Distanzschätzungen im Funktionenraum II.

Von

W. BLASCHKE in Leipzig und G. PICK in Prag.

Die Sätze über „konvexe“ Funktionen, die in der ersten Abhandlung gleichen Titels*) aufgestellt sind, werden dort mit Zuhilfenahme massengeometrischer Überlegungen bewiesen. Im Folgenden wird eine rein analytische Grundlage für den Beweis dieser und weiterer Sätze gegeben, und zwar mittelst einer linearen Integraldarstellung der positiven konvexen Funktionen durch eine besondere Klasse unter ihnen. Die Integraldarstellung, die den von Stieltjes eingeführten Integralbegriff verwertet, wird in den §§ 1—7 entwickelt und untersucht. Die drei folgenden Abschnitte enthalten Anwendungen.

Wenn wir auch den erwähnten massengeometrischen Erwägungen den Vorzug großer Anschaulichkeit einräumen, darf nicht verkannt werden, daß das neue Beweisverfahren weiter führt. Es ist uns zum Beispiel nicht gelungen, den von Frank längst vermuteten allgemeinen Satz, der in § 10 bewiesen wird, auch durch massengeometrische Schlüsse darzutun.

Der vorliegende Teil der Abhandlung ist unabhängig von dem früher erschienenen lesbar.

§ 1.

Die $\hat{\varphi}$.

Betrachten wir die im Intervall $0 \leq x \leq 1$ „nach oben konvexen“ oder, wie wir kurz sagen wollen „konvexen“ Funktionen. Jede solche Funktion $\varphi(x)$ hat die kennzeichnende Eigenschaft, daß für drei aufeinanderfolgende Punkte x_1, x_2, x_3

$$\{0 \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq 1\}$$

*) „Distanzschätzungen im Funktionenraum I.“ Von Ph. Frank und G. Pick in Prag. Math. Ann. 76, S. 354—375. (Im folgenden mit F. I. zitiert.)

stets die Ungleichung gilt*)

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \varphi(x_1) \\ 1 & x_2 & \varphi(x_2) \\ 1 & x_3 & \varphi(x_3) \end{vmatrix} \leq 0.$$

Eine konvexe Funktion ist in den inneren Punkten des Intervalles $0, 1$ von selbst stetig. Es existieren ferner immer die Grenzwerte $\lim_{x=0} \varphi(x)$, $\lim_{x=1} \varphi(x)$. Wir wollen später stets die Annahme machen

$$(2) \quad \varphi(0) = \lim_{x=0} \varphi(x), \quad \varphi(1) = \lim_{x=1} \varphi(x),$$

d. h. wir werden nur solche konvexe Funktionen in Betracht ziehen, die im abgeschlossenen Intervall $0 \leq x \leq 1$ stetig sind.

Jede konvexe Funktion $\varphi(x)$ gibt uns die Gleichung einer „konvexen Kurve“ $y = \varphi(x)$. Wir werden im Folgenden insbesondere *konvexe Kurven* $y = \widehat{\varphi}(x, t)$ benutzen, die sich aus zwei geradlinigen Stücken zusammensetzen

$$(3) \quad \widehat{\varphi}(x, t) \begin{cases} = \sqrt{3} \frac{x}{t} & \text{für } x \leq t, \\ = \sqrt{3} \frac{1-x}{1-t} & \text{für } x \geq t. \end{cases}$$

Jedem Wert des Parameters $t \{0 < t < 1\}$ entspricht eine Kurve dieser $\widehat{\varphi}$ -Schar, eine Kurve, die an der Stelle $x = t$ eine Ecke hat. Den Parameterwerten 0 und 1 wollen wir noch die Kurven zuordnen

$$(4) \quad \widehat{\varphi}(x, 0) = \sqrt{3}(1-x), \quad \widehat{\varphi}(x, 1) = \sqrt{3}x.$$

Die Beifügung des Faktors $\sqrt{3}$ ist unwesentlich. Es wird dadurch erreicht, daß die $\widehat{\varphi}$ -Kurven „normiert“ sind, d. h. der Bedingung

$$(5) \quad (\widehat{\varphi}, \widehat{\varphi}) = \int_0^1 \widehat{\varphi}^2 dx = 1$$

genügen.

*) Bei anderen Autoren werden die Funktionen, die wir (nach oben) konvex nennen als konkav bezeichnet, vgl. J. L. Jensen in Acta mathematica 30 (1906), S. 175. Der Begriff der konvexen Funktion dürfte von O. Stolz herühren, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, Leipzig, Bd. 1 (1893), S. 35.

§ 2.

Erzeugung der Polygone mittels der $\widehat{\varphi}$.

Durch Linearkombination von $\widehat{\varphi}$ -Kurven mit positiven Koeffizienten

$$(6) \quad \varphi(x) = \sum_0^n c_k \widehat{\varphi}(x, t_k), \quad \{c_k > 0\}$$

erhält man wieder eine konvexe Kurve, denn man findet

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \varphi(x_1) \\ 1 & x_2 & \varphi(x_2) \\ 1 & x_3 & \varphi(x_3) \end{vmatrix} = \sum c_k \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \widehat{\varphi}(x_1, t_k) \\ 1 & x_2 & \widehat{\varphi}(x_2, t_k) \\ 1 & x_3 & \widehat{\varphi}(x_3, t_k) \end{vmatrix} \leq 0.$$

Die so gefundene Kurve ist ein konvexes, positives $\{\varphi(x) \geq 0\}$ Polygon. Wir wollen nun zunächst umgekehrt zeigen: *Jedes konvexe positive Polygon mit endlich vielen Ecken kann aus den $\widehat{\varphi}$ durch Linearkombination mit positiven Koeffizienten hergeleitet werden.*

Das kann man so einsehen. Nehmen wir in (6)

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1,$$

dann haben wir an der Stelle t_k $\{0 < t_k < 1\}$ für die Ableitung von $\varphi(x)$

$$(7) \quad \begin{aligned} \varphi'(t_k+0) - \varphi'(t_k-0) &= c_k \{\widehat{\varphi}'(t_k+0, t_k) - \widehat{\varphi}'(t_k-0, t_k)\} \\ &= -\sqrt{3} \frac{c_k}{t_k(1-t_k)}. \end{aligned}$$

Ist nun ein positives konvexes Polygon $y = \varphi(x)$ vorgeschrieben, an dessen innerem Eckpunkt t_k die Ableitung $\varphi'(x)$ den Zuwachs Δ_k hat

$$\begin{aligned} \varphi'(t_k+0) - \varphi'(t_k-0) &= \Delta_k \\ \{0 < t_k < 1; k = 1, 2, \dots, n-1; \Delta_k < 0\}, \end{aligned}$$

so findet sich für den Koeffizienten c_k die Gleichung

$$(8) \quad -\frac{\sqrt{3}}{t_k(1-t_k)} c_k = \Delta_k, \quad \{k = 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Die Randbedingungen für $x = 0$ und $x = 1$ ergeben die Werte der beiden noch ausständigen Koeffizienten c_0 und c_n

$$(9) \quad \varphi(0) = \sqrt{3} c_0, \quad \varphi(1) = \sqrt{3} c_n.$$

Berechnen wir nun aus (8) und (9) die c und bilden wir mit Hilfe dieser positiven Konstanten $\{c_0, c_n \geq 0; c_1, c_2, \dots, c_{n-1} > 0\}$ die Funktion

$$\psi(x) = \sum_0^n c_k \widehat{\varphi}(x, t_k),$$

so fällt die Funktion $\psi(x)$ mit der vorgegebenen Funktion $\varphi(x)$ zusammen. Denn zunächst ist die Differenz der Ableitungen $\varphi'(x) - \psi'(x)$ nach (8) konstant. Wir haben also

$$\varphi(x) = \psi(x) + ax + b.$$

Wegen der Randbedingungen (9) ist aber

$$\varphi(0) = \psi(0), \quad \varphi(1) = \psi(1)$$

und daraus folgt

$$a = 0, \quad b = 0.$$

Das hier dargelegte elementare Verfahren läßt sich verallgemeinern und wir wollen schrittweise zeigen, daß es — wie man sich kurz ausdrücken kann — möglich ist, jede beliebige positive und konvexe Funktion aus (im Allgemeinen) *unendlich* vielen $\widehat{\varphi}$ durch positive Linearkombination herzuleiten. An Stelle der Summation tritt dabei eine besondere Art von Integration, wie sie zuerst von Stieltjes eingeführt worden ist.

§ 3.

Integraldarstellung differenzierbarer konvexer Kurven.

Man erreicht den gewünschten Zweck schon mittels der gewöhnlichen Integrale Riemanns, wenn man annimmt, daß die darzustellende konvexe und positive Funktion $\varphi(x)$ zweimal stetig differenzierbar ist im abgeschlossenen Intervall $0 \leq x \leq 1$ und den Randbedingungen

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 0$$

genügt. Dann läßt sich $\varphi(x)$, wie wir jetzt zeigen werden, in der Form schreiben

$$(10) \quad \varphi(x) = \int_0^1 \widehat{\varphi}(x, t) f(t) dt,$$

worin $f(t)$ positiv und stetig ist.

Daß wirklich jede in dieser Form dargestellte Funktion $\varphi(x)$ positiv ist, ist selbstverständlich, daß sie auch konvex ist, ergibt sich wieder mittels der Determinantenbedingung

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \varphi(x_1) \\ 1 & x_2 & \varphi(x_2) \\ 1 & x_3 & \varphi(x_3) \end{vmatrix} = \int_0^1 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \widehat{\varphi}'(x_1, t) \\ 1 & x_2 & \widehat{\varphi}(x_2, t) \\ 1 & x_3 & \widehat{\varphi}(x_3, t) \end{vmatrix} f(t) dt \leq 0.$$

Aus (10) oder ausführlich geschrieben aus

$$\frac{\varphi(x)}{\sqrt{3}} = (1-x) \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt + x \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt$$

folgt durch Differentiation

$$(11) \quad \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{3}} = - \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt + \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt.$$

Dafür kann man auch schreiben

$$\varphi'(x) = \int_0^1 \frac{\partial \widehat{\varphi}(x, t)}{\partial x} f(t) dt.$$

Differenziert man (11) noch einmal, so ergibt sich

$$\frac{\varphi''(x)}{\sqrt{3}} = - \frac{f(x)}{x(1-x)}$$

oder die gewünschte Auflösung der Gleichung (10) nach f

$$(12) \quad f(x) = - \frac{x(1-x)}{\sqrt{3}} \varphi''(x).$$

Da $\varphi(x)$ konvex sein soll, darf $\varphi'(x)$ mit zunehmendem x nicht zunehmen. Wir haben also $\varphi''(x) \leq 0$, und daher nach (12) $f(x) \geq 0$.

Setzt man nun umgekehrt die gefundene Lösung (12) in (10) ein, so kann man durch Integration nach Teilen bestätigen — wir kommen darauf noch zurück — daß die Gleichung befriedigt ist für jede konvexe und positive Funktion $\varphi(x)$, die zweimal stetig differenzierbar ist und den Randbedingungen $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ genügt. Unter diesen Voraussetzungen ist also jede der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_0^1 \widehat{\varphi}(x, t) f(t) dt, \\ f(x) &= - \frac{x(1-x)}{\sqrt{3}} \varphi''(x) \end{aligned}$$

zwischen den Funktionen $\varphi(x)$ und $f(x)$ die Auflösung der anderen ($f(x)$ stetig und ≥ 0) — ein Sonderfall eines bekannten Ergebnisses aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Führen wir eine nicht abnehmende Funktion Φ ein durch die Formel

$$\int_c^x f(t) dt = \Phi(x), \quad \{0 < c < 1\}$$

so bekommen wir

$$(13) \quad \varphi(x) = \int_0^1 \widehat{\varphi}(x, t) d\Phi(t),$$

$$(14) \quad \Phi(x) = \int_c^x - \frac{x(1-x)}{\sqrt{3}} d\varphi'(x).$$

Diese Formeln reichen aber nun weiter als die früheren, wenn man die Integration im Sinne von Stieltjes vornimmt. Schalten wir hier zunächst die einfachen Sätze ein, die wir aus dieser Integrationstheorie benötigen.

§ 4.

Die Integrale von Stieltjes.*)

Die Funktion $f(x)$ sei stetig und die Funktion $g(x)$ sei monoton (aber nicht notwendig auch stetig) im abgeschlossenen Intervall $a \leq x \leq b$. Wir zerlegen das Intervall in n Teilintervalle durch die Zwischenpunkte

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

δ sei die größte der Teilstrecken $x_{k+1} - x_k$. Wir nehmen noch beliebige Zwischenpunkte $x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1}$ an und bilden die Summe

$$(15) \quad \sum_0^{n-1} f(\xi_k) \{g(x_{k+1}) - g(x_k)\}.$$

Betrachtet man nun eine Folge derartiger Zerlegungen, für die δ gegen Null konvergiert, so strebt die zugehörige Summe unabhängig von der Wahl der Teilpunkte x_k und der Zwischenpunkte ξ_k gegen einen festen Grenzwert, den man nach Stieltjes mit

$$\int_a^b f(x) dg(x)$$

bezeichnet. Der zu dieser Einsicht führende Existenzbeweis ist ganz genau derselbe, wie er auch schon beim Integralbegriff Riemanns erforderlich ist.

Wir brauchen für unsere Integrale vor allem einen Mittelwertsatz. Seien P und Q kleinster und größter Wert der stetigen Funktion f im Integrationsintervall, so haben wir, wenn g etwa als nicht abnehmend angenommen wird,

$$P \int_a^b dg(x) \leq \int_a^b f(x) dg(x) \leq Q \int_a^b dg(x),$$

weil für die Näherungssummen (15) die analogen Ungleichungen gelten. Wegen der Stetigkeit von f ergibt sich daraus in bekannter Weise

*) T. J. Stieltjes in Mém. prés. par divers savants à l'Académie des sciences, Paris (1902) Bd. 32, Nr. 2, bes. S. 82—87.

$$\text{I.} \quad \int_a^b f(x) dg(x) = f(\xi) \{g(b) - g(a)\},$$

$$a < \xi < b.$$

In dieser Form gilt der Mittelwertsatz auch, wenn g nicht zunimmt.

Bilden wir die Funktion

$$(16) \quad F(x) = \int_c^x f(x) dg(x).$$

Man bestätigt ohne Mühe die Existenz der Grenzwerte $F(x-0)$ und $F(x+0)$ und findet

$$(17) \quad \begin{aligned} F(x-0) &= F(x) - f(x) \{g(x) - g(x-0)\}, \\ F(x+0) &= F(x) + f(x) \{g(x+0) - g(x)\}. \end{aligned}$$

Ist also g an einer Stelle x stetig, so ist dort auch F stetig. Wir führen noch die Schreibweise ein:

$$(18) \quad \begin{aligned} F(x-0) &= \int_c^{x-0} f(x) dg(x), & F(x+0) &= \int_c^{x+0} f(x) dg(x), \\ F(x+0) - F(x-0) &= \int_{x-0}^{x+0} f(x) dg(x). \end{aligned}$$

Dann gelten z. B. folgende Rechenregeln:

$$(19) \quad \int_a^c + \int_c^b = \int_a^b, \quad \int_a^{b-0} + \int_{b-0}^b = \int_a^b, \quad \int_a^{c-0} + \int_{c-0}^{c+0} + \int_{c+0}^b = \int_a^b *$$

und folgender abgeänderter Mittelwertsatz

$$\text{Ia.} \quad \int_{a+0}^b f(x) dg(x) = f(\xi) \{g(b) - g(a+0)\},$$

$$a < \xi < b.$$

Wir werden es später mit dem einfachen Fall zu tun haben, daß f stetig differenzierbar ist. Dann kann man das *Stieltjesintegral* durch Integration nach Teilen auf ein gewöhnliches *Riemannintegral* zurückführen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} f(b)g(b) - f(a)g(a) &= f(x_0)\{g(x_1) - g(x_0)\} + g(x_1)\{f(x_1) - f(x_0)\} \\ &+ f(x_1)\{g(x_2) - g(x_1)\} + g(x_2)\{f(x_2) - f(x_1)\} \\ &\dots \dots \dots \\ &+ f(x_{n-1})\{g(x_n) - g(x_{n-1})\} + g(x_n)\{f(x_n) - f(x_{n-1})\} \end{aligned}$$

*) Hieraus folgt, daß sich der Integralwert nicht ändert, wenn man den Wert von g an einer Unstetigkeitsstelle c von g im Innern des Integrationsintervalls abändert.

oder nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$[f(x)g(x)]_a^b = \sum_0^{n-1} f(x_k) \{g(x_{k+1}) - g(x_k)\} + \sum_0^{n-1} g(x_{k+1}) f'(\xi_k) (x_{k+1} - x_k).$$

Dabei ist

$$x_k < \xi_k < x_{k+1}.$$

f' ist nach Voraussetzung gleichmäßig stetig, wir haben also

$$|f'(x_{k+1}) - f'(\xi_k)| < \varepsilon$$

für

$$x_{k+1} - x_k \leq \delta.$$

Demnach ist für $|g(x)| < M$

$$[f(x)g(x)]_a^b = \sum_0^{n-1} f(x_k) \{g(x_{k+1}) - g(x_k)\} + \sum_0^{n-1} g(x_{k+1}) f'(x_{k+1}) (x_{k+1} - x_k) \\ + \Theta M(b-a)\varepsilon,$$

wobei

$$|\Theta| < 1$$

ist. In der Grenze ergibt sich daraus das gewünschte Resultat

$$\text{II.} \quad [f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f(x) dg(x) + \int_a^b g(x) f'(x) dx.$$

Damit haben wir das *Stieltjesintegral*

$$\int_a^b f(x) dg(x)$$

auf ein gewöhnliches *Riemannintegral*

$$\int_a^b g(x) f'(x) dx$$

zurückgeführt, dessen Existenz gesichert ist, da f' stetig und g monoton ist.

Beweisen wir folgende Rechenregel:

III. Setzt man in

$$\int_a^b f_1(x) dg_1(x)$$

für

$$g_1(x) = \int_a^x f_2(x) dg_2(x),$$

so erhält man

$$\int_a^b f_1(x) f_2(x) dg_2(x).$$

Wir haben nämlich nach dem bewiesenen Mittelwertsatz I

$$\sum_0^{n-1} f_1(\xi_k') \{g_1(x_{k+1}) - g_1(x_k)\} = \sum_0^{n-1} f_1(\xi_k') f_2(\xi_k) \{g_2(x_{k+1}) - g_2(x_k)\}.$$

Die Wahl der Zwischenpunkte ξ_k' steht uns dabei offen und wir können $\xi_k' = \xi_k$ setzen. Dann erhalten wir durch den Grenzübergang die gewünschte Gleichung

$$\int_a^b f_1(x) dg_1(x) = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dg_2(x).$$

Die Definition des *Stieltjesintegrals*

$$\int_a^b f(x) dg(x)$$

bleibt unverändert erhalten, wenn $g(x)$ eine — im Allgemeinen unstetige — *Funktion von beschränkter Schwankung* ist. Um in diesem Fall den Existenzbeweis zu führen, genügt es g als Summe zweier monotoner Funktionen darzustellen. Dadurch kommt man wieder auf den früheren Fall zurück.

Man kann sogar Unstetigkeitsstellen von f zulassen, nur dürfen f und g nicht an derselben Stelle unstetig werden, dann nämlich verliert das Integral seinen unzweideutigen Sinn.

§ 5.

Anwendung der Integrale von Stieltjes.

Nach diesen Vorbereitungen können wir den Geltungsbereich der Formeln (13), (14) erheblich erweitern, indem wir die angekündigte Integration nach Teilen in allgemeinerer Form durchführen. Wir beweisen zunächst: Es sei $\varphi(x)$ eine positive konvexe Funktion im Intervall $0, 1$, die an den Endpunkten des Intervalls verschwindet und deren einseitige Ableitungen in diesen Punkten endlich sind. Dann kann man φ aus den $\widehat{\varphi}$ mittels eines Stieltjesintegrals aufbauen

$$(20) \quad \varphi(x) = \int_0^1 \widehat{\varphi}(x, t) d\Phi(t). \quad 0 < x < 1.$$

Darin bedeutet Φ eine monotone nicht abnehmende Funktion, die man aus φ wieder mittels eines Stieltjesintegrals berechnet:

$$(21) \quad \Phi(x) = \int_0^x -\frac{x(1-x)}{\sqrt{3}} d\varphi'(x). \quad 0 < x < 1.$$

Wir haben, da φ nicht als differenzierbar vorausgesetzt ist, noch zu erklären, was hierin unter φ' verstanden werden soll. Da φ konvex ist, sind

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{+h} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{-h}$$

monotone Funktionen von $h(>0)$. Es existieren also die linke und die rechte Ableitung

$$\varphi'(x+0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{+h},$$

$$\varphi'(x-0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{-h}$$

und daraus folgt die Existenz von

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x-h)}{2h} = \frac{1}{2} \{ \varphi'(x-0) + \varphi'(x+0) \}.$$

Diesen Grenzwert wollen wir mit $\varphi'(x)$ bezeichnen

$$(22) \quad \varphi'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x-h)}{2h}$$

und in der Formel (21) benutzen. An den Endpunkten des Intervalls setzen wir

$$\varphi'(0) = \varphi'(0+0),$$

$$\varphi'(1) = \varphi'(1-0).$$

Aus der Konvexität von φ folgt, daß φ' nicht zunimmt, und daraus weiter, daß die durch (21) erklärte Funktion Φ tatsächlich nicht abnimmt.

Setzt man den Ausdruck (21) an Stelle von Φ in die rechte Seite von (20) ein, so erhält man nach der Rechenregel III

$$(23) \quad \int_0^1 \widehat{\varphi}(x, t) d\Phi(t) = \int_0^1 -\widehat{\varphi}(x, t) \frac{t(1-t)}{\sqrt{3}} d\varphi'(t) \\ = (1-x) \int_0^x -t d\varphi'(t) + x \int_x^1 -(1-t) d\varphi'(t).$$

Für den erklärten Differentialquotienten φ' gilt ein Mittelwertsatz, den man ebenso beweist, wie den gewöhnlichen Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k) = \varphi'_k \cdot (x_{k+1} - x_k), \\ \varphi'(x_k) \geq \varphi'_k \geq \varphi'(x_{k+1}).$$

$\varphi'(x)$ ist monoton und daher integrierbar im Sinne von Riemann. Wir haben also

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(x) dx = \lim \Sigma \varphi'_k \cdot (x_{k+1} - x_k).$$

und das ist nach unserem Mittelwertsatz

$$= \varphi(\beta) - \varphi(\alpha).$$

Jetzt wenden wir unter Berücksichtigung dieses Ergebnisses auf (23) die Rechenregel II für die Integration nach Teilen an und finden

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \widehat{\varphi}(x, t) d\Phi(t) \\ &= (1-x) \{ -[t \varphi'(t)]_0^x + \varphi(x) \} + x \{ -[(1-t) \varphi'(t)]_x^1 + \varphi(x) \}. \end{aligned}$$

Das gibt aber vereinfacht $\varphi(x)$, d. h. die durch (21) erklärte Funktion Φ befriedigt tatsächlich die Gleichung (20).

§ 6.

Integraldarstellung beliebiger positiver und konvexer Funktionen.

Wir wollen nun die Integraldarstellung einer beliebigen positiven und konvexen Funktion $\varphi(x)$ dadurch erledigen, daß wir $\varphi(x)$ durch Funktionen $\varphi_n(x)$ von der im vorigen Paragraphen behandelten speziellen Art approximieren. Wir teilen, um $\varphi_n(x)$ zu konstruieren, das Intervall 01 durch zwei Teilungspunkte $\alpha_n, \beta_n \{0 < \alpha_n < \beta_n < 1\}$ in drei Teilintervalle. Im mittleren dieser Intervalle soll φ_n mit φ zusammenfallen, in den beiden äußeren soll φ_n geradlinig verlaufen:

$$\varphi_n(x) = \varphi(x) \quad \text{für } \alpha_n \leq x \leq \beta_n,$$

$$\varphi_n(x) = \frac{\varphi(\alpha_n)}{\alpha_n} x \quad \text{für } 0 \leq x \leq \alpha_n,$$

$$\varphi_n(x) = \frac{\varphi(\beta_n)}{1 - \beta_n} (1 - x) \quad \text{für } \beta_n \leq x \leq 1.$$

Nach § 5 haben wir

$$\varphi_n(x) = \int_0^1 \widehat{\varphi}(x, t) d\Phi_n(t),$$

$$\Phi_n(x) = \int_c^x - \frac{x(1-x)}{\sqrt{3}} d\varphi'_n(x).$$

Das gibt, wenn man für φ_n seinen Wert einsetzt,

$$\begin{aligned}\Phi_n(x) &= \int_c^x -\frac{x(1-x)}{\sqrt{3}} d\varphi'(x) \text{ für } \alpha_n \leq x \leq \beta_n, \\ (24) \quad \Phi_n(x) &= \int_c^{\alpha_n} -\frac{x(1-x)}{\sqrt{3}} d\varphi'(x) + \frac{\alpha_n(1-\alpha_n)}{\sqrt{3}} \left\{ \varphi'(\alpha_n) - \frac{\varphi(\alpha_n)}{\alpha_n} \right\} \text{ für } 0 \leq x < \alpha_n, \\ \Phi_n(x) &= \int_c^{\beta_n} -\frac{x(1-x)}{\sqrt{3}} d\varphi'(x) - \frac{\beta_n(1-\beta_n)}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{\varphi(\beta_n)}{\beta_n-1} - \varphi'(\beta_n) \right\} \text{ für } \beta_n < x \leq 1.\end{aligned}$$

Wir nehmen etwa

$$c = \frac{1}{2}, \quad \alpha_n = \frac{1}{2+n}, \quad \beta_n = 1 - \frac{1}{2+n}$$

und lassen $n = 1, 2, 3, \dots$ nach unendlich gehen. Dann konvergiert $\Phi_n(x)$ gegen die Grenzfunktion $\Phi(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = \Phi(x),$$

und zwar ist in den inneren Punkten des Intervalls 0, 1

$$(25) \quad \Phi(x) = \int_c^x -\frac{x(1-x)}{\sqrt{3}} d\varphi'(x).$$

Es bleiben nur noch die Endpunkte des Intervalls zu untersuchen. Nach unserer Rechenregel II ist

$$(26) \quad \int_c^x -\frac{x(1-x)}{\sqrt{3}} d\varphi'(x) = -\left[\frac{x(1-x)}{\sqrt{3}} \varphi'(x) \right]_c^x + \int_c^x \frac{1-2x}{\sqrt{3}} d\varphi(x).$$

Nehmen wir für den Augenblick etwa an, φ sei an der Stelle $x=0$ wachsend. Dann haben wir nach dem Mittelwertsatz und weil φ' nicht zunimmt

$$0 \leq x \varphi'(x) \leq \varphi(x) - \varphi(0)$$

für hinreichend kleines x . Daraus folgt wegen der Stetigkeit von φ

$$(27)_1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \varphi'(x) = 0.$$

Ist $\varphi(x)$ an der Stelle $x=0$ nicht zunehmend, so gilt dieselbe Beziehung (27)₁ um so mehr. Genau ebenso ist

$$(27)_2 \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \varphi'(x) = 0.$$

Aus (26) ergibt sich daher

$$(28) \quad \begin{aligned} \lim_{x=0} \int_c^x -\frac{x(1-x)}{\sqrt{3}} d\varphi'(x) &= \frac{c(1-c)}{\sqrt{3}} \varphi'(c) + \int_c^0 \frac{1-2x}{\sqrt{3}} d\varphi(x), \\ \lim_{x=1} \int_c^x -\frac{x(1-x)}{\sqrt{3}} d\varphi'(x) &= \frac{c(1-c)}{\sqrt{3}} \varphi'(c) + \int_c^1 \frac{1-2x}{\sqrt{3}} d\varphi(x). \end{aligned}$$

Darin existieren die *Stieltjes*integrale rechter Hand, da φ konvex und um so mehr von beschränkter Schwankung ist. Aus den Formeln (24) folgt durch nochmalige Anwendung von (27)

$$(29) \quad \begin{aligned} \Phi(0) &= \lim_{n=\infty} \Phi_n(0) = \lim_{x=0} \int_c^x -\frac{x(1-x)}{\sqrt{3}} d\varphi'(x) - \frac{\varphi(0)}{\sqrt{3}}, \\ \Phi(1) &= \lim_{n=\infty} \Phi_n(1) = \lim_{x=1} \int_c^x -\frac{x(1-x)}{\sqrt{3}} d\varphi'(x) + \frac{\varphi(1)}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Es bleibt nun zu zeigen, daß die gefundene, durch die Formeln (25), (28) und (29) erklärte, nicht abnehmende Grenzfunktion Φ die gewünschte Integraldarstellung

$$(30) \quad \varphi(x) = \int_0^1 \widehat{\varphi}(x, t) d\Phi(t), \quad \{0 < x < 1\}$$

leistet.

Ist x ein innerer Punkt des Intervalls 01, so können wir n so groß wählen, daß $\alpha_n < x < \beta_n$ ausfällt. Dann haben wir

$$(31) \quad \begin{aligned} \int_0^1 \widehat{\varphi}(x, t) d\Phi(t) &= \varphi_n(x) + \int_0^{\alpha_n} \widehat{\varphi}(x, t) d\Phi(t) - \int_0^{\alpha_n} \widehat{\varphi}(x, t) d\Phi_n(t) \\ &\quad + \int_{\beta_n}^1 \widehat{\varphi}(x, t) d\Phi(t) - \int_{\beta_n}^1 \widehat{\varphi}(x, t) d\Phi_n(t). \end{aligned}$$

Wir wollen nun beweisen, daß sich die rechte Seite dieser Gleichung auf das erste Glied $\varphi_n(x) = \varphi(x)$ reduziert. Zeigen wir zum Beispiel, daß die Differenz

$$\int_0^{\alpha_n} \widehat{\varphi}(x, t) d\Phi(t) - \int_0^{\alpha_n} \widehat{\varphi}(x, t) d\Phi_n(t)$$

mit wachsendem n nach Null konvergiert. Nach unserem Mittelwertsatz I finden wir

$$\begin{aligned} &= \{\Phi(\alpha_n) - \Phi(0)\} \widehat{\varphi}(x, t_1) - \{\Phi(\alpha_n) - \Phi_n(0)\} \widehat{\varphi}(x, t_2), \\ &\quad 0 \leq t_1 \leq \alpha_n, \quad 0 \leq t_2 \leq \alpha_n \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck verschwindet tatsächlich in der Grenze, einerseits da für jedes $0 < x < 1$ $\widehat{\varphi}(x, t)$ in t stetig ist und andererseits wegen (29₁). Ebenso heben sich die beiden letzten Glieder in der Formel (31) für $n \rightarrow \infty$ weg und somit gilt wirklich die Beziehung (30).

Setzt man in (30) für Φ irgend eine monotone nicht abnehmende Funktion ein, so wird φ immer positiv ausfallen und, was man analog wie in § 3 mittels der Determinantenbedingung feststellt, auch konvex.

Greifen wir nun aus unseren Ergebnissen das heraus, was wir für die folgenden Anwendungen nötig haben werden! Wir haben gefunden:

Setzt man in den Ausdruck

$$\int_0^1 \widehat{\varphi}(x, t) d\Phi(t)$$

für Φ eine monotone nicht abnehmende Funktion, so erhält man eine im offenen Intervall $0 < x < 1$ positive und konvexe Funktion von x . Umgekehrt erhält man auf diese Art durch geeignete Wahl von Φ jede beliebige positive und konvexe Funktion.

Für $x = 0$ und $x = 1$ verliert unsere Integraldarstellung im Allgemeinen ihren Sinn. Wir haben nämlich z. B. für $x = 0$

$$\widehat{\varphi}(0, t) \begin{cases} = \sqrt[3]{t} & \text{für } t = 0, \\ = 0 & \text{für } 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Ist nun auch $\Phi(t)$ für $t = 0$ unstetig, so ist das *Stieltjesintegral* nicht mehr eindeutig erklärt.

§ 7.

Eindeutigkeit.

Wir wollen hier zu unseren Ergebnissen der Vollständigkeit halber eine kleine Ergänzung hinzufügen, obwohl davon später kein Gebrauch gemacht werden wird. Wir haben gefunden: Die Funktionalgleichung

$$\varphi(x) = \int_0^1 \widehat{\varphi}(x, t) d\Phi(t)$$

hat stets eine Auflösung nach Φ , wenn φ irgendwie als positive konvexe Funktion vorgeschrieben ist. Nun kann man zu Φ offenbar ohne weiteres eine Konstante addieren, oder die Werte der monotonen nicht abnehmenden Funktion an ihren Sprungstellen im Innern des Integrationsintervalls abändern ohne den Wert des *Stieltjesintegrals* zu beeinflussen. *Sieht man aber von dieser Willkür ab, so hat, wie wir jetzt zeigen werden,*

unsere Funktionalgleichung nur eine einzige monotone*) Lösung Φ . Zu dieser Erkenntnis führt eine Verallgemeinerung der in § 3 vorgenommenen Differentiation.

Angenommen, es gäbe für dieselbe Funktion φ noch eine zweite Integraldarstellung

$$\varphi(x) = \int_0^1 \widehat{\varphi}(x, t) d\Psi(t),$$

dann hätten wir

$$0 = \int_0^1 \widehat{\varphi}(x, t) d\Omega(t),$$

wo Ω als Differenz monotoner Funktionen

$$\Omega(t) = \Phi(t) - \Psi(t)$$

von beschränkter Schwankung ist. Wir setzen zunächst

$$\int_0^1 \widehat{\varphi}(x, t) d\Omega(t) = \omega(x)$$

oder ausführlich geschrieben

$$\frac{\omega(x)}{\sqrt{3}} = (1-x) \int_0^x \frac{d\Omega(t)}{1-t} + x \int_x^1 \frac{d\Omega(t)}{t}.$$

Nach einer kleinen Umformung erhalten wir für $0 < x < 1$ und $h > 0$ daraus

$$(32) \quad \frac{\omega(x+h) - \omega(x)}{\sqrt{3} \cdot h} = - \int_0^{x+h} \frac{d\Omega(t)}{1-t} + \int_{x+h}^1 \frac{d\Omega(t)}{t} + \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \frac{t-x}{t(1-t)} d\Omega(t).$$

Das letzte Glied rechts geht nun mit h gegen Null. Wir haben nämlich zunächst

$$\int_x^{x+h} \frac{t-x}{t(1-t)} d\Omega(t) = \int_x^{x+0} + \int_{x+0}^{x+h}$$

und das erste der Integrale auf der rechten Seite verschwindet, weil der Integrand Null ist. Im zweiten Integral setzen wir $\Omega = \Phi - \Psi$ und wenden unseren Mittelwertsatz Ia an. So erhalten wir

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} \frac{t-x}{t(1-t)} d\Omega(t) = \frac{1}{h} \frac{t_1-x}{t_1(1-t_1)} \{ \Phi(x+h) - \Phi(x+0) \} - \frac{1}{h} \frac{t_2-x}{t_2(1-t_2)} \{ \Psi(x+h) - \Psi(x+0) \},$$

$$x < t_1 \leq x+h, \quad x < t_2 \leq x+h.$$

*) Auch nur eine einzige Lösung von beschränkter Schwankung, was man ebenso beweist.

Jetzt erkennt man, daß in der Tat für $h \rightarrow 0$ der Ausdruck verschwindet. Aus (32) folgt somit durch diesen Grenzübergang für die rechte Ableitung von ω

$$\frac{\omega'(x+0)}{\sqrt{3}} = - \int_0^{x+0} \frac{d\Omega(t)}{1-t} + \int_{x+0}^1 \frac{d\Omega(t)}{t}$$

oder

$$(33)_1 \quad \frac{\omega'(x+0)}{\sqrt{3}} = - \int_0^x \frac{d\Omega(t)}{1-t} + \int_x^1 \frac{d\Omega(t)}{t} - \frac{\Omega(x+0) - \Omega(x)}{x(1-x)}.$$

Ebenso ist

$$(33)_2 \quad \begin{aligned} \frac{\omega'(x-0)}{\sqrt{3}} &= - \int_0^{x-0} \frac{d\Omega(t)}{1-t} + \int_{x-0}^1 \frac{d\Omega(t)}{t} \\ &= - \int_0^x \frac{d\Omega(t)}{1-t} + \int_x^1 \frac{d\Omega(t)}{t} + \frac{\Omega(x) - \Omega(x-0)}{x(1-x)}. \end{aligned}$$

Für den Integralwert sind die Funktionswerte von Ω an den Sprungstellen gleichgültig. Wir können daher zum Beispiel die Vereinbarung treffen, daß für jedes $0 < x < 1$ die Gleichung gelten soll

$$2\Omega(x) = \Omega(x-0) + \Omega(x+0).$$

Führen wir nun wieder die verallgemeinerte Ableitung

$$2\omega'(x) = \lim_{h=0} \frac{\omega(x+h) - \omega(x-h)}{h} = \omega'(x-0) + \omega'(x+0)$$

ein, so folgt aus den Gleichungen (33) durch Addition

$$(34) \quad \frac{\omega'(x)}{\sqrt{3}} = - \int_0^x \frac{d\Omega(t)}{1-t} + \int_x^1 \frac{d\Omega(t)}{t}.$$

Für den Sprung des Differentialquotienten findet sich

$$(35) \quad \frac{\omega'(x+0) - \omega'(x-0)}{\sqrt{3}} = - \frac{\Omega(x+0) - \Omega(x-0)}{x(1-x)}.$$

Endlich ergibt sich aus (34) für $0 < x_1 < x_2 < 1$ noch allgemeiner

$$(36) \quad \frac{\omega'(x_2) - \omega'(x_1)}{\sqrt{3}} = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\Omega(t)}{t(1-t)}.$$

Soll nun ω und daher auch ω' identisch verschwinden, so folgt für $0 < x < 1$ zunächst die Stetigkeit von Ω aus (35). Dann wollen wir aus (36) den Beweis führen, daß Ω im Intervallinnern konstant sein muß

$\Omega(x) = C$. Daß auch die Endwerte $\Omega(0)$ und $\Omega(1) = C$ sein müssen, ergibt sich hinterher von selbst.

Wählen wir x_1 und x_2 etwa zunächst in einem Intervall

$$(37) \quad \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad n > 2$$

wo die Funktion

$$\frac{1}{x(1-x)}$$

monoton abnimmt. Dann kann man wegen der Stetigkeit von Ω auf das Stieltjesintegral in (36) den sogenannten zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung*) ohne weiteres übertragen und erhält

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\Omega(t)}{t(1-t)} &= \frac{1}{x_1(1-x_1)} \int_{x_1}^{\xi} d\Omega(t) + \frac{1}{x_2(1-x_2)} \int_{\xi}^{x_2} d\Omega(t) \\ &= \frac{\Omega(\xi) - \Omega(x_1)}{x_1(1-x_1)} + \frac{\Omega(x_2) - \Omega(\xi)}{x_2(1-x_2)}, \\ x_1 &\leq \xi \leq x_2. \end{aligned}$$

Nehmen wir nun an, Ω sei im Intervall (37) nicht konstant und x_1 und x_2 seien die Stellen, aus denen die stetige Funktion Ω in (37) ihren kleinsten und größten Wert annimmt. Daraus hätten aber die beiden Ausdrücke

$$\frac{\Omega(\xi) - \Omega(x_1)}{x_1(1-x_1)}, \quad \frac{\Omega(x_2) - \Omega(\xi)}{x_2(1-x_2)}$$

dasselbe Vorzeichen und mindestens einer wäre von Null verschieden, ihre Summe könnte also nicht verschwinden, wie es nach (36) für $\omega = 0$ sein muß. Damit ist gezeigt, daß $\Omega(x)$ für

$$0 < x \leq \frac{1}{2}$$

gleichen kleinsten und größten Wert haben, d. h. konstant sein muß und ebenso schließt man für das Intervall

$$\frac{1}{2} \leq x < 1.$$

Damit ist der Eindeutigkeitsbeweis erbracht.

Anmerkung. Man kann das in den §§ 1–7 entwickelte Verfahren ohne weiteres übertragen auf den Fall einer allgemeineren Fassung des Begriffs „konvex“. Wir haben (unter Voraussetzung differenzierbarer Funktionen) eine Funktion $y(x)$ konvex genannt, wenn $y''(x) \leq 0$ ist. Allge-

*) Einen einfachen Beweis mittels der Integration nach Teilen unter Anwendung der Integrale von Stieltjes hat für diesen Mittelwertsatz G. Kowalewski angegeben in Math. Ann. 60 (1906), S. 151.

meiner kann man festsetzen: Eine Funktion $y(x)$ heiße im Intervall $0 \leq x \leq 1$ (extremal-) konvex, wenn

$$(38) \quad L(y) = \frac{d}{dx} (p(x) \cdot y') + q(x) \cdot y \leq 0$$

ist. Dabei mögen $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ stetig und $p(x) > 0$ sein und die Differentialgleichung $L(y) = 0$ soll eine Lösung besitzen, die im ganzen Intervall $0 \leq x \leq 1$ positiv ist. Sind $u(x)$ und $v(x)$ zwei linear unabhängige Lösungen der Gleichung $L(y) = 0$, und zwar Lösungen mit positiver Wronskischer Determinante $uv' - v u' > 0$, so läßt sich die Bedingung (38) in der Form schreiben

$$(39) \quad \begin{vmatrix} u(x_1) & v(x_1) & y(x_1) \\ u(x_2) & v(x_2) & y(x_2) \\ u(x_3) & v(x_3) & y(x_3) \end{vmatrix} \leq 0 \quad \text{für} \quad x_1 < x_2 < x_3,$$

die der Bedingung (1) entspricht und auch für nicht differenzierbare $y(x)$ anwendbar bleibt.

§ 8.

Beschränkung durch Randbedingungen.

Die Integraldarstellung normierter positiver konvexer Funktionen φ durch die $\widehat{\varphi}$, die in § 6 bewiesen ist, wollen wir einer Verallgemeinerung unterziehen. Wir betrachten nur solche Funktionen φ , die den Randbedingungen

$$\varphi(0) \geq p, \quad \varphi(1) \geq q$$

genügen. Es sei

$$g(x) = p(1-x) + qx;$$

dann können wir auch sagen: wir betrachten nur solche $\varphi(x)$, die der Bedingung

$$\varphi(x) \geq g(x)$$

genügen. Sollen derartige φ überhaupt existieren, so muß

$$\int_0^1 g(x)^2 dx = \frac{p^2 + pq + q^2}{3} \leq 1^*$$

sein. Unter den $\varphi(x)$ gibt es solche, die aus zwei geradlinigen Stücken bestehen, und zu Randordinaten gerade p und q selbst haben. Sie mögen mit $\widehat{\varphi}_{pq}(x, \xi)$ bezeichnet werden, wobei ξ die Abszisse der Ecke ist. Man hat also

$$\widehat{\varphi}_{pq}(0, \xi) = p, \quad \widehat{\varphi}_{pq}(1, \xi) = q,$$

*) Es ist im Folgenden immer $\frac{p^2 + pq + q^2}{3} < 1$ vorausgesetzt, da der Fall des Gleichheitszeichens, wo überhaupt nur ein einziges $\varphi(\varphi = g)$ existiert, zu keiner Frage Anlaß gibt.

und aus der Normierungsbedingung folgt*)

$$(\eta + p + q)(\eta - p[1 - \xi] - q\xi) = 3 - p^2 - pq - q^2,$$

als Gleichung für die Eckenordinate

$$\eta = \widehat{\varphi}_{pq}(\xi, \xi).$$

Die Differenz

$$\varphi(x) - g(x)$$

ist eine positive konvexe Funktion; wenn wir sie durch die Konstante

$$K = \sqrt{\int_0^1 (\varphi - g)^2 dx}$$

dividieren, so wird sie auch normiert. Ähnliches gilt von

$$\widehat{\omega}(x, \xi) = \widehat{\varphi}_{pp}(x, \xi) - g(x);$$

es sei

$$k(\xi) = \sqrt{\int_0^1 \widehat{\omega}(x, \xi)^2 dx},$$

so ist

$$\frac{\widehat{\omega}(x, \xi)}{k(\xi)}$$

positiv, konvex und *normiert*. Aber diese Funktion hat die Randordinaten gleich Null und besteht aus zwei geradlinigen Stücken, sie ist daher mit $\widehat{\varphi}(x, \xi)$ (§ 1) identisch:

$$\widehat{\omega}(x, \xi) = k(\xi) \cdot \widehat{\varphi}(x, \xi).$$

Nun besteht gemäß § 6 eine Darstellung

$$\frac{\varphi(x) - g(x)}{K} = \int_0^1 \widehat{\varphi}(x, \xi) d\Phi(\xi),$$

wofür wir auch schreiben können

$$\varphi(x) - g(x) = \int_0^1 \widehat{\omega}(x, \xi) \frac{K}{k(\xi)} d\Phi(\xi).$$

Definieren wir eine Funktion $\Psi(x)$ durch

$$\Psi(x) = \int_0^x \frac{K}{k(\xi)} d\Phi(\xi),$$

so ergibt sich

$$(40) \quad \varphi(x) - g(x) = \int_0^1 \widehat{\omega}(x, \xi) d\Psi(\xi),$$

*) Vgl. F. I § 8.

$\Psi(x)$ ist monoton zunehmend, wie es sein muß. Die Formel geht in die alte (§ 6) über für $g(x) = 0$.

Wir wollen zeigen, daß

$$(41) \quad M = \int_0^1 d\Psi(x) \geq 1$$

ist. Statt (40) kann man schreiben

$$\varphi(x) - g(x) = -Mg(x) + \int_0^1 \widehat{\varphi}_{p_2}(x, \xi) d\Psi(\xi).$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$f(x) = \frac{1}{M} \int_0^1 \widehat{\varphi}_{p_2}(x, \xi) d\Psi(\xi),$$

so wird

$$\varphi(x) - g(x) = M\{f(x) - g(x)\}.$$

Hiernach entsprechen in der Beziehung

$$\varphi(x) \cong f(x)$$

die drei Zeichen in derselben Aufeinanderfolge den Zeichen in

$$M \cong 1.$$

Nun ist

$$(f, f) = \frac{1}{M^2} \int_0^1 dx \int_0^1 \widehat{\varphi}_{p_2}(x, \xi) d\Psi(\xi) \int_0^1 \widehat{\varphi}_{p_2}(x, \xi') d\Psi(\xi'),$$

oder nach Abänderung der Integrationsfolge

$$(f, f) = \frac{1}{M^2} \int_0^1 d\Psi(\xi) \int_0^1 d\Psi(\xi') \int_0^1 \widehat{\varphi}_{p_2}(x, \xi) \widehat{\varphi}_{p_2}(x, \xi') dx,$$

und, da infolge der bekannten Schwarzschen Ungleichung

$$\int_0^1 \widehat{\varphi}_{p_2}(x, \xi) \widehat{\varphi}_{p_2}(x, \xi') dx \leq 1$$

ist, ergibt sich

$$(f, f) \leq \frac{1}{M^2} \left\{ \int_0^1 d\Psi(\xi) \right\}^2 = 1.$$

Da φ normiert ist, gilt also

$$(\varphi, \varphi) \geq (f, f)$$

und folglich

$$\varphi(x) \geq f(x),$$

da das Vorzeichen von $\varphi - f$ im ganzen Intervall unveränderlich ist. Endlich hat man also

$$M \geq 1,$$

w. z. b. w.

§ 9.

Das Minimum von (φ, h) . Anwendung auf den Beweis der Sätze von F. I.

Es sei $h(x)$ eine willkürlich gegebene positive integrable Funktion. Welches ist der kleinste Wert, den (φ, h) annimmt für alle φ , die den Randbedingungen

$$\varphi(0) \geq p, \quad \varphi(1) \geq q$$

genügen?

Nach Gleichung (40) § 8 ist

$$\begin{aligned} (\varphi, h) &= (g, h) + \int_0^1 h(x) dx \int_0^1 \widehat{\omega}(x, \xi) d\Psi(\xi) \\ &= (g, h) + \int_0^1 (\widehat{\omega}, h) d\Psi(\xi). \end{aligned}$$

Im abgeschlossenen Intervall $0 \leq \xi \leq 1$ existiert ein ξ_0 , so daß

$$\widehat{\omega}(x, \xi_0) = \widehat{\omega}_0$$

einen möglichst kleinen Wert von $(\widehat{\omega}_0, h)$ ergibt; es ist also

$$\begin{aligned} (\varphi, h) &\geq (g, h) + M(\widehat{\omega}_0, h) \\ &\geq (g, h) + (\widehat{\omega}_0, h) \end{aligned} \quad ((41), \S 8)$$

oder

$$(\varphi, h) \geq (\widehat{\varphi}_{pq}(x, \xi_0), h(x)).$$

Wir haben also den Satz: (φ, h) nimmt seinen kleinsten Wert für ein φ aus den $\widehat{\varphi}_{pq}$ an.

Durch diesen Satz ist die gestellte Aufgabe auf eine gewöhnliche Minimumbestimmung für eine Funktion einer Variablen ξ , nämlich

$$\Omega(\xi) = (\widehat{\varphi}_{pq}(x, \xi), h(x)) = \int_0^1 \widehat{\varphi}_{pq}(x, \xi) h(x) dx$$

zurückgeführt.

Wir wollen dieses Resultat zunächst benutzen, um einen neuen Beweis für die Sätze von F. I. zu erbringen (vgl. insbes. F. I., § 9). Es handelt sich dabei darum, den dort mit (Va) bezeichneten Satz, aus dem alles Übrige folgt, neu zu beweisen, insbesondere die dort verwendeten massen-geometrischen Erwägungen durch rein analytische Herleitungen zu ersetzen. Wir werden also Folgendes zu zeigen haben (S. a. a. O. S. 373): Es sei $\varphi(x)$ positiv, konvex, normiert und

$$\varphi(0) \geq p, \quad \varphi(1) \geq q,$$

$\widehat{\varphi}_{p_2}(x, \xi)$ habe dieselbe Bedeutung wie oben, und endlich sei

$$\overline{\varphi}(x) = \lambda + \mu x$$

mit positivem λ und μ . Dann ist ξ so wählbar, daß für alle $\varphi(x)$ die Relation

$$\int_0^1 \overline{\varphi} \varphi \, dx \geq \int_0^1 \overline{\varphi} \widehat{\varphi}_{p_2} \, dx$$

besteht.

Das folgt aber unmittelbar aus dem früher gewonnenen Satze, wenn man

$$h(x) = \varphi(x)$$

setzt.

§ 10.

Ein allgemeiner Satz.

Wir setzen in diesem Abschnitt $p=0$, $q=0$ voraus. Um die Funktion

$$\Omega(\xi) = \int_0^1 \widehat{\varphi}(x, \xi) h(x) \, dx,$$

deren Minimum in Frage ist, unter Voraussetzung eines positiven, konvexen, im übrigen beliebigen $h(x)$ genauer zu untersuchen, verwenden wir für $h(x)$ die in § 6 gegebene Integraldarstellung, also

$$h(x) = \int_0^1 \widehat{\varphi}(x, t) \, dH(t).$$

Durch Einsetzen derselben und Umkehrung der Integrationsfolge ergibt sich

$$\Omega(\xi) = \int_0^1 \omega(\xi, t) \, dH(t),$$

worin zur Abkürzung

$$\omega(\xi, t) = \int_0^1 \widehat{\varphi}(x, \xi) \widehat{\varphi}(x, t) \, dx$$

gesetzt ist. Dieses Integral ist leicht auszuwerten und ergibt

$$\omega(\xi, t) = \begin{cases} \xi - \frac{1}{2}(\xi^2 + t^2) & \text{für } t < \xi, \\ t - \frac{1}{2}(\xi^2 + t^2) & \text{für } t > \xi; \end{cases}$$

für $t = \xi$ fallen beide Ausdrücke zusammen und geben Eins, wie durch die Normierung bedingt ist. Die Kurve

$$\eta = \omega(\xi, t)$$

in rechtwinkligen Koordinaten ξ, η (im Intervall $0 \leq \xi \leq 1$) besteht, wie man sieht, aus zwei Hyperbelbogen. Für $\xi < t$ hat man es mit der Hyperbel

$$(\xi - 1)(\xi - 2t\eta + 1) = -(1 - t)^2$$

zu tun, deren Asymptoten

$$\xi = 1, \quad \xi - 2t\eta = -1$$

sind. Sie berührt die Gerade $\eta = 1$ im Punkte $(t, 1)$ und ist konvex in dem Sinne, in dem dieses Wort hier stets verstanden wird. Für $\xi > 1$ handelt es sich um die Hyperbel

$$\xi(\xi + 2(1 - t)\eta - 2) = -t^2$$

mit den Asymptoten

$$\xi = 0, \quad \xi + 2(1 - t)\eta = 2,$$

welche die Gerade $\eta = 1$ im selben Punkte $(t, 1)$ berührt, und gleichfalls konvex ist. Die Figur macht diese Verhältnisse anschaulich.

Die beiden Hyperbelbogen zusammen bilden somit eine im Intervall $0 \leq \xi \leq 1$ konvexe Kurve. Da also

$$\eta = \omega(\xi, t)$$

konvex ist, stellt (vgl. den analogen Schluß in § 3) auch

$$\eta = \Omega(\xi) = \int_0^1 \omega(\xi, t) dH(t)$$

eine konvexe Kurve dar. $\Omega(\xi)$ nimmt also ein Minimum für $\xi = 0$ oder $\xi = 1$, vielleicht für beide Werte an.

Hiermit ist der von Frank vermutete Satz gewonnen:

Unter allen positiven normierten konvexen Funktionen $\varphi(x)$ macht entweder

$$\varphi(x) = x\sqrt[3]{3}$$

oder

$$\varphi(x) = (1-x)\sqrt[3]{3}$$

(oder beide diese Funktionen) die Größe

$$(\varphi(x), h(x)) = \int_0^1 \varphi(x) h(x) dx$$

zu einem Minimum, wenn $h(x)$ eine beliebige gegebene positive konvexe Funktion bedeutet.

Ist $h(x)$ selbst normiert, so kann man statt dessen in der Ausdrucksweise von F. I auch sagen:

Unter allen positiven normierten konvexen Funktionen $\varphi(x)$ hat entweder

$$\varphi(x) = x\sqrt[3]{3}$$

oder

$$\varphi(x) = (1-x)\sqrt[3]{3}$$

(oder diese beiden Funktionen) von einer beliebig gegebenen positiven normierten konvexen Funktion ein Minimum des sphärischen Abstands.

Überhaupt sind alle Betrachtungen dieser Abhandlung „geometrisch“ deutbar im Funktionenraum und insbesondere kommt man auf diese „geometrische“ Deutung unserer Integraldarstellung der konvexen Funktionen, wenn man den Begriff des kleinsten konvexen Körpers über eine Punktmenge auf den Funktionenraum überträgt.

Man kann schließlich auch versuchen die gewonnenen Ergebnisse auf konvexe Funktionen in zwei oder mehr Veränderlichen zu verallgemeinern*), doch sind da erheblich größere Schwierigkeiten zu überwinden, da in diesen Fällen kein einfaches Analogon unserer Integraldarstellung vorhanden ist. Die dabei auftretenden Existenzfragen kann man durch ein allgemeines Verfahren erledigen ähnlich, wie es von Blaschke zum Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel angewandt wurde.**)

*) Ein Anfang dazu ist gemacht in der Note: Blaschke, Évaluation d'intégrales doubles des fonctions convexes, C. R. Paris 168 (1914), S. 778.

**) Kreis und Kugel, Jahresbericht der Math. Ver. 24 (1914), S. 195—207.