coefficienti sono proporzionali alle derivate del parametro di un sistema di sfere concentriche.

Nel § 5 studieremo il problema dei sistemi n^{upli} ortogonali in una varietà qualunque ad n dimensioni e vedremo che in questo caso le equazioni generali del sistema S_2 sopra accennato prendono delle forme speciali importanti.

Nel § 6 applicheremo la teoria generale svolta nei precedenti paragrafi al caso di $n = 3$. In questo caso, se le due radici della equazione algebrica caratteristica non sono eguali, abbiamo soltanto il sistema di equazioni S_1 , e questo comprende una sola equazione. Perchè invece la equazione algebrica caratteristica abbia le radici eguali debbono essere verificate due equazioni di condizione, le quali sono di 1.º ordine rispetto ai coefficienti Y_r ed a_{rs} . Malgrado ciò e malgrado che i coefficienti Y_r essenzialmente indipendenti si riducono in questo caso precisamente a due, pure ammettendo che la varietà data sia lo spazio euclideo, vedremo che esistono altre equazioni differenziali, per cui le radici della equazione algebrica caratteristica sono eguali fra di loro, oltre a quella ricordata superiormente.

Mi pare in fine utile osservare che la via seguita nel § 1 condurrebbe alla determinazione degli invarianti di un sistema di due forme differenziali ad n variabili, di cui l'una lineare e l'altra quadratica e che anzi le formule ivi trovate conducono immediatamente agli invarianti di 1.º ordine. Questa via è quella stessa seguita nella mia Memoria sopra ricordata, e una parte dei risultati, a cui si giungerebbe, coincide con quelli della Memoria stessa, sostituendo nelle formule di questa alle quantità $U^{(r)}$, che rappresentano le derivate di una stessa funzione U rispetto alle variabili x_r , le funzioni X_r qualunque qui considerate, alle U_{hk} le X_{hk} , ecc.

§ 1.

Formule preliminari.

Due forme differenziali ad n variabili, l'una lineare:

$$l = \sum_r X_r dx_r,$$

l'altra quadratica:

$$\varphi^2 = \sum_{r,s} a_{rs} dx_r dx_s,$$

i cui coefficienti sono funzioni qualunque delle variabili soggette alla sola condizione che il discriminante a della seconda sia > 0 , per la sostituzione di nuove variabili u alle x si trasformano rispettivamente nelle:

$$(l) = \sum_p (X_p) du_p$$

$$(\varphi)^2 = \sum_{p,q} (a_{pq}) du_p du_q,$$

essendo:

$$\left. \begin{aligned} (X_p) &= \sum_r X_r x_r^{(p)} \\ (a_{pq}) &= \sum_{r,s} a_{rs} x_r^{(p)} x_s^{(q)}, \end{aligned} \right\} \quad (\alpha)$$

convenendo di indicare rispettivamente con $x_r^{(p)}$, $x_r^{(pq)}$, ecc., $u_p^{(r)}$, $u_p^{(rs)}$, ecc., le derivate di x_r rispetto ad u_p , ad u_p ed u_q , ecc., e quelle di u_p rispetto ad x_r , ad x_r ed x_s , ecc. In generale converremo di indicare con $U^{(r)}$, $U^{(rs)}$, le derivate rispetto ad x_r , ad x_r ed x_s ... di una funzione U delle x . Converremo di più di distinguere mediante parentesi le quantità relative alle variabili u da quelle analoghe relative alle x .

Dalle (α) si hanno mediante derivazione le:

$$\left. \begin{aligned} (X_r^{(s)}) &= \sum_{hk} X_h^{(k)} x_h^{(r)} x_k^{(s)} + \sum_h X_h x_h^{(rs)} \\ (a_{rs,i}) &= \sum_g x_g^{(i)} \{ \sum_{hk} a_{hk,g} x_h^{(r)} x_k^{(s)} + \sum_h a_{hg} x_h^{(rs)} \}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ponendo:

$$2a_{hk,g} = a_{hg}^{(k)} + a_{kg}^{(h)} - a_{hk}^{(g)}.$$

Se tra le (1) si eliminano le $x_h^{(rs)}$, il che si fa risolvendo le seconde di quelle equazioni rispetto alle $x_h^{(rs)}$ stesse e sostituendone i valori così trovati nelle prime, si ottengono le:

$$(X_{p,q}) = \sum_{rs} X_{r,s} x_r^{(p)} x_s^{(q)}, \quad (\beta)$$

posto:

$$X_{r,s} = X_r^{(s)} - \sum_i a_{rs,i} Y_i \quad (2)$$

$$Y_i = \sum_h c_{ih} X_h, \quad c_{ih} = \frac{d \log a}{d a_{ih}}, \quad (3)$$

colla convenzione (che manterremo in seguito nei casi analoghi) che nella derivazione di a si riguardi a_{ih} come distinto da a_{hi} , ed osservando che è:

$$Y_h = \sum_i (Y_i) x_i^{(h)}.$$

Le (β) e (α) ci dicono che la forma bilineare ψ di coefficienti $X_{r,s}$ è covariante alle l e φ^2 così che costruendo tutti gli invarianti algebrici di questo sistema di forme si avrebbero tutti *gli invarianti differenziali di 1.º ordine* del sistema di forme differenziali l e φ^2 .

Se in luogo di queste si considerano le reciproche l' e φ'^2 di coefficienti Y_i e c_{pq} , pei quali si hanno invece delle (α) le:

$$\left. \begin{aligned} (Y_p) &= \sum_r Y_r u_p^{(r)} \\ (c_{pq}) &= \sum_{rs} c_{rs} u_p^{(r)} u_q^{(s)}, \end{aligned} \right\} \quad (\alpha^{bis})$$

poichè, posto:

$$Y_{r,s} = \sum_{hk} X_{h,k} c_{hr} c_{ks},$$

per le (β) e (α^{bis}) si hanno le:

$$(Y_{p,q}) = \sum_{rs} Y_{r,s} u_p^{(r)} u_q^{(s)}, \quad (\beta^{bis})$$

si vede che invece della ψ deve considerarsi la forma ψ' di coefficienti $Y_{r,s}$, che è covariante a l' e φ'^2 . Ciò dà luogo ad una specie di dualità potendosi nelle ricerche, che si riferiscono al sistema proposto l e φ^2 , introdurre indifferentemente i coefficienti di un sistema o quelli del sistema reciproco ed ottenere così due espressioni reciproche degli stessi risultati.

Dalle (4) si traggono anche le:

$$\sum_s Y_{r,s} a_{ks} = \sum_h X_{h,k} c_{hr} \quad (4')$$

$$X_{h,k} = \sum_{rs} Y_{r,s} a_{hr} a_{ks}. \quad (4'')$$

Notiamo ancora che nelle (4) per le $X_{h,k}$ ponendo i loro valori dati dalle (2) ed eseguendo alcune riduzioni si trova:

$$Y_{r,s} = \sum_h c_{hs} Y_r^{(h)} - \frac{1}{2} \sum_h c_{rs}^{(h)} Y_h + \frac{1}{2} \sum_{hk} X_h (c_{kr} c_{hs}^{(k)} - c_{ks} c_{hr}^{(k)}). \quad (5)$$

§ 2.

**Equazione algebrica caratteristica
di una equazione lineare ed omogenea a derivate parziali di 1.° ordine
e ad n variabili in una varietà ad n dimensioni.**

Assieme alla forma quadratica differenziale considerata nel precedente paragrafo:

$$\varphi^2 = \sum_{rs} a_{rs} dx_r dx_s,$$

si consideri la equazione a derivate parziali di 1.° ordine lineare ed omogenea:

$$\sum_r Y_r \psi^{(r)} = 0, \quad (\text{I})$$

in cui le Y_r sono funzioni qualunque di $x_1, x_2, \dots, x_n$ e si cerchi dapprima la condizione necessaria e sufficiente affinchè ad un integrale ρ della (I) ne corrispondano altri $n-2$ $\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_{n-1}$ indipendenti fra di loro e tali che si abbia:

$$\sum_{rs} c_{rs} \rho_1^{(r)} \rho_h^{(s)} = 0 \quad (h = 2, 3, \dots, n-1),$$

cioè, come diremo adottando per brevità il linguaggio geometrico, che gli siano *ortogonali* nello spazio di elemento lineare φ .

Posto:

$$H_r = \sum_s c_{rs} \rho^{(s)},$$

si richiederà per ciò e basterà che la equazione (I) e la:

$$\sum_r H_r \psi^{(r)} = 0,$$

costituiscono un sistema completo, cioè che indicando con Ξ_s ed ω due indeterminate sia:

$$\frac{1}{2} \sum_r (Y_r H_s^{(r)} - H_r Y_s^{(r)}) = \Xi_s Y_s + \omega H_s,$$

ovvero, essendo:

$$\sum_r Y_r H_s^{(r)} = \sum_t c_{st} \sum_r Y_r \rho^{(rt)} + \sum_t \rho^{(t)} \sum_r Y_r c_{st}^{(r)} = \sum_r \rho^{(r)} \sum_t (c_{st}^{(t)} Y_t - c_{st} Y_r^{(t)}),$$

che, posto:

$$2 Y_{rs} = \sum_t (c_{st} Y_r^{(t)} + c_{rt} Y_s^{(t)} - c_{rs}^{(t)} Y_t), \quad (\text{I})$$

le $\rho^{(r)}$ soddisfino ad un sistema di equazioni algebriche della forma:

$$\left. \begin{aligned} \sum_r Y_r \rho^{(r)} &= 0 \\ Y_s \Xi_s + \sum_r (Y_{rs} + \omega c_{rs}) \rho^{(r)} &= 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

Le quantità Ξ_0 ed ω dovranno essere determinate in base a queste stesse equazioni e però ω dovrà essere radice della equazione algebrica di grado $n - 1$:

$$\begin{vmatrix} 0 & Y_1 & Y_2 \dots & Y_n \\ Y_1 & Y_{11} + \omega c_{11} & Y_{12} + \omega c_{12} \dots & Y_{1n} + \omega c_{1n} \\ Y_2 & Y_{21} + \omega c_{21} & Y_{22} + \omega c_{22} \dots & Y_{2n} + \omega c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_n & Y_{n1} + \omega c_{n1} & Y_{n2} + \omega c_{n2} \dots & Y_{nn} + \omega c_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (e)$$

Fermiamoci a studiare questa equazione e dimostriamo che essa ha tutte le radici reali. Se ω_h è una radice della (e) è sempre possibile determinare un sistema di quantità $\Xi_{0h} \Xi_{1h} \dots \Xi_{nh}$, che non siano tutte nulle e che soddisfino alle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^n Y_r \Xi_{rh} &= 0 \\ Y_s \Xi_{0h} + \sum_1^n (Y_{rs} + \omega_h c_{rs}) \Xi_{rh} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Indicando con $\Xi_{0k}, \Xi_{1k}, \dots \Xi_{nk}$ le quantità analoghe corrispondenti ad un'altra radice ω_k della (e) si ha dalle (2) moltiplicate per Ξ_{sk} e sommate rispetto ad s da 1 fino ad n

$$\sum_{rs} Y_{rs} \Xi_{rh} \Xi_{sk} + \omega_h \sum_{rs} c_{rs} \Xi_{rh} \Xi_{sk} = 0, \quad (2')$$

e sottraendo da questa quella, che si ottiene scambiando h con k ,

$$(\omega_h - \omega_k) \sum_{rs} c_{rs} \Xi_{rh} \Xi_{sk} = 0. \quad (3)$$

Supponiamo che ω_h ed ω_k siano radici complesse coniugate della (e). Se è $\Xi_{rh} = A_r + iB_r$, sarà $\Xi_{sk} = A_s - iB_s$ e la (3) ci darà:

$$(\omega_h - \omega_k) \sum_{rs} c_{rs} (A_r A_s + B_r B_s) = 0,$$

la quale, se ω_h ed ω_k non sono reali ed eguali, non può essere verificata a meno che sia $\Xi_{rh} = \Xi_{sk} = 0$, il che è contro la ipotesi. Possiamo dunque concludere che: *La equazione (e) ha tutte le radici reali.*

Si dimostra pure con un metodo noto che se una radice ω_h della equazione (e) annulla insieme ad essa tutti i minori principali di ordine $n + 1 - m$ del determinante, che ne costituisce il primo membro, essa è multipla del grado m e reciprocamente ogni radice multipla del grado m annulla tutti quei minori e per conseguenza anche gli altri minori dello stesso ordine $n + 1 - m$. In questo caso le equazioni (2) ammettono, come è noto, m e non più di m sistemi indipendenti di soluzioni.

La equazione (I) mediante la sostituzione di nuove variabili indipendenti u alle x si trasforma nella:

$$\sum_p (Y_p) (\psi^{(p)}) = 0,$$

essendo:

$$(Y_p) = \sum_r Y_r u_p^{(r)}. \quad (3')$$

Queste confrontate colle prime tra le (α^{bis}) del § 1 ci permettono di prendere per le quantità Y_r considerate in quel paragrafo i coefficienti della (I). Confrontando poi ancora le (1) di questo colle (5) del § 1 si vede che è:

$$Y_{rs} = \frac{1}{2} (Y_{r,s} + Y_{s,r}),$$

e per quanto si è dimostrato nel paragrafo stesso si conclude che la forma di coefficienti Y_{rs} è covariante a quella di coefficienti c_{rs} . Il primo membro della (e) è quindi un controvariante di queste forme e però le sue radici sono indipendenti dalla scelta delle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$. Per questa ragione chiameremo la equazione (e) *equazione algebrica caratteristica della equazione differenziale (I) nella varietà di elemento lineare φ* .

Mantenendo sempre le notazioni del § 1 e ponendo:

$$X_{hk} = \frac{X_{h,k} + X_{k,h}}{2},$$

cioè:

$$X_{hk} = \frac{X_h^{(k)} + X_k^{(h)}}{2} - \sum_i a_{hk,i} Y_i, \quad (4)$$

si hanno dalle (4) di quel paragrafo le:

$$Y_{rs} = \sum_{hk} X_{hk} c_{hr} c_{ks}. \quad (5)$$

Queste insieme alle (3) del paragrafo stesso ci dicono che il primo membro della (e) è il prodotto del quadrato del determinante $\sum \pm c_{11} c_{22} \dots c_{nn}$ per il primo membro della equazione:

$$\begin{vmatrix} 0 & X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ X_1 & X_{11} + \omega a_{11} & X_{12} + \omega a_{12} & \dots & X_{1n} + \omega a_{1n} \\ X_2 & X_{21} + \omega a_{21} & X_{22} + \omega a_{22} & \dots & X_{2n} + \omega a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_n & X_{n1} + \omega a_{n1} & X_{n2} + \omega a_{n2} & \dots & X_{nn} + \omega a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad (e_1)$$

che è quindi la (e) sotto una nuova forma, che potrebbe dirsi reciproca della (e)

stessa. Le forme (e) ed (e₁) coincidono se è $\varphi^2 = \sum_1^n dx_r^2$. Se in questo caso si suppone di più che sia $\sum_r Y_r^2 = 1$, il che può sempre farsi, e che le $X_r = Y_r$ siano proporzionali alle derivate di una stessa funzione ρ rispetto alle x_r si riconosce subito che la equazione (e) od (e₁) è quella nota pel caso di $n = 3$, che ha per radici le curvature principali del sistema di superficie di parametro ρ , mentre per n qualunque si riconosce facilmente che, sempre nelle ipotesi ammesse, se ne può riguardare come la generalizzazione. Se φ^2 , pure essendo di classe 0, non è ridotto alla forma $\sum_r dx_r^2$, e le X_r sono sempre quantità proporzionali alle derivate di una funzione ρ rispetto alle x_r tali che si abbia $\sum_r X_r Y_r = 1$, da quanto abbiamo dimostrato possiamo concludere che (e) od (e₁) ci danno in coordinate generali la equazione, che ha per radici le curvature principali del sistema di superficie di parametro ρ .

Notiamo infine che, come si riconosce facilmente, se si moltiplica la equazione proposta (I) per un coefficiente U , anche le radici della equazione algebrica caratteristica vengono tutte moltiplicate per lo stesso coefficiente.

§ 3.

Risoluzione del problema dei sistemi di integrali ortogonali di una equazione lineare ed omogenea a derivate parziali di 1.^o ordine in una varietà, in cui la sua equazione algebrica caratteristica non ha radici multiple.

Proponiamoci in secondo luogo di determinare le condizioni necessarie e sufficienti perchè la equazione (I) ammetta $n - 1$ integrali $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$ ortogonali fra di loro due a due nella varietà di elemento lineare φ . Se questi integrali esistono ciascuno di essi si trova evidentemente nella condizione dell'integrale ρ considerato nel precedente paragrafo e però soddisfa a un sistema di equazioni della forma (II), in cui per ω sia posta una radice ω_h della equazione algebrica caratteristica.

Supporremo dapprima che questa non abbia radici multiple. Allora posto:

$$\left. \begin{aligned} Y(\omega) &= \sum \pm (Y_{11} + \omega c_{11})(Y_{22} + \omega c_{22}) \dots (Y_{nn} + \omega c_{nn}) \\ \Xi_r(\omega) &= \sum_s \frac{d Y(\omega)}{d (Y_{rs} + \omega c_{rs})} Y_s, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

per $\omega = \omega_h$ $Y(\omega)$ è differente da 0 e non si annullano insieme tutte le $\Xi_r(\omega)$,

e le equazioni (2) del § 2 ammettono un solo sistema di soluzioni indipendenti, pel quale si può prendere:

$$\Xi_{0h} = -a Y(\omega_h), \quad \Xi_{rh} = a \Xi_r(\omega_h). \quad (2)$$

Se esiste dunque il sistema di integrali ortogonali $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$ ognuno di essi corrisponderà ad una radice della equazione algebrica caratteristica avendosi:

$$\rho_h^{(r)} = \mu_h \Xi_{rh}, \quad (3)$$

cioè le Ξ_{rh} , qualunque sia h , per $r = 1, 2, \dots, n$ saranno proporzionali alle derivate rispetto alle x_r di una funzione ρ_h . Reciprocamente se le Ξ_{rh} , qualunque sia h , per $r = 1, 2, \dots, n$ sono proporzionali alle derivate di una funzione ρ_h rispetto alle x_r dalla prima delle (2) del § 2 si deduce che $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$ sono integrali della equazione proposta (I) e dalle (3) dello stesso paragrafo che questi integrali sono ortogonali fra di loro due a due nella varietà di elemento lineare φ . Possiamo dunque concludere che:

Quando la equazione algebrica caratteristica di una equazione a derivate parziali di 1.º ordine lineare ed omogenea ad n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ in una varietà ad n dimensioni, di cui queste sono le coordinate, non ha radici multiple, le condizioni necessarie e sufficienti perchè questa equazione ammetta un sistema di $n - 1$ integrali ortogonali fra di loro due a due nella detta varietà consistono in ciò che, le quantità Ξ_{rh} essendo quelle sopra definite, le equazioni a differenziali totali:

$$\sum_r \Xi_{rh} dx_r = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n - 1), \quad (III)$$

siano tutte integrabili mediante una sola primitiva $\rho_h = \text{cost.}$ In tal caso $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$ costituiscono il sistema di integrali ortogonali cercati e la integrazione della equazione proposta è ridotta a quella delle $n - 1$ equazioni a differenziali totali (III).

Ad illustrazione di questo teorema conviene far vedere come il verificarsi delle condizioni, che secondo il teorema stesso sono necessarie e sufficienti per la esistenza del sistema di integrali ortogonali non dipende dalla scelta delle variabili indipendenti. A ciò si riesce notando che per le (α^{bis}) e (β^{bis}) le Y_{rs} essendo coefficienti di una forma covariante a quella di coefficienti c_{rs} reciproca della espressione di φ^2 i coefficienti $a \frac{dY(\omega)}{d(Y_{rs} + \omega c_{rs})}$ saranno invece, qualunque sia ω , coefficienti di una forma covariante a quest'ultima così che si avranno le:

$$(a) \left(\frac{dY(\omega)}{d(Y_{pq} + \omega c_{pq})} \right) = a \sum_s \frac{dY(\omega)}{d(Y_{rs} + \omega c_{rs})} x_r^{(p)} x_s^{(q)},$$

dalle quali, dalle (3') del § 2 nonchè dalle (2) di questo si traggono le:

$$(\Xi_{ph}) = \sum_r \Xi_{rh} x_r^{(p)}, \quad (4)$$

che dimostrano appunto ciò, che sopra si è asserito.

Nelle (4) si possono anche comprendere le prime delle (α) del § 1, purché ad h si diano i valori da 1 fino ad n , e si ponga $\Xi_{rn} = X_r$. Vediamo così che le quantità Ξ_{rh} sono tutte cogredienti fra di loro. Se si pone poi:

$$H_{rh} = \sum_s c_{rs} \Xi_{sh}, \quad (5)$$

così che per la (3) del § 1 si abbia $H_{rn} = Y_r$, si ottengono facilmente le:

$$(H_{ph}) = \sum_r H_{rh} u_r^{(p)}, \quad (4')$$

che comprendono le prime delle (α^{bis}) del § 1 e ci dicono che le H_{rh} sono tutte cogredienti fra di loro e controgredienti alle Ξ_{rh} .

Alle (3) del § 2 si può anche dare la forma:

$$\sum_{rs} a_{rs} H_{rh} H_{sk} = 0,$$

le quali valgono per h e k differenti fra loro e scelti fra gli indici 1, 2, ... n . Se si usa il linguaggio geometrico queste equazioni ci dicono che le n linee di equazioni:

$$\frac{dx_1}{H_{1h}} = \frac{dx_2}{H_{2h}} = \dots = \frac{dx_n}{H_{nh}} \quad (h = 1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

sono ortogonali fra di loro due a due nello spazio di elemento lineare φ . In linguaggio geometrico si può quindi dire che le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di $n - 1$ integrali della (I) ortogonali fra di loro due a due nella varietà di elemento lineare φ consistono in ciò che le linee di equazioni (6) per $h = 1, 2, \dots, n - 1$ siano le normali ad $n - 1$ sistemi di superficie. Queste condizioni sono suscettibili di espressioni analitiche differenti da quelle, che si dedurrebbero direttamente dal teorema sopra dimostrato applicando i noti criteri del Calcolo Differenziale sulla integrabilità delle equazioni a differenziali totali mediante una sola primitiva ed è della ricerca di queste espressioni che noi dobbiamo ora occuparci.

Per le (5) le equazioni (3) del § 2 si possono mettere sotto la forma:

$$\sum_r H_{rh} \Xi_{rk} = 0, \quad (7)$$

dalle quali se il sistema di integrali ortogonali esiste si ha per le (3):

$$\sum_r H_{rh} \rho_k^{(r)} = 0,$$

per k differente da h . In questa ipotesi dunque gli integrali $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{h-1}, \rho_{h+1}, \dots, \rho_{n-1}$ soddisfanno in pari tempo alla proposta (I) e alla:

$$\sum_r H_{rh} \psi^{(r)} = 0, \quad (I_h)$$

e quindi anche alla:

$$\sum_{rs} (Y_s H_{rh}^{(s)} - H_{sh} Y_r^{(s)}) \psi^{(r)} = 0,$$

che ne è una conseguenza, così che sono identicamente soddisfatte le equazioni:

$$\sum_{rs} (Y_s H_{rh}^{(s)} - H_{sh} Y_r^{(s)}) \Xi_{rk} = 0, \quad (\Omega_{hk})$$

per h e k differenti fra loro e presi del resto comunque tra gli indici $1, 2, \dots, n-1$.

Sempre nella stessa ipotesi le equazioni (I_h) ed (I_k) , k essendo differente da h , sono soddisfatte da $\psi = \rho_i$, purchè i sia differente da h e k cosicchè sono pure identicamente soddisfatte le equazioni:

$$\sum_{rs} (H_{sh} H_{rk}^{(s)} - H_{sk} H_{rh}^{(s)}) \Xi_{ri} = 0, \quad (\Omega_{hki})$$

h, k, i essendo differenti fra loro ma del resto presi comunque tra gli indici $1, 2, \dots, n-1$.

Supponiamo ora che le equazioni (Ω_{hk}) ed (Ω_{hki}) siano identicamente soddisfatte. Dalle (7), le quali colle convenzioni fatte sopra, valgono anche per h o k eguale ad n , si deduce che il sistema di $n-2$ equazioni algebriche lineari, che si traggono dalla:

$$\sum_r^n \Xi_{rh} z_r = 0,$$

dando a k tutti i valori da 1 ad $n-1$, eccettuato uno speciale valore h , ammette i due sistemi di soluzioni indipendenti $z_r = Y_r, z_r = H_{rh}$ e poichè le (Ω_{hk}) ci dicono che esso ammette anche il sistema $z_r = \sum_s (Y_s H_{rh}^{(s)} - H_{sh} Y_r^{(s)})$, questo dovrà essere funzione lineare di quelli, cioè dovrà aversi:

$$\sum_s (Y_s H_{rh}^{(s)} - H_{sh} Y_r^{(s)}) = \lambda_h Y_r + \mu_h H_{rh}, \quad (8)$$

λ_h e μ_h essendo coefficienti, che sarebbe facile determinare. Analogamente dalle (Ω_{hki}) si traggono le:

$$\sum_s (H_{sh} H_{rk}^{(s)} - H_{sk} H_{rh}^{(s)}) = \lambda_{hk} Y_r + \mu_{hk} H_{rh} - \mu_{kh} H_{rk}. \quad (9)$$

Le equazioni (8) e (9) ci dicono che il sistema di $n-1$ equazioni lineari ed omogenee a derivate parziali di 1.º ordine, il quale risulta dalla (I) e di tutte le (I_h) eccettuata quella, che corrisponde ad un determinato valore i di h , è completo ed ammette quindi un integrale ρ_i , per cui si avrà:

$$\sum_r H_{rh} \rho_i^{(r)} = 0,$$

per $h = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$. E poichè le (7) ci dicono che per gli stessi valori di h il sistema di $n-1$ equazioni algebriche:

$$\sum_1^n H_{rh} z_r = 0,$$

è soddisfatto anche da $z_r = \Xi_{ri}$ converrà concludere che è:

$$\rho_i^{(r)} = \mu_i \Xi_{ri},$$

e quindi per il teorema dimostrato in questo paragrafo che la equazione (I) ammette un sistema di $n-1$ integrali ortogonali nella varietà di elemento lineare φ , i quali sono precisamente $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$.

Possiamo dunque concludere che:

Le condizioni necessarie e sufficienti perchè nel caso, che consideriamo, esista un sistema di $n-1$ integrali della (I) ortogonali fra di loro due a due nella varietà di elemento lineare φ analiticamente si traducono nell'essere soddisfatte identicamente le equazioni (Ω_{hk}) ed (Ω_{hki}) .

Ci occuperemo ora successivamente di trasformare questi sistemi di equazioni.

Le (2') e (3) del § 2 combinate danno le:

$$\sum_{rs} Y_{rs} \Xi_{rh} \Xi_{sk} = 0, \quad (10)$$

le quali per le (5) dello stesso paragrafo e per le (5) di questo si possono anche mettere sotto la forma:

$$\sum_{rs} X_{rs} H_{rh} H_{sk} = 0, \quad (10')$$

e che valgono per h e k differenti fra loro presi tra gli indici $1, 2, \dots, n-1$.

Le seconde tra le (2) del § 2 si possono poi per le (5) di questo mettere sotto la forma:

$$\omega_h H_{sh} = -\Xi_{0h} Y_s - \sum_r Y_{rs} \Xi_{rh}. \quad (11)$$

Ciò premesso notiamo che per le (5) si ha:

$$\sum_s H_{sh} Y_r^{(s)} = \sum_p \Xi_{ph} \sum_s c_{sp} Y_r^{(s)},$$

e per le (4) del § 2 e le (11) di questo:

$$\begin{aligned} \sum_s H_{sh} Y_r^{(s)} &= \sum_p \Xi_{ph} Y_{pr} - \sum_p \Xi_{ph} \sum_s c_{rs} Y_p^{(s)} + \sum_p \Xi_{ph} \sum_s c_{pr}^{(s)} Y_s = \\ &= -\omega_h H_{rh} - \Xi_{0h} Y_r - \sum_p \Xi_{ph} \sum_s c_{sr} Y_p^{(s)} + \sum_p \Xi_{ph} \sum_s c_{pr}^{(s)} Y_s, \end{aligned}$$

e da queste tenendo conto delle (7):

$$\sum_{rs} Y_r^{(s)} H_{sh} \Xi_{rk} = -\sum_{rs} Y_r^{(s)} \Xi_{rh} H_{sk} + \sum_p Y_p \sum_s c_{rs}^{(p)} \Xi_{rh} \Xi_{sk}.$$

Per le (3) del § 2 essendo:

$$\sum_{rs} c_{rs}^{(p)} \Xi_{rh} \Xi_{sh} = - \sum_r H_{rh} \Xi_{rk}^{(p)} - \sum_r H_{rk} \Xi_{rh}^{(p)},$$

abbiamo ancora:

$$\sum_{rs} Y_r^{(s)} H_{sh} \Xi_{rh} = - \sum_{rs} Y_r^{(s)} \Xi_{rh} H_{sh} - \sum_{rs} Y_s (H_{rh} \Xi_{rk}^{(s)} + H_{rk} \Xi_{rh}^{(s)}),$$

e in fine, tenendo conto ancora delle (7):

$$\sum_{rs} (Y_s H_{rh}^{(s)} - H_{sh} Y_r^{(s)}) \Xi_{rh} = - \sum_{rs} (Y_s H_{rk}^{(s)} - H_{sh} Y_r^{(s)}) \Xi_{rh}. \quad (12)$$

Dalla (7) si trae pure facilmente la:

$$\sum_{rs} (Y_s H_{rh}^{(s)} - H_{sh} Y_r^{(s)}) \Xi_{rh} = \sum_{rs} Y_r H_{sh} (\Xi_{rk}^{(s)} - \Xi_{sk}^{(r)}). \quad (13)$$

Ma per le (13) si hanno le:

$$\begin{aligned} \omega_h \sum_{rs} Y_r H_{sh} (\Xi_{rk}^{(s)} - \Xi_{sk}^{(r)}) &= - \sum_{qrs} Y_r Y_{qs} \Xi_{qh} (\Xi_{rk}^{(s)} - \Xi_{sk}^{(r)}) = \\ &= \sum_{qrs} Y_{qs} Y_r^{(s)} \Xi_{qh} \Xi_{rh} + \sum_q Y_q \sum_{rs} Y_{rs} \Xi_{rh} \Xi_{sk}^{(q)}, \end{aligned}$$

dalle quali facendo uso delle (10) derivate rispetto ad x_q e poi di nuovo delle (11), cambiatovi h in k , e dalle (12) si traggono le:

$$(\omega_k - \omega_h) \sum_{rs} Y_r H_{sh} (\Xi_{rk}^{(s)} - \Xi_{sk}^{(r)}) = \sum_{rs} Y'_{rs} \Xi_{rh} \Xi_{sh}, \quad (14)$$

posto:

$$2 Y'_{rs} = \sum_i (Y_{is} Y_r^{(i)} + Y_{ir} Y_s^{(i)} - Y_{rs}^{(i)} Y_i). \quad (15)$$

Per le (13) e (14) alle equazioni (Ω_{hk}) può dunque darsi la forma:

$$\sum_{rs} Y'_{rs} \Xi_{rh} \Xi_{sh} = 0, \quad (\Omega'_{hk})$$

in cui h e k sono due indici differenti scelti tra i numeri $1, 2, \dots, n-1$. È da notare che i coefficienti Y'_{rs} si compongono coi coefficienti Y_r ed Y_{rs} , come questi ultimi coi coefficienti Y_r e c_{rs} e poichè, come risulta dal § 1, gli Y_{rs} sono coefficienti di una forma covariante a quella di coefficienti c_{rs} , lo stesso sarà degli Y'_{rs} cioè sarà:

$$(Y'_{pq}) = \sum_{rs} Y'_{rs} u_p^{(r)} u_q^{(s)}.$$

Queste combinate colle (4) ci dicono che le espressioni, che si trovano al primo membro delle (Ω'_{hk}) , sono invariabili.

Alle (Ω_{hk}) può darsi ancora un'altra forma, che potrebbe dirsi reciproca della (Ω'_{hk}) , perchè è analoga a questa, ma contiene invece delle quantità Ξ_{rh} le controvarianti H_{rh} . Per far ciò basta nelle (Ω'_{hk}) , sostituire alle Ξ_{rh} i loro

valori tolti dalle (5). Esse si cambiano allora nella:

$$\sum_{rs} X'_{rs} H_{rh} H_{sh} = 0, \quad (\Omega''_{hk})$$

essendo:

$$X'_{rs} = \sum_{pq} a_{pr} a_{qs} Y'_{pq}. \quad (16)$$

Anche le espressioni, che si trovano ai primi membri delle (Ω''_{hk}) sono invariabili e se si fa uso delle (1) e (5) del § 2 si trovano dopo alcune riduzioni per i coefficienti X'_{rs} le espressioni:

$$X'_{rs} = 2 \sum_{pq} c_{pq} X_{pr} X_{qs} - \frac{1}{2} \sum_p (X_{pr} Y_p^{(s)} + X_{ps} Y_p^{(r)} + X_{rs}^{(p)} Y_p). \quad (17)$$

Le equazioni (Ω_{hk}) , come si deduce dalle (12), sono in numero di $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ distinte e in questo numero appaiono appunto quando sono messe sotto le forme (Ω'_{hk}) od (Ω''_{hk}) .

Passando ora alle equazioni (Ω_{hki}) cominceremo dal notare che dalle (7) si ha:

$$\sum_{rs} (H_{sh} H_{rk}^{(s)} - H_{sk} H_{rh}^{(s)}) \Xi_{ri} = \sum_{rs} H_{rh} H_{sk} (\Xi_{ri}^{(s)} - \Xi_{si}^{(r)}). \quad (18)$$

Notiamo ancora che dalle (5) e (1) si ha per un noto teorema sui determinanti:

$$H_{rh} = \sum_k Y_k \sum_s \frac{da}{da_{sr}} \frac{dY(\omega_h)}{d(Y_{sk} + \omega_h c_{sk})} = \sum_k Y_k \partial_{rk},$$

indicando con ∂_{rk} il complemento algebrico di d_{rk} nel determinante, i cui elementi sono

$$d_{rk} = \sum_l a_{rl} Y_{kl} + \varepsilon \omega_h,$$

essendo $\varepsilon = 1$ per $r = k$, $\varepsilon = 0$ in ogni altro caso. Si hanno dunque anche per le (3) del § 1 e applicando di nuovo l'accennato teorema le:

$$H_{rh} = \frac{1}{a} \sum_i X_i \sum_k \frac{da}{da_{ik}} \partial_{rk} = \frac{1}{a} \sum_i X_i \frac{dX(\omega_h)}{d(X_{ir} + \omega_h a_{ir})}, \quad (19)$$

posto:

$$X(\omega) = \sum \pm (X_{11} + \omega a_{11})(X_{22} + \omega a_{22}) \cdots (X_{nn} + \omega a_{nn}).$$

Se si pone ancora:

$$H_{0h} = -\frac{1}{a} X(\omega_h),$$

le (19) e la (e_i) ci danno le:

$$\left. \begin{aligned} \sum_r X_r H_{rh} &= 0 \\ \omega_h \Xi_{sh} &= -H_{0h} X_s - \sum_r X_{rs} H_{rh}, \end{aligned} \right\} \quad (11')$$

le quali non sono che le (11) poste sotto forma reciproca.

Deriviamo ora una qualunque delle (10') rispetto ad x_q , moltiplichiamola poi per H_{qi} , e sommiamo rispetto a q da 1 ad n . Si trova così:

$$- \sum_{rsq} X_{rs}^{(q)} H_{rh} H_{sk} H_{qi} = \sum_{rsq} (X_{rs} H_{sk} H_{qi} H_{rh}^{(q)} + X_{rs} H_{rh} H_{qi} H_{sk}^{(q)}),$$

e nel secondo membro per $\sum_s X_{rs} H_{sk}$ e $\sum_r X_{rs} H_{rh}$ ponendo i valori dati dalle (11'):

$$\begin{aligned} - \sum_{rsq} X_{rs}^{(q)} H_{rh} H_{sk} H_{qi} &= \omega_k \sum_{rq} \Xi_{rk}^{(q)} H_{qi} H_{rh} + \omega_h \sum_{rq} \Xi_{rh}^{(q)} H_{qi} H_{rk} \\ &\quad + H_{ok} \sum_{rq} X_r^{(q)} H_{qi} H_{rh} + H_{oh} \sum_{rq} X_r^{(q)} H_{qi} H_{rk}, \end{aligned}$$

e da questa sottraendo quelle, che se ne ottengono scambiando successivamente i con h e k :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{rsq} (X_{qr}^{(s)} + X_{qs}^{(r)} - X_{rs}^{(q)}) H_{rh} H_{sk} H_{qi} &= \omega_h \sum_{rq} H_{qi} H_{rk} (\Xi_{rh}^{(q)} - \Xi_{rk}^{(r)}) \\ &\quad + \omega_k \sum_{rq} H_{qi} H_{rh} (\Xi_{rk}^{(q)} - \Xi_{rk}^{(r)}) - \omega_i \sum_{qr} H_{qh} H_{rk} (\Xi_{ri}^{(q)} + \Xi_{qi}^{(r)}) \\ &\quad + H_{oh} \sum_{rq} H_{qi} H_{rk} (X_r^{(q)} - X_q^{(r)}) + H_{ok} \sum_{rq} H_{qi} H_{rh} (X_r^{(q)} - X_q^{(r)}) \\ &\quad - H_{oi} \sum_{rq} H_{rh} H_{qk} (X_r^{(q)} + X_q^{(r)}). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Osservando poi che facendo uso delle $\Xi_{qi} = \sum_s a_{sq} H_{si}$ tratte dalle (5) si trova:

$$\begin{aligned} \sum_{qr} H_{qh} H_{rk} (\Xi_{qi}^{(r)} + \Xi_{ri}^{(q)}) &= 2 \sum_{qrs} a_{qr,s} H_{si} H_{qh} H_{rk} + \sum_{qrs} a_{qr}^{(s)} H_{si} H_{qh} H_{rk} \\ &\quad - \sum_{rs} H_{si} (H_{rk} \Xi_{sh}^{(r)} + H_{rh} \Xi_{sk}^{(r)}), \end{aligned}$$

ovvero, avendosi dalle (7):

$$\begin{aligned} \sum_{qr} a_{rq}^{(s)} H_{qh} H_{rk} &= \sum_q (H_{qh} \Xi_{qk}^{(s)} + H_{qk} H_{qh}^{(s)}), \\ \sum_{qr} H_{qh} H_{rk} (\Xi_{qi}^{(r)} + \Xi_{ri}^{(q)}) &= 2 \sum_{qrs} a_{rq,s} H_{rk} H_{si} H_{qh} + \sum_{qr} H_{qh} H_{ri} (\Xi_{rk}^{(r)} - \Xi_{rk}^{(q)}) \\ &\quad + \sum_{qr} H_{qk} H_{ri} (\Xi_{qh}^{(r)} - \Xi_{qh}^{(q)}), \end{aligned}$$

e che quindi per le (11') essendo:

$$\omega_i H_{si} = \omega_i \sum_p c_{ps} H_{pi} = -H_{oi} Y_s - \sum_{pt} c_{ps} X_{pt} H_{ti},$$

si ha:

$$\begin{aligned} \omega_i \sum_{qr} H_{qh} H_{rk} (\Xi_{qi}^{(r)} + \Xi_{ri}^{(q)}) &= -2 H_{oi} \sum_{qrs} a_{rs,q} Y_s H_{qh} H_{rk} \\ &\quad - 2 \sum_{pqrst} c_{pt} a_{rs,t} X_{pq} H_{rh} H_{sk} H_{qi} + \\ &\quad + \omega_i \sum_{qr} \{ H_{qi} H_{rh} (\Xi_{rk}^{(q)} - \Xi_{rk}^{(r)}) + H_{qi} H_{rk} (\Xi_{rh}^{(q)} - \Xi_{rh}^{(r)}) \}, \end{aligned}$$

tenuto conto anche delle (10') e posto:

$$X_{rs,q} = X_{rq}^{(s)} + X_{sq}^{(r)} - X_{rs}^{(q)} - 2 \sum_{pt} c_{pt} a_{rs,t} X_{pq}, \quad (21)$$

si può dare alle (20) la forma:

$$(\omega_k - \omega_i) \sum_{qr} H_{qi} H_{rh} (\Xi_{rk}^{(q)} - \Xi_{rk}^{(r)}) + (\omega_h - \omega_i) \sum_{qr} H_{qi} H_{rh} (\Xi_{rh}^{(q)} - \Xi_{rh}^{(r)}) = \\ \sum_{rsq} X_{rs,q} H_{rh} H_{sh} H_{qi} + \sum_{qr} (H_{oh} H_{rk} + H_{oh} H_{rh}) H_{qi} (X_q^{(r)} - X_r^{(q)}).$$

Da queste e dalle (18) è facile concludere che il sistema di equazioni (Ω_{hki}) equivale al sistema:

$$\sum_{rsq} X_{rs,q} H_{rh} H_{sh} H_{qi} + \sum_{qr} (H_{oh} H_{rk} + H_{oh} H_{rh}) H_{qi} (X_q^{(r)} - X_r^{(q)}) = 0. \quad (\Omega'_{hki})$$

Il loro numero è $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$.

Sarebbe facile dimostrare che le espressioni:

$$\sum_{rsq} X_{rs,q} H_{rh} H_{sh} H_{qi}, \quad \sum_{rq} (X_q^{(r)} - X_r^{(q)}) H_{rk} H_{qi},$$

le quali si trovano al primo membro delle (Ω'_{hki}) , sono invariabili, come pure il dare a queste la forma reciproca, ma su ciò non ci tratteremo.

§ 4.

Risoluzione del problema dei sistemi di integrali ortogonali nel caso generale.

Prima di passare a trattare del problema propostoci nel paragrafo precedente nel caso più generale, occupiamoci ancora di un caso speciale, cioè di quello, in cui tutte le radici della equazione algebrica caratteristica sono eguali fra di loro. In tal caso, se per ω_h si pone il valor comune di queste radici, le equazioni (2) del § 2 si riducono a due soltanto indipendenti fra di loro e, non tenendo conto della prima, la quale è sempre soddisfatta per $\Xi_{rh} = \rho_h^{(r)}$, se ρ_h è un integrale della (I), ad una sola, la quale serve a determinare la Ξ_{oh} lasciando arbitrarie le Ξ_{rh} ($r = 1, 2, \dots, n$). In questo caso dunque secondo il teorema del § 2 per ogni integrale ρ_i della (I) ne esistono altri $n-2$, che gli sono ortogonali nella varietà di elemento lineare φ . Siano questi $\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_{n-1}$. Esisterà un sistema di $n-2$ integrali $\chi_1, \chi_3, \dots, \chi_{n-1}$ ortogonali a ρ_2 nella varietà di elemento lineare φ , per cui cioè sarà:

$$\sum_{rs} c_{rs} \rho_2^{(r)} \chi_h^{(s)} = 0 \quad (h = 1, 3, 4, \dots, n-1),$$

e avendosi:

$$\chi_h^{(s)} = \sum_1^{n-1} \frac{d\chi_h}{d\rho_q} \rho_q^{(s)}$$

$$\sum_1^{n-1} \frac{d\chi_h}{d\rho_q} \sum_{rs} c_{rs} \rho_2^{(r)} \rho_q^{(s)} = 0.$$

Poichè è $\sum_{rs} c_{rs} \rho_2^{(r)} \rho_1^{(s)}$

$$\sum_2^{n-1} \frac{d\chi_h}{d\rho_q} \sum_{rs} c_{rs} \rho_2^{(r)} \rho_q^{(s)} = 0 \quad (h = 1, 3, \dots, n-1).$$

Se ora invece di $\chi_1, \chi_3, \dots, \chi_{n-1}$ prendiamo $\rho_1, \chi'_3, \chi'_4, \dots, \chi'_{n-1}$, con χ'_h indicando ciò, che diviene χ_h ponendovi per ρ_1 una costante, noi abbiamo per la precedente:

$$\sum_{rs} c_{rs} \rho_2^{(r)} \chi_h^{(s)} = \sum_2^{n-1} \frac{d\chi_h}{d\rho_q} \sum_{rs} c_{rs} \rho_2^{(r)} \rho_q^{(s)} = 0 \quad (h = 3, 4, \dots, n-1).$$

Da queste e dall'essere $\sum_{rs} c_{rs} \rho_2^{(r)} \rho_1^{(s)} = 0$, concludiamo che se in luogo delle $\rho_3, \rho_4, \dots, \rho_{n-1}$, che si avevano, si prendono le $\chi'_3, \chi'_4, \dots, \chi'_{n-1}$, che ne sono funzioni, seguitando però a denotarle come prima, il nuovo sistema $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$ è tale che non soltanto ρ_1 e ρ_2 sono ortogonali fra di loro, ma $\rho_3, \rho_4, \dots, \rho_{n-1}$ lo sono ad amendue. Si dimostra egualmente come si possano scegliere le $\rho_4, \rho_5, \dots, \rho_{n-1}$ in modo che siano ortogonali non soltanto a ρ_1 e ρ_2 , ma anche a ρ_3 e proseguendo così si conclude che:

Quando la equazione algebrica caratteristica di una equazione lineare ed omogenea a derivate parziali di 1.º ordine in una varietà ad n dimensioni ha tutte le radici eguali, per ogni suo integrale se ne possono sempre ed in infiniti modi scegliere altri $n-2$, che con essa costituiscano un sistema di integrali ortogonali in quella varietà.

Nel caso più generale le radici della equazione algebrica caratteristica si dividono in tanti gruppi $G_1, G_2, \dots$ il gruppo G_h in generale contenendo tutte le radici, che hanno uno stesso valore ω_h e il cui numero indicheremo con m_h . Allora il sistema di equazioni (2) del § 2 ammette m_h sistemi di soluzioni indipendenti, che indicheremo con $\Xi_{rh_1}, \Xi_{rh_2}, \dots$ e se esiste il sistema di $n-1$ integrali della (I) ortogonali nella varietà di elemento lineare φ , le derivate rispetto alle x_r di uno qualunque di essi dovendo soddisfare ad un sistema di equazioni (2), nel quale ω_h sia una radice della equazione algebrica caratteristica, gli integrali stessi si divideranno in tanti gruppi corrispondenti ai gruppi

G_h delle radici di questa e contenenti rispettivamente m_h integrali. Posto ora:

$$H_{rh_i} = \sum_s c_{rs} \Xi_{sh_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m_h, \quad r = 1, 2, \dots, n),$$

consideriamo il sistema di m_h equazioni:

$$\sum_r H_{rh_i} \psi^r = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m_h), \quad (I_h)$$

e sia ρ_h un integrale del sistema ortogonale corrispondente ad un gruppo G_h differente da G_k . Per quanto si è detto le $\rho_k^{(r)}$ soddisfaranno al sistema di equazioni (2) del § 2, in cui sia cambiato h in k e per le (3) dello stesso paragrafo soddisfaranno anche alle equazioni (I_h) . Il sistema di $m_h + 1$ equazioni, che risulta della (I) e delle (I_h) ammette dunque $n - m_h - 1$ integrali indipendenti e quindi è completo. In egual modo si vede che è completo il sistema di equazioni, che risulta della (I) e di due gruppi (I_h) , (I_k) corrispondenti a due radici non eguali ω_h ed ω_k della equazione algebrica caratteristica.

Reciprocamente supponiamo che siano completi tutti i sistemi, che risultano della (I) e di uno qualunque dei sistemi (I_h) e così pure quelli, che risultano della (I) e di due sistemi (I_h) , (I_k) . Sarà allora completo anche il sistema di $n - m_h$ equazioni, che risulta della proposta e di tutti i gruppi (I_k) , eccettuato uno speciale (I_h) . Se indichiamo con ρ_{h_i} ($i = 1, 2, \dots, m_h$) gli integrali di questo sistema di equazioni, le $\rho_{h_i}^{(r)}$ soddisfaranno al sistema di $n - m_h$ equazioni algebriche lineari ed omogenee ad n incognite, che risultano della:

$$\sum_r Y_r l_r = 0,$$

e dei gruppi della forma:

$$\sum_r H_{rk_i} l_r = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m_h),$$

con esclusione di quello, che corrisponde alla radice ω_h . Per la prima delle (2) e per le (3) del § 2 alle stesse equazioni soddisfanno anche gli m_h sistemi Ξ_{h_i} ($i = 1, 2, \dots, m_h$) indipendenti fra di loro, dal che si deduce che le $\rho_{h_i}^{(r)}$ sono funzioni lineari delle Ξ_{rh_i} e quindi soddisfanno alle (2) del § 2 poste invece delle Ξ_{rh} ($r = 1, 2, \dots, n$), purchè a Ξ_{oh} si dia un conveniente valore. Abbiamo così per ogni gruppo G_h di m_h radici eguali ad ω_h della equazione algebrica caratteristica dimostrata la esistenza di un gruppo g_h di m_h integrali ρ_{h_i} ($i = 1, 2, \dots, m_h$) tali che le $\rho_{h_i}^{(r)}$ soddisfanno alle equazioni (2) del § 2. Le (3) dello stesso paragrafo dimostrano che due integrali ρ_h, ρ_k di due differenti gruppi g_h, g_k sono ortogonali fra di loro nella varietà di elemento lineare φ . Però pel teorema dimostrato in quel paragrafo ognuno di questi integrali

della (I), per esempio ρ_{h_1} , ne ammette altri $n - 2$, che gli sono ortogonali ed è facile vedere come per questi si possano prendere gli $n - m_h - 1$ integrali dei gruppi g_k corrispondenti a gruppi di radici eguali, diversi da G_h , più $m_h - 1$ funzioni dei ρ_{h_i} ($i = 2, 3, \dots m_h$), che si possono quindi sostituire a questi ultimi. Successivamente si possono in egual modo scegliere gli integrali ρ_{h_i} ($i = 3, 4, \dots m_h$) in modo che siano ortogonali a ρ_{h_1} e ρ_{h_2} e proseguendo collo stesso metodo scegliere gli integrali del gruppo g_h e così quelli di qualunque altro gruppo in modo che siano ortogonali fra di loro due a due. Dopo aver fatto ciò avremo costruito un sistema di $n - 1$ integrali della (I) ortogonali fra di loro due a due nella varietà di elemento lineare φ . Possiamo dunque concludere che:

Le condizioni necessarie e sufficienti perchè la equazione (I) nella varietà di elemento lineare φ ammetta un sistema di $n - 1$ integrali ortogonali fra di loro due a due consistono in ciò che per ogni valore ω_i della equazione algebrica caratteristica multipla del grado m_h determinati m_h sistemi indipendenti di soluzioni Ξ_{rh_i} ($i = 1, 2, \dots m_h$) delle equazioni (2) del § 2 e posto $\Pi_{rh_i} = \sum_s c_{rs} \Xi_{sh_i}$.

1.° Siano completi i sistemi di equazioni che risultano della (I) e di uno qualunque dei sistemi:

$$\sum_r H_{rh_i} \psi^{(r)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots m_h);$$

2.° Siano completi i sistemi di equazioni, che risultano della (I) e di due qualunque di questi ultimi sistemi.

Analiticamente queste condizioni si esprimono, come si dimostra con metodo analogo a quello tenuto nel § 3, mediante i due sistemi di equazioni:

$$\sum_{rs} (Y_s H_{ih_i}^{(s)} - H_{sh_i} Y_r^{(s)}) \Xi_{rk_i} = 0 \quad (\Omega_{hk})$$

$$\sum_{rs} (H_{sh_i} H_{rk_j}^{(s)} - H_{sk_j} H_{rh_i}^{(s)}) \Xi_{rl_g} = 0, \quad (\Omega_{hkl})$$

che si possono anche trasformare nei:

$$\sum_{rs} Y_r H_{sh_i} (\Xi_{rk_j}^{(s)} - \Xi_{sk_i}^{(r)}) = 0$$

$$\sum_{rs} H_{rh_i} H_{sk_j} (\Xi_{rl_g}^{(s)} - \Xi_{sl_g}^{(r)}) = 0,$$

e nei quali h, k, l debbono essere differenti fra loro. Sempre analogamente a quanto si è fatto nel § 3 si può vedere che il primo membro di una (Ω_{hk}) cambia soltanto di segno, scambiandovi h_i con k_j . Le equazioni del sistema (Ω_{hkl}) si dividono così in tanti gruppi quante sono le combinazioni due a due

dei gruppi di radici eguali della equazione algebrica caratteristica, quello corrispondente alla combinazione dei due gruppi G_h e G_k contenendone $m_h m_k$. Quelle del sistema (Ω_{hkl}) si dividono invece in tanti gruppi quante sono le combinazioni di quei gruppi tre a tre, quello corrispondente alla combinazione $G_h G_k G_l$ contenendone $3 m_h m_k m_l$.

Possiamo ancora aggiungere che:

Quando le condizioni sopra enunciate sono verificate gli integrali del sistema ortogonale non sono in generale completamente determinati. Essi si dividono in tanti gruppi g_h corrispondenti ai gruppi di radici eguali della equazione algebrica caratteristica, il gruppo g_h corrispondente al gruppo di tutte le radici eguali ad ω_h in numero di m_h risultando di m_h integrali indipendenti del sistema di equazioni, che risulta della proposta e di tutti i gruppi della forma $\sum_r \Pi_{r,k_j} \psi^{(r)} = 0$, in cui sia k differente da h . Entro a ciascun gruppo g_h , se è $m_h > 1$, la scelta degli integrali è possibile in infiniti modi.

Così il sistema di integrali ortogonali non è unico e determinato se non nel caso, in cui la equazione algebrica caratteristica non ha radici multiple, nel qual caso per la sua determinazione si applica il teorema del § 3.

§ 5.

Sul problema dei sistemi ortogonali nelle varietà ad n dimensioni.

Se si suppone che le quantità X_r siano proporzionali alle derivate $\rho^{(r)}$ di una funzione ρ , il problema, che trattiamo, si riduce a quello di determinare le condizioni necessarie e sufficienti perchè nella varietà *qualunque* di elemento lineare φ il sistema di luoghi di equazioni $\rho = \text{costante}$ appartenga ad un sistema *qualsiasi* ortogonale e, quando queste condizioni siano verificate, di trovare i parametri degli $n - 1$ sistemi di luoghi, che col proposto costituiscono il detto sistema; problema già risoluto dal DARBOUX per n qualunque, ma limitatamente al caso in cui la espressione di φ^2 sia $\sum_1^n dx_r^2$.

Se per le quantità X_r si prendono precisamente le $\rho^{(r)}$, le Y_r ed X_{rs} , coincidono colle espressioni, per cui nella mia Memoria: *Sui parametri e gli invarianti delle forme differenziali quadratiche* adottai i simboli ρ_r e ρ_{rs} . Conserverò qui le stesse notazioni così che avremo:

$$\rho_r = \sum_s c_{rs} \rho^{(s)} \quad (1)$$

$$\rho_{rs} = \rho^{(rs)} - \sum_i a_{rs,i} \rho_i, \quad (2)$$

e la equazione algebrica caratteristica presa sotto la forma (e₁) sarà:

$$\begin{vmatrix} 0 & \rho^{(1)} & \rho^{(2)} \dots & \rho^{(n)} \\ \rho^{(1)} & \rho_{11} + \omega a_{11} & \rho_{12} + \omega a_{12} \dots & \rho_{1n} + \omega a_{1n} \\ \rho^{(2)} & \rho_{21} + \omega a_{21} & \rho_{22} + \omega a_{22} \dots & \rho_{2n} + \omega a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{(n)} & \rho_{n1} + \omega a_{n1} & \rho_{n2} + \omega a_{n2} \dots & \rho_{nn} + \omega a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad (P)$$

mentre le equazioni (2) del § 2 diventeranno:

$$\begin{aligned} \sum_r \rho_r \Xi_{rh} &= 0 \\ \rho_s \Xi_{sh} + \sum_r (\rho'_{rs} + \omega_h c_{rs}) \Xi_{rh} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

posto:

$$\rho'_{rs} = \sum_{hk} \rho_{hk} c_{hs} c_{ks}. \quad (4)$$

Notiamo ancora che sempre nel caso, che consideriamo, le equazioni di due gruppi:

$$\sum_r H_{rh_i} \psi^{(r)} = 0 \quad \sum_r H_{rk_j} \psi^{(r)} = 0,$$

corrispondenti secondo il § 4 a due gruppi G_h e G_k di radici della equazione (P), che comprendono tutte quelle eguali rispettivamente ad ω_h ed ω_k , hanno comuni non soltanto gli integrali della:

$$\sum_r \rho_r \psi^{(r)} = 0, \quad (I)$$

appartenenti ai gruppi, che corrispondono agli altri gruppi di radici di (P), ma anche ρ , come si desume dalla prima delle (3), a cui si può dare la forma $\sum_r H_{rh} \rho^{(s)} = 0$, posto al solito:

$$H_{rh} = \sum_s c_{rs} \Xi_{sh}. \quad (5)$$

Esse costituiscono quindi di per sè, cioè senza bisogno di associarsi la (I), un sistema completo e l'enunciato del teorema del § 4 si può in questo caso modificare come segue:

Le condizioni necessarie e sufficienti perchè il sistema di luoghi di equazioni $\rho(x_1, x_2, \dots, x_n) = \rho$ appartenga ad un sistema n^{uplo} ortogonale nella varietà, per cui il quadrato dell'elemento lineare è $\varphi^2 = \sum_{rs} a_{rs} dx_r dx_s$, consistono in ciò che per ogni radice ω_h della equazione (P) multipla del grado m_h determinati m_h sistemi indipendenti Ξ_{rh} , ($i = 1, 2, \dots, m_h$) di soluzioni delle

equazioni (3) e costruiti i sistemi di equazioni:

$$\sum_r H_{r,h} \psi^{(r)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m_h), \quad (I_h)$$

le $H_{r,h}$, essendo date dalle (5), siano completi: 1.° i sistemi di equazioni che risultano dalla $\sum_r \rho_r \psi^{(r)} = 0$ e di uno qualunque dei sistemi (I_h) ; 2.° i sistemi di equazioni, che risultano di due sistemi (I_h) qualunque.

Verificate queste condizioni i parametri dei sistemi di luoghi, che assieme al sistema dato (ρ) costituiscono il sistema n^{uplo} ortogonale nella varietà di elemento lineare φ , non sono in generale completamente determinati. Essi si dividono in tanti gruppi (g_h) corrispondenti ai gruppi di radici della equazione (P) formati con tutte quelle, che hanno uno stesso valore ω_h , ogni gruppo (g_h) contenendone m_h , se questo è il grado di molteplicità di ω_h , e precisamente m_h integrali indipendenti del sistema di $n - m_h$ equazioni, che risulta dalla $\sum_r \rho_r \psi^{(r)} = 0$ e dei sistemi (I_k) corrispondenti a radici della (P) differenti da ω_h , i quali integrali per $m_h > 1$ non sono quindi completamente determinati.

Non occorre riscrivere qui per questo caso speciale le equazioni trovate pel caso generale nel § 4 e che senza alcuna limitazione circa l'equazione (P) esprimono analiticamente le condizioni necessarie e sufficienti sopra enunciate per la esistenza di un sistema n^{uplo} ortogonale, di cui faccia parte (ρ) , nella varietà di elemento lineare φ . Lo faremo soltanto pel caso più comune, in cui la equazione (P) non ha radici multiple e pel quale valgono i risultati del § 3. Dopo alcune riduzioni dalle (1) e (2) si ottengono le:

$$\begin{aligned} Y_p^{(s)} &= \rho_p^{(s)} = \sum_q c_{pq} \rho_{qs} - \sum_{hq} c_{pq} a_{hs} \rho_h \\ X_{rs}^{(p)} &= \rho_{rs}^{(p)} = \rho_{rsp} + \sum_{hq} c_{hq} (a_{rp,q} \rho_{hs} + a_{sp,q} \rho_{hr}), \end{aligned}$$

posto ancora come nella citata Memoria:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{rsp} &= \rho^{(rsp)} - \sum_{hq} c_{hq} (a_{rp,q} \rho_{hs} + a_{sp,q} \rho_{hr} + a_{sr,q} \rho_{hp}) \\ &\quad - \sum_k (a_{rs,k}^{(p)} - \sum_{hq} c_{hq} a_{kp,h} a_{rs,q}) \rho_k. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Si ha per conseguenza dalle (17) del § 3

$$X'_{rs} = -\frac{1}{2} \sum_p \rho_{rsp} \rho_p + \sum_{pq} c_{pq} \rho_{pr} \rho_{qs}.$$

Le (21) del § 3 confrontate colle (6) di questo danno:

$$X_{rs,q} = \rho_{rqs} + \rho_{sqr} - \rho_{rsq}, \quad (7)$$

e queste alla loro volta:

$$2\rho_{sqr} = X_{rs,q} + X_{rq,s}. \quad (8)$$

Siccome nel caso nostro le equazioni (Ω'_{hki}) del § 3, essendo $X_q^{(r)} = X_r^{(q)}$ si riducono alla forma:

$$\sum_{rsq} X_{rs,q} H_{rh} H_{sk} H_{qi} = 0,$$

così le (6), (7) ed (8) ci dicono che le equazioni (Ω_{hk}) ed (Ω_{hki}) si possono in questo caso mettere sotto la forma:

$$\sum_{rsq} \rho_{rsq} \rho_q H_{rh} H_{sk} = 2 \sum_{pqr} c_{pq} \rho_{pr} \rho_{qs} H_{rh} H_{sk} \quad (P_{hk})$$

$$\sum_{rsq} \rho_{rsq} H_{qi} H_{rh} H_{sk} = 0, \quad (P_{hki})$$

nelle quali h, k, i sono tre indici differenti scelti comunque tra i numeri $1, 2, \dots, n-1$.

È facile verificare che i sistemi di equazioni (P_{hk}) e (P_{hki}) coincidono rispettivamente coi sistemi (142) e (145) della Seconda Parte della Memoria del sig. DARBOUX: *Sur la Théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux* nel caso che φ^2 abbia la forma $\sum_1^n dx_i^2$.

Notiamo che le espressioni ρ_{rs}, ρ_{rsq} sono quelle, che a tenore della mia Memoria più volte citata giova considerare rispettivamente invece delle derivate seconde e terze di ρ .

Se si pone:

$$3\alpha_{rsq} = \rho_{rsq} + \rho_{rq s} + \rho_{sq r} \quad (9)$$

$$\beta_{rs,q} = \rho_{rsq} - \rho_{rq s}, \quad (10)$$

si hanno anche le:

$$\beta_{sr,q} = \rho_{rsq} - \rho_{sq r}$$

$$3\rho_{rsq} = 3\alpha_{rsq} + \beta_{rs,q} + \beta_{sr,q},$$

le quali ci dicono che al sistema (P_{hki}) si possono sostituire i due:

$$\sum_{rsq} \alpha_{rsq} H_{rh} H_{sk} H_{qi} = 0 \quad (P'_{hki})$$

$$\sum_{srpq} \alpha_{pr,qs} \rho_p H_{qi} H_{rh} H_{sk} = 0, \quad (P''_{hki})$$

posto:

$$a_{pr,qs} = a'_{\rho q, r} - a'_{\rho s, r} + \sum_{hk} c_{hk} (a_{ps,h} a_{rq,k} - a_{pq,h} a_{rs,k}), \quad (11)$$

poichè è:

$$\beta_{sr,q} = \sum_p a_{rp,qs} \rho_p.$$

Poichè il numero delle equazioni (P_{hki}) indipendenti fra loro è

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$$

e quello delle (P'_{hki}) , come si vede subito, è $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}$ quello delle (P''_{hki}) sarà

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}.$$

Ciò si deduce anche direttamente dall'osservare che esistono le identità:

$$a_{pr,qs} + a_{pq,sr} + a_{ps,qr} = 0.$$

Osservando ancora che il numero delle equazioni (P_{hk}) è $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ e ricordando le cose dimostrate nel § 3 noi possiamo concludere:

Data una funzione ρ delle coordinate $x_1, x_2, \dots, x_n$ di una varietà ad n dimensioni, per cui il quadrato dell'elemento lineare è $\varphi^2 = \sum_{rs} a_{rs} dx_r dx_s$, indicando con a il discriminante di φ^2 , le quantità $\rho_q, \rho_{rs}, a_{rsq}, a_{pr,qs}$ essendo quelle definite dalle equazioni (1) (2) (6) (7) ed (11), posto:

$$X(\omega) = \sum \pm (\rho_{11} + \omega a_{11})(\rho_{22} + \omega a_{22}) \cdots (\rho_{nn} + \omega a_{nn})$$

$$H_{rh} = \frac{1}{a} \sum_i \rho^{(i)} \frac{dX(\omega_h)}{d(\rho_{ir} + \omega_h a_{ir})},$$

dove ω_h è una radice della equazione:

$$\sum_{rs} \frac{dX(\omega)}{d(\rho_{rs} + \omega a_{rs})} \rho^{(r)} \rho^{(s)} = 0,$$

qualora questa non abbia radici multiple, le condizioni necessarie e sufficienti perchè il sistema di luoghi di parametro ρ appartenga ad un sistema n^{uplo} ortogonale nella varietà di elemento lineare φ sono che ρ soddisfi: 1.º ad un sistema di $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ equazioni a derivate parziali di 3.º ordine, il quale risulta dalle (P_{hk}) e dalle (P'_{hki}) ; 2.º ad un sistema di $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}$ equazioni a derivate parziali di 2.º ordine, che sono le (P''_{hki}) .

Verificate queste condizioni le $n-1$ equazioni a differenziali totali:

$$\sum_r \Xi_{rh} dx_r = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n-1),$$

in cui è

$$\Xi_{rh} = \sum_s c_{rs} H_{sh},$$

sono integrabili ciascuna mediante una sola primitiva $\rho_h(x_1, x_2, \dots, x_n) = \rho_h$ e $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$ sono i parametri dei sistemi di luoghi, che con quello di parametro ρ costituiscono un sistema n^{uplo} ortogonale nella varietà di elemento lineare φ .

Le equazioni di 2.° ordine del sistema (P''_{hki}) possono per la natura speciale della varietà ad n dimensioni ridursi ad un numero minore di quello sovra indicato, il che fa vedere come il grado di difficoltà per la esistenza dei sistemi ortogonali in una varietà data non dipenda soltanto dal numero delle dimensioni, ma anche dalla natura di questa. Fermo il numero n , questa difficoltà è la minore possibile se φ^2 può ridursi alla forma $\sum_1^n dx_i^2$, cioè se la varietà è piana od euclidea, poichè allora, come si sa, i coefficienti $a_{rp,qs}$ sono identicamente nulli e il sistema di equazioni di 2.° ordine (P''_{hki}) viene meno del tutto.

Se invece la espressione φ^2 del quadrato dell'elemento lineare della data varietà può dedursi dalla $\sum_1^{n+1} dy_i^2$ ponendo per $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ delle convenienti funzioni di $x_1, x_2, \dots, x_n$ ed anche in un caso più generale (*) i coefficienti $a_{rp,sq}$ prendono la forma $(pq)(rs) - (ps)(rq)$, (rs) essendo gli elementi di un determinante simmetrico di grado n . Le equazioni (P''_{hki}) prendono dunque in questo caso la forma:

$$\sum_{pq}(pq)\rho_p H_{qi} \sum_{rs}(rs)H_{rh} H_{sk} = \sum_{pq}(pq)\rho_p H_{qk} \sum_{rs}(rs)H_{rh} H_{si},$$

ovvero l'altra:

$$\sum_{rs}(rs)H_{rh} H_{sk} = \alpha_h \alpha_k \quad (h \leq k, \quad h, k = 1, 2, \dots, n),$$

posto $\rho_r = H_{rn}$, ed indicando con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ delle quantità arbitrarie. In questo caso adunque le equazioni (P'_{hki}) si riducono ad $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$ distinte.

(*) Veggasi a questo proposito il § 3 della mia Memoria dal titolo: *Principii di una teoria delle forme differenziali quadratiche* nel Tomo XII della Serie 2.^a di questi Annali. *Annali di Matematica*, tomo XV.

§ 6.

Applicazione dei risultati generali al caso di $n = 3$.

Proponiamoci sulla scorta dei risultati ottenuti nei precedenti paragrafi di riconoscere se una equazione:

$$\sum_r^3 Y_r \psi^{(r)} = 0, \quad (I)$$

ammette due integrali ortogonali fra di loro nella varietà, per cui il quadrato dell'elemento lineare è:

$$\varphi^2 = \sum_{r,s}^3 a_{rs} dx_r dx_s.$$

In questo caso se si conviene di considerare come eguali le quantità, i cui indici sono congrui fra loro rispetto al modulo 3 e si pone:

$$H_r(\omega) = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} X_r & X_{r,r+1} + \omega a_{r,r+1} & X_{r,r+2} + \omega a_{r,r+2} \\ X_{r+1} & X_{r+1,r+1} + \omega a_{r+1,r+1} & X_{r+1,r+2} + \omega a_{r+1,r+2} \\ X_{r+2} & X_{r+2,r+1} + \omega a_{r+2,r+1} & X_{r+2,r+2} + \omega a_{r+2,r+2} \end{vmatrix},$$

sostituendo per le X_r le loro espressioni in funzione delle Y_r si trova:

$$H_r(\omega) = \omega^2 Y_r + \omega Y_r \sum_{st} c_{st} X_{st} - \omega \sum_t Y_t \sum_s c_{rs} X_{st} - \frac{1}{a} \frac{dM}{dX_r}, \quad (1)$$

posto:

$$M = \begin{vmatrix} 0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1 & X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_2 & X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_3 & X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{vmatrix} \quad (2)$$

Poichè la equazione algebrica caratteristica sotto la forma (e_1) equivale alla:

$$\sum_r H_r(\omega) X_r = 0,$$

posto:

$$\Lambda = \frac{\sum_{st} X_{st} Y_s Y_t}{\sum_r X_r Y_r}, \quad N = \sum_{st} c_{st} X_{st}, \quad (2')$$

essa si può mettere sotto la forma:

$$\omega^2 + (N - \Lambda)\omega - \frac{M}{a} = 0. \quad (E)$$

Se le radici ω_1 ed ω_2 di questa non sono eguali fra di loro, si ha seguendo la notazione adottata nel caso generale:

$$\Pi_{r,h} = \Pi_r(\omega_h) \quad (h = 1, 2, r = 1, 2, 3),$$

e dalle (1):

$$\Pi_{r,h} = \omega_h^2 Y_r + \omega_h N Y_r - \omega_h \sum_t Y_t \sum_s c_{rs} X_{st} - \frac{1}{a} \frac{dM}{dX_r},$$

e per ω_h^2 sostituendo il valore dato dalla (E):

$$\Pi_{r,h} = \omega_h (\Lambda Y_r - \sum_t Y_t \sum_s c_{sr} X_{st}) + \frac{1}{a} \left(M Y_r - \frac{dM}{dX_r} \right). \quad (3)$$

Da questa poi si traggono le:

$$\Xi_{r,h} = \sum_s a_{rs} \Pi_{sh} = \omega_h (\Lambda X_r - \sum_t X_{rt} Y_t) + \frac{1}{a} \left(M X_r - \sum_s a_{rs} \frac{dM}{dX_s} \right). \quad (3')$$

Per $n = 3$ le equazioni di condizione per la esistenza di due integrali della (I) ortogonali nella varietà di elemento lineare φ già trovate per il caso generale nel § 3 si riducono ad una sola, la quale costituisce il sistema (Ω_{hk}) e i risultati di quel paragrafo, riferendosi alle notazioni già stabilite prendono la forma seguente:

La condizione necessaria e sufficiente perchè la equazione (I) ammetta due integrali ortogonali nella varietà di elemento lineare φ , qualora la equazione algebrica (E) non abbia le radici eguali, è espressa da una equazione a derivate parziali di 2.º ordine rispetto ai coefficienti dell'equazione e del quadrato dell'elemento lineare. Quando questa sia soddisfatta le due equazioni a differenziali totali:

$$\sum_r^3 \Xi_{r,h} dx_r = 0 \quad (h = 1, 2),$$

sono integrabili amendue con una sola primitiva $\rho_h(x_1 x_2 x_3) = \rho_h$ e ρ_1, ρ_2 sono gli integrali ortogonali cercati.

La equazione a derivate parziali sopra accennata è suscettibile di diverse forme, che si hanno dalle (Ω_{hk}) , (Ω'_{hk}) ed (Ω''_{hk}) del § 3 ponendovi per le $\Xi_{r,h}$ od $\Pi_{r,h}$ le espressioni (3') o (3) sopra determinate. Essa è suscettibile anche delle due forme

$$\sum_r \Xi_{r,h} (\Xi_{r+1,h}^{(r+2)} - \Xi_{r+2,h}^{(r+1)}) = 0, \quad (h = 1, 2),$$

che vengono dalla applicazione di un noto teorema del Calcolo differenziale.

Altre forme della stessa equazione si ottengono mediante altre espressioni delle $\Xi_{r,h}$ ed $\Pi_{r,h}$, che si trovano nel modo seguente. Tra le equazioni (11')

del § 3 prendiamo le:

$$\begin{aligned}\sum_r^{r+2} X_t \Pi_{th} &= 0 \\ \sum_r^{r+2} (X_{t, r+1} + \omega_h a_{t, r+1}) \Pi_{th} &= -X_{r+1} \Pi_{0h} \\ \sum_r^{r+2} (X_{t, r+2} + \omega_h a_{t, r+2}) \Pi_{th} &= -X_{r+2} \Pi_{0h}.\end{aligned}$$

Queste risolte rispetto alle Π_{th} danno:

$$\frac{1}{\Pi_{0h}} \Pi_{rh} \Pi_{th} = \omega_h (c_{rt} \sum_u X_u Y_u - Y_r Y_t) - \frac{1}{a} \frac{dM}{dX_{rt}}, \quad (4)$$

dalle quali moltiplicate per a_{st} , sommando poi rispetto a t si traggono le:

$$\frac{1}{\Pi_{0h}} \Pi_{rh} \Xi_{sh} = \omega_h (\varepsilon \sum_u X_u Y_u - Y_r X_s) - \frac{1}{a} \sum_t a_{st} \frac{dM}{dX_{rt}},$$

in cui è $\varepsilon = 1$ per $s \equiv r \pmod{3}$ ed $\varepsilon = 0$ in ogni altro caso. Notando ancora che è:

$$\sum_t a_{st} \frac{dM}{dX_{rt}} = \sum_t Y_t \begin{vmatrix} 0 & 0 & X_{r+1} & X_{r+2} \\ a_{rt} & a_{rs} & X_{r, r+1} & X_{r, r+2} \\ a_{r+1, t} & a_{r+1, s} & X_{r+1, r+1} & X_{r+1, r+2} \\ a_{r+2, t} & a_{r+2, s} & X_{r+2, r+1} & X_{r+2, r+2} \end{vmatrix},$$

che nella sommatoria del secondo membro basta fare $t = s + 1$ e $t = s + 2$, mediante alcune riduzioni, indicando con ω_k la radice della (E) differente da ω_h , si trova:

$$\frac{1}{\Pi_{0h}} \Pi_{rh} \Xi_{sh} = -\varepsilon \omega_k \sum_t X_t Y_t - (\Lambda - \omega_k) Y_r X_s - \sum_t X_t Y_t \sum_u c_{ru} X_{us} \left\{ \begin{aligned} &+ X_s \sum_t c_{rt} P_t + Y_r P_s, \end{aligned} \right. \quad (4')$$

posto:

$$P_s = \sum_t X_{st} Y_t. \quad (5)$$

Se la equazione (E) ha le radici eguali, il loro valore comune annulla, come è stato detto, i minori di 1.^o ordine dei determinanti, che costituiscono il primo membro della equazione stessa presa sotto la forma (e) od (e_1) . Prendendola sotto la forma (e_1) uno stesso valore di ω deve adunque soddisfare alle

tre equazioni, che si hanno dalla:

$$\begin{vmatrix} 0 & X_{r+1} & X_{r+2} \\ X_{r+1} & X_{r+1, r+1} + \omega a_{r+1, r+1} & X_{r+1, r+2} + \omega a_{r+1, r+2} \\ X_{r+2} & X_{r+2, r+1} + \omega a_{r+2, r+1} & X_{r+2, r+2} + \omega a_{r+2, r+2} \end{vmatrix} = 0,$$

facendo $r = 1, 2, 3$, e che si possono anche mettere sotto la forma:

$$a\omega = \frac{\frac{dM}{dX_{rr}}}{c_{rr} \sum_t X_t Y_t - Y_r^2} \quad (r = 1, 2, 3). \quad (c)$$

Possiamo dunque asserire che:

Le condizioni necessarie e sufficienti perchè la equazione (E) abbia le radici eguali sono date dalle equazioni (c), in cui ω rappresenta una indeterminata. Quando le due equazioni, che risultano dalla eliminazione di ω tra le (c) sono identicamente soddisfatte, ad ogni integrale della equazione (I) ne corrisponde un altro, che gli è ortogonale nella varietà di elemento lineare φ .

Di questo teorema sarebbe facile dare una dimostrazione speciale diretta.

Se φ è l'elemento lineare dello spazio euclideo in coordinate cartesiane ortogonali, si ha:

$$a = 1, \quad Y_r = X_r, \quad X_{rs} = \frac{X_r^{(s)} + X_s^{(r)}}{2}, \quad \Lambda = \frac{\sum_{rs} X_{rs} X_r X_s}{\sum_r X_r^2}$$

$$N = \sum_r X_{rr},$$

$$X'_{rs} = Y'_{rs} = \sum_p X_{pr} X_{ps} + \frac{1}{2} \sum_p (X_{pr} X_s^{(p)} + X_{ps} X_r^{(p)} - X_p X_{rs}^{(p)}),$$

e le espressioni sopra trovate per le H_{rh} e Ξ_{rh} danno:

$$H_{rh} = \Xi_{rh} = \omega_h (P_r - \Lambda X_r) + \frac{dM}{dX_r} - M X_r$$

$$\frac{1}{\Xi_{oh}} \Xi_{rh} \Xi_{sh} = -\varepsilon \omega_h \sum_t X_t^2 - (\Lambda - \omega_h) X_r X_s - X_{rs} \sum_t X_t^2 + X_s P_r + X_r P_s.$$

Se, come può sempre farsi, si suppone che sia:

$$\sum_t X_t^2 = 1$$

si ha:

$$\sum_t X_t X_t^{(r)} = 0, \quad \Lambda = 0, \quad P_r = \frac{1}{2} \sum_t X_t X_r^{(t)}$$

e alle precedenti può darsi facilmente la forma:

$$\frac{1}{\Xi_{0h}} \Xi_{rh} \Xi_{sh} = -\varepsilon \omega_h - X_r^{(s)} + L_{rk} X_s + \frac{X_r^{(s)} - X_s^{(r)}}{2} + \\ + \sum_t X_t \left(X_r \frac{X_s^{(t)} - X_t^{(s)}}{2} - X_s \frac{X_r^{(t)} - X_t^{(r)}}{2} \right),$$

essendo:

$$L_{rk} = \sum_t X_t X_r^{(t)} + \omega_k X_r,$$

od anche sviluppando per $s = r, r+1, r+2$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\Xi_{0h}} \Xi_{rh} \Xi_{rh} &= -X_r^{(r)} + L_{rk} X_r - \omega_k \\ \frac{1}{\Xi_{0h}} \Xi_{rh} \Xi_{r+1, h} &= -X_r^{(r+1)} + L_{rk} X_{r+1} - Q X_{r+2} \\ \frac{1}{\Xi_{0h}} \Xi_{rh} \Xi_{r+2, h} &= -X_r^{(r+2)} + L_{rk} X_{r+2} + Q X_{r+1}, \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

posto:

$$Q = \frac{1}{2} \sum_s X_s (X_{s+2}^{(s+1)} - X_{s+1}^{(s+2)})$$

In queste ω_h ed ω_k sono le radici, che supponiamo disuguali, della equazione:

$$\omega^2 + N\omega - M = 0. \quad (E')$$

Le equazioni (c) prendono nel caso, che consideriamo, la forma:

$$\frac{dM}{dX_{rr}} = \omega(X_{r+1}^2 + X_{r+2}^2),$$

ovvero, sostituendo ai primi membri i loro sviluppi:

$$(X_{r+1}^{(r+2)} + X_{r+2}^{(r+1)}) X_{r+1} X_{r+2} = X_{r+2}^{(r+2)} X_{r+1}^2 + X_{r+1}^{(r+1)} X_{r+2}^2 + \omega(X_{r+1}^2 + X_{r+2}^2).$$

Supponiamo, come può sempre farsi, che sia $X_3 = 1$. Queste equazioni prendono allora la forma:

$$X_1 X_2 (X_1^{(2)} + X_2^{(1)}) = X_2^2 X_1^{(1)} + X_1^2 X_2^{(2)} + \omega(X_1^2 + X_2^2)$$

$$X_2 X_2^{(3)} = X_2^{(2)} + \omega(1 + X_2^2)$$

$$X_1 X_1^{(3)} = X_1^{(1)} + \omega(1 + X_1^2).$$

Servendosi delle ultime due per calcolare i valori di $X_1^{(3)}$ ed $X_2^{(3)}$ e della prima

per calcolare quello di ω si trova:

$$\begin{aligned} (X_1^2 + X_2^2)(X_1 X_2^{(3)} - X_2 X_1^{(3)} + X_1^{(2)} - X_2^{(4)}) = 2 X_1 X_2 (X_2^{(2)} - X_1^{(4)}) + \\ + 2 (X_1^2 X_1^{(2)} - X_2^2 X_2^{(4)}) \end{aligned} \quad (7)$$

Poichè la condizione necessaria e sufficiente perchè $X_1, X_2, 1$ siano proporzionali alle derivate di una stessa funzione rispetto ad x_1, x_2, x_3 è data dall'annullarsi del primo membro di questa equazione e in tal caso, come è noto, i coefficienti della (I) sono proporzionali alle derivate del parametro di un sistema di sfere concentriche, possiamo dalla equazione (7) concludere che, anche limitandoci a considerare la varietà euclidea a tre dimensioni, esistono, oltre alla ricordata, altre equazioni a derivate parziali di 1.º ordine lineari ed omogenee tali, che ad ogni loro integrale ne corrisponde un altro, che gli è ortogonale.

Non mi tratterrò ad applicare le formole di questo paragrafo al caso, in cui φ essendo l'elemento lineare di una varietà qualunque a tre dimensioni, i coefficienti X_r della equazione (I) sono proporzionali alle derivate di una stessa funzione rispetto alle x_r . Osserverò soltanto che le formole (6'), da cui scompaiono in questo caso i termini moltiplicati per Q , sono quelle che conducono alla equazione, a cui soddisfa il parametro di una famiglia di superficie appartenente ad un sistema triplo ortogonale nello spazio euclideo ed in coordinate cartesiane ortogonali sotto la forma datale da WEINGARTEN nel vol. LXXXIII del Giornale di BORCHARDT.

Padova, giugno 1886.