

I. *Ueber den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige; vom Studiosus Kirchhoff.*

Mitglied des physikalischen Seminars zu Königsberg.

Leitet man einen constanten galvanischen Strom durch eine Metallscheibe, so wird sich die Elektricität in dieser auf eine bestimmte Weise vertheilen. Die Art der Vertheilung kann man nach den von Ohm aufgestellten Principien theoretisch ermitteln. Ich habe die dazu nöthige Rechnung unter der Voraussetzung, daß der Zustand der Scheibe ein stationärer geworden sey, in dem Falle durchgeführt, daß die Scheibe eine kreisförmige ist, und daß die Elektricität durch einen Draht in sie hinein, durch einen zweiten aus ihr heraustrete. Das Resultat wurde insbesondere einfach, wenn der Ein- und der Austrittspunkt in der Peripherie der Scheibe liegen; in diesem Falle habe ich dasselbe durch Versuche geprüft und, wie es mir scheint, eine hinreichende Bestätigung gefunden. Ich will hier zuerst die theoretischen Betrachtungen angeben, und dann die Experimente beschreiben, die ich angestellt habe.

Bestimmen wir die Lage eines Punktes der leitenden Ebene durch die rechtwinklichen Coordinaten  $x$  und  $y$ , so ist die elektrische Spannung desselben,  $u$ , eine Function von  $x$  und  $y$ ; d. h. es ist:

$$u = f(x, y)$$

Die Gleichung  $f(x, y) = u_0$  stellt, wenn  $u_0$  eine Constante bezeichnet, ein Curve dar, in der alle Punkte dieselbe Spannung haben. Wir betrachten zwei solche unendlich nahe liegende „Curven gleicher Spannung:“

$$f(x, y) = u^0$$

$$f(x, y) = u^0 + du,$$

nehmen in der ersten 2 unendlich nahe liegende Punkte  $A, B$  an (Fig. 1. Taf. V.), und ziehen in ihnen die Normalen; diese sind zugleich Normalen der zweiten Curve in den Punkten  $A', B'$ , so daß  $ABA'B'$  ein unendlich kleines Rechteck ist, bei dem jeder Punkt der Seite  $AB$  die Spannung  $u_0$ , und jeder Punkt der Seite  $A'B'$  die Spannung  $u_0 + du$  hat; durch dieses Rechteck fließt also, nach den Ohm'schen Principien, in der Zeiteinheit in der Richtung von  $AA'$  eine Elektrizitätsmenge, die

$$= -k \cdot AB \cdot \frac{du}{AA'}$$

ist, wo  $k$  die Leitungsfähigkeit der Scheibe bezeichnet; nehmen wir an, daß dieselbe die unendlich kleine Dicke  $\delta$  habe, so tritt  $\delta$  noch als Factor hinzu, so daß der Ausdruck:

$$-k \cdot \delta \cdot AB \cdot \frac{du}{AA'}$$

wird. Dieselbe Menge von Elektrizität fließt durch eine jede Linie  $CD$ , die wir durch das Rechteck  $ABA'B'$  ziehen; ziehen wir  $CD$  parallel der  $x$  Axe, und setzen den Winkel, den  $AA'$ , d. h. die Richtung des Stromes, mit dieser bildet,  $=\varphi$ , so ist die Elektrizitätsmenge, die durch  $CD$  fließt:

$$= -k \cdot \delta \cdot CD \cdot \sin \varphi \cdot \frac{du}{AA'}$$

Dieser Ausdruck läßt sich noch auf eine andere Form bringen; es ist nämlich:

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy$$

wo  $dx$  und  $dy$  die Unterschiede der Coordinaten von  $A$  und  $A'$  bezeichnen; hieraus folgt:

$$\frac{du}{AA'} = \frac{du}{dx} \cos \varphi + \frac{du}{dy} \sin \varphi;$$

da ferner der Punkt  $A$  dieselbe Spannung hat, als  $B$ , so muß

$$0 = \frac{du}{dx} \sin \varphi - \frac{du}{dy} \cdot \cos \varphi$$

seyn; aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{du}{AA'} \cos \varphi = \frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{AA'} \sin \varphi = \frac{du}{dy}.$$

Der obige Ausdruck ist also:

$$= -k \cdot \delta \cdot CD \cdot \frac{du}{dy}.$$

Da die Lage des Coordinatensystemes eine ganz willkürliche war, so ist das Resultat der angestellten Untersuchung: daß durch irgend ein lineares Element  $ds$  in der Zeiteinheit eine Menge von Electricität fließt, die

$$= -k \cdot \delta \cdot ds \cdot \frac{du}{dN}$$

ist, wenn wir mit  $\frac{du}{dN}$  die Differentiation nach der Richtung der Normale von  $ds$  bezeichnen.

Durch diese Bemerkung wird es leicht, die Bedingung zu finden, der  $u$  genügen muß, damit der elektrische Zustand der Scheibe ein stationärer seyn könne. Betrachten wir nämlich eine geschlossene Curve in derselben, innerhalb der ihr keine Electricität zugeführt wird, so muß die Summe aller Electricitätsmengen, die durch diese Curve fließen  $= 0$  seyn; es muß also:

$$\int ds \cdot \frac{du}{dN} = 0$$

seyn, wenn dieses Integral über die ganze Curve ausgedehnt wird. Bezeichnen wir die Winkel, die  $N$  mit den Coordinatenaxen bildet, durch  $(N, x)$  und  $(N, y)$ , so haben wir:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dN} &= \frac{du}{dx} \cos(N, x) + \frac{du}{dy} \cos(N, y) \\ dx &= -ds \cdot \cos(N, y) \\ dy &= ds \cdot \cos(N, x), \end{aligned}$$

und die Gleichung wird diese '):

$$\int \left( \frac{du}{dx} dy - \frac{du}{dy} dx \right) = 0.$$

Denken wir uns den Fall, daß die Elektrizität durch einzelne Punkte in die Scheibe und aus ihr heraustrete, und betrachten nun zweitens eine geschlossene Curve, die einen von den Eintrittspunkten umschließt, so muß in Bezug auf sie:

$$-k \cdot \delta \cdot \int ds \cdot \frac{du}{dN} = -k \cdot \delta \cdot \int \left( \frac{du}{dx} dy - \frac{du}{dy} dx \right) = E$$

seyn, wenn  $E$  die Elektrizitätsmenge bezeichnet, die durch diesen Punkt der Scheibe zugeführt wird.

Als dritte Bedingung für  $u$  tritt noch hinzu, daß für die Grenze der Scheibe  $\frac{du}{dN} = 0$  seyn muß, weil durch diese an keiner Stelle Elektrizität zu- oder abfließen soll; d. h. daß die Curven gleicher Spannung die Gränze senkrecht schneiden <sup>2)</sup>. Ist die Scheibe unbegrenzt, so fällt

- 1) Da die betrachtete Curve eine ganz beliebige war (außer daß sie gewisse Punkte nicht umschließen sollte), so kann diese Bedingung nicht anders erfüllt werden, als daß  $\frac{du}{dx} dx - \frac{du}{dy} dy$  ein vollständiges Differential,  $= d\nu$ , ist; d. h. es muß:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0$$

seyn. Die Gleichung  $d\nu = 0$ , d. h.  $\nu = \text{const}$ , stellt ein System von Curven dar, die die Curven gleicher Spannung senkrecht schneiden, d. h. die Strömungslinien.

- 2) Bestände die Scheibe aus zwei Stoffen von verschiedener Leitungsfähigkeit, so würden für die Berührungcurve beider folgende Bedingungen hinzukommen (wenn  $k$  und  $k'$  die Leitungsfähigkeiten,  $u$  und  $u'$  die Spannungen bezeichnen):

$$k \cdot \frac{du}{dN} = k' \cdot \frac{du'}{dN}$$

und  $u - u' =$  der elektromotorischen Kraft, die durch die Berührung der beiden Stoffe erzeugt wird.

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$\frac{du}{ds} = \frac{du'}{ds};$$

die letzte Bedingung fort; an ihre Stelle tritt die, daß die Spannung in der Unendlichkeit = einer constanten endlichen Größe ist.

Fügen wir noch hinzu, daß die Elektrizitätsmenge, welche die ganze Scheibe enthält = einer gegebenen sey, oder daß die Spannung in einem bestimmten Punkte eine gegebene sey, so haben wir alle Bedingungen aufgestellt, welchen  $u$  nach unserer Theorie genügen muß; durch diese muß  $u$  eindeutig bestimmt seyn, da die Vertheilung der Elektrizität bei einem bestimmten Experimente nur *eine* bestimmte seyn kann. Haben wir also eine Function für  $u$  gefunden, welche diesen Bedingungen genügt, so können wir sicher seyn, daß diese die wirkliche Vertheilung angiebt, falls die Theorie die richtige ist.

Wir wollen zuerst den Fall näher betrachten, wenn die Scheibe unbegrenzt ist. Es seyen  $A_1, A_2 \dots A_n$  die Einströmungspunkte (ich will der Kürze halber jetzt unter diesem Namen sowohl die Einströmungspunkte im engeren Sinne als auch die Ausströmungspunkte verstehen, und will die Elektrizitätsmengen, die durch die letzteren abfließen, als negative einströmende bezeichnen); die Elektrizitätsmengen, die durch diese in der Zeiteinheit in die Scheibe treten, seyen  $E_1, E_2 \dots E_n$ , wobei

wir erhalten durch Division dieser Gleichung und der ersten:

$$k \cdot \frac{\frac{du}{dN}}{\frac{du}{ds}} = k' \cdot \frac{\frac{du'}{dN'}}{\frac{du'}{ds}}$$

Es ist aber  $\frac{\frac{du}{dN}}{\frac{du}{ds}} = \text{der cotg. des Winkels, den die Richtung des Stromes im ersten Medium mit } N \text{ bildet;}$

nennen wir diesen Winkel  $\varphi$ , und den entsprechenden für das zweite Medium  $\varphi'$ , so haben wir:

$$\text{tg } \varphi : \text{tg } \varphi' = k : k'$$

Diese Proportion giebt das Gesetz an, nach dem ein elektrischer Strom gebrochen wird, wenn er aus einem Medium in ein anderes tritt.

$E_1 + E_2 + \dots + E_n = 0$  seyn muß; bezeichnen wir dann die Entfernungen eines Punktes in dieser von  $A_1, A_2 \dots$  durch  $r_1, r_2 \dots r_n$ , so läßt sich leicht zeigen, daß wir allen aufgestellten Bedingungen genügen, wenn wir:

$$u = M - \frac{E_1}{2\pi \cdot k \cdot \delta} \log r_1 - \frac{E_2}{2\pi \cdot k \cdot \delta} \log r_2 - \dots - \frac{E_n}{2\pi \cdot k \cdot \delta} \log r_n$$

setzen.

Bilden wir nämlich das unbestimmte Integral:

$$\int \left( \frac{du}{dx} dy - \frac{du}{dy} dx \right),$$

so finden wir dieses:

$$= -\frac{1}{2\pi k \delta} (E_1 \cdot (r_1, R) + E_2 \cdot (r_2, R) + \dots + E_n \cdot (r_n, R))$$

wenn wir durch  $(r_1, R), (r_2, R) \dots$  die Winkel bezeichnen, die  $r_1, r_2 \dots$  mit einer festen Linie  $R$  bilden. Nehmen wir von diesem Integral die Gränzen in Bezug auf eine geschlossene Curve, welche keinen von den Einströmungspunkten umschließt, so wird es  $= 0$ ; umschließt die Curve einen von den Punkten  $A_1, A_2 \dots$  etwa  $A_1$ , so wird das Integral in Bezug auf sie  $= -\frac{1}{k \cdot \delta} \cdot E_1$ ;

also die Menge von Elektrizität, die in der Zeiteinheit durch sie hindurchströmt  $= E_1$ . Die dritte Bedingung wird ebenfalls erfüllt, denn für einen Punkt in der Unendlichkeit ist  $r_1 = r_2 = \dots$ ; also:

$$\begin{aligned} u &= M + \frac{1}{2\pi k \delta} (E_1 + E_2 + \dots + E_n) \log r_1 \\ &= M. \end{aligned}$$

Um endlich der vierten Bedingung zu genügen, haben wir nur nöthig, der Constanten  $M$  einen passenden Werth zu geben.

Derselbe Ausdruck für  $u$  wird auch gelten, wenn die Scheibe begränzt ist, sobald nur die Gränze die Curven gleicher Spannung senkrecht schneidet.

Nehmen wir an, daß es nur zwei Einströmungspunkte gäbe, so ist:

$$u = M + N \cdot \log \frac{r_2}{r_1},$$

wo  $N \cdot 2\pi k \delta = E_1 = -E_2$  gesetzt ist; die Curven gleicher Spannung werden also dargestellt durch die Gleichung:

$$\frac{r_2}{r_1} = \text{const};$$

sie sind also Kreise, welche über der Entfernung zweier Punkte als Durchmesser beschrieben sind, die zu  $A_1$  und  $A_2$  harmonisch liegen. Die Curven, welche diese senkrecht schneiden (d. h. die Strömungscurven), sind die Kreise, welche durch  $A_1$  und  $A_2$  gelegt werden können; wird die Scheibe also durch einen oder mehrere solcher Kreise begränzt, so hat  $u$  den angegebenen Werth <sup>1)</sup>.

Den beiden ersten Bedingungen für  $u$  wird für eine begränzte Scheibe immer genügt durch:

$$u = M - \frac{1}{2\pi k \delta} (E_1 \log r_1 + E_2 \log r_2 + \dots + E_n \log r_n + E'_1 \log r'_1 + E'_2 \log r'_2 + \dots + E'_m \log r'_m),$$

wo  $r_1, r_2, \dots, E_1, E_2, \dots$  dieselbe Bedeutung wie oben haben. wo ferner  $r'_1, r'_2, \dots$  die Entfernungen des in Rede stehenden Punktes der Scheibe von willkürlichen Punkten  $A'_1, A'_2, \dots$ , die auferhalb dieser liegen, bezeichnen, und  $E'_1, E'_2, \dots$  beliebige Coëfficienten sind. In manchen Fällen wird man die Punkte  $A'_1, A'_2, \dots$  und die Coëfficienten  $E'_1, E'_2, \dots$  so bestimmen können, dafs auch der dritten Bedingung genügt wird, d. h. dafs die Curven  $u = \text{const}$  die Gränze der Scheibe rechtwinklich schneiden. Ist die Scheibe eine kreisförmige, so ist dieses immer möglich.

Betrachten wir zuerst den Fall, dafs nur zwei Einströmungspunkte vorhanden sind, so ist der Ausdruck für  $u$ , wenn wir wieder  $2\pi k \delta N = E_1 = -E_2$  setzen:

$$u = M + N \left( \log \frac{r_2}{r_1} + \log \frac{r'_2}{r'_1} \right),$$

- 1) Die Curven, welche alle Punkte enthalten, die von gleich starken Strömen durchflossen werden, sind in diesem Falle Lemniscaten, deren Gleichung  $r_1 \cdot r_2 = \text{const}$  ist.

wo wir die Punkte  $A'_1$  und  $A'_2$  durch folgende Construction finden: Wir verbinden den Mittelpunkt der Scheibe  $C$  (Taf. V. Fig. 2.) mit  $A_1$  und  $A_2$ , und schneiden auf den verlängerten Linien  $CA_1$ ,  $CA_2$  zwei solche Stücke  $CA'_1$  und  $CA'_2$  ab, daß der Radius der Scheibe die mittlere Proportionale zwischen  $CA_1$  und  $CA'_1$ , und zwischen  $CA_2$  und  $CA'_2$  ist <sup>1)</sup>

- 1) Der Beweis dafür, daß die Curven  $\log \frac{r_2}{r_1} + \log \frac{r'_2}{r'_1} = \text{const}$  die Gränze der Scheibe senkrecht schneiden, ist folgender: Die Gleichung der Curven, welche jene rechtwinklich schneiden, ist:

$$\nu = (r_2, R) - (r_1, R) + (r'_2, R) - (r'_1, R) = \text{const}.$$

Führen wir rechtwinkliche Coordinaten ein, so wird dieses eine Gleichung des vierten Grades. Sowohl die Curven:  $\log \frac{r_2}{r_1} = \text{const}$ , als auch die Curven:  $\log \frac{r'_2}{r'_1} = \text{const}$ , schneiden den Kreis, der durch die vier Punkte  $A_1, A_2, A'_1, A'_2$  gelegt werden kann, rechtwinklich; dieser wird also auch von den Curven  $\log \frac{r_2}{r_1} + \log \frac{r'_2}{r'_1} = \text{const}$  rechtwinklich geschnitten; seine Gleichung muß daher auch in der Gleichung  $\nu = \text{const}$  enthalten seyn; wir schliessen daraus, daß der linke Theil dieser Gleichung, wenn sie auf 0 gebracht ist, sobald wir der Constanten einen passenden Werth geben, sich in zwei Factoren zerlegen läßt, von denen der eine der linke Theil der auf 0 gebrachten Gleichung des durch  $A_1, A_2, A'_1, A'_2$  gelegten Kreises ist; es läßt sich zeigen, daß der andere Factor, wenn er = 0 gesetzt wird, die Gleichung der Gränze der Scheibe bildet. Machen wir  $C$  zum Anfangspunkte der Coordinaten, setzen wir  $CA_1 = \varrho_1$ ,  $CA_2 = \varrho_2$ ,  $CA'_1 = \varrho'_1$ ,  $CA'_2 = \varrho'_2$ , nennen wir ferner den Winkel, den  $\varrho_1$  mit der  $x$  Axe bildet,  $\varphi_1$  und den Winkel, den  $\varrho_2$  mit ihr bildet,  $\varphi_2$ , so werden die Gleichungen der beiden in Rede stehenden Kreise:

$$x^2 + y^2 - \varrho_1 \cdot \varrho'_1 = 0 \quad (\text{oder } x^2 + y^2 - \varrho_2 \cdot \varrho'_2 = 0)$$

und:

$$x^2 + y^2 + \frac{(\varrho_1 + \varrho'_1) \sin \varphi_2 - (\varrho_2 + \varrho'_2) \sin \varphi_1}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)} x - \frac{(\varrho_1 + \varrho'_1) \cos \varphi_2 - (\varrho_2 + \varrho'_2) \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)} y + \varrho_1 \cdot \varrho'_1 = 0.$$

Die Gleichung  $\nu = C$  wird, wenn wir für  $R$  die  $y$  Axe annehmen:

Haben wir  $n$  Einströmungspunkte, so wird der Ausdruck für  $u$ , wenn wir der Kürze wegen  $N_i$  für  $\frac{E_i}{2\pi k \delta}$  setzen:

$$u = M - N_1 (\log r_1 + \log r'_1) - N_2 (\log r_2 + \log r'_2) - \dots - N_n (\log r_n + \log r'_n),$$

wo wir die Punkte  $A'_1, A'_2 \dots$  wieder durch dieselbe Construction finden, indem wir  $C$  mit  $A_1, A_2 \dots$  verbinden und auf den verlängerten Verbindungslinien solche Stücke  $CA'_1, CA'_2 \dots$  abschneiden, daß der Radius der Scheibe die mittlere Proportionale zwischen  $CA_1$  und  $CA'_1$ , zwischen  $CA_2$  und  $CA'_2$  u. s. w. ist <sup>1)</sup>.

Beschreiben wir um die einzelnen Einströmungspunkte geschlossene Curven, und denken wir uns, daß diesen Curven die Elektrizität nicht durch die Punkte  $A_1, A_2 \dots$  zugeführt würde, sondern auf irgend eine andere Weise (etwa durch Cylinderoberflächen, die in ihnen errichtet sind), doch so, daß einem jeden Punkte dieser Curven gerade so viel zugeführt wird, als früher, so wird sich der elektrische Zustand der Scheibe (mit Ausnahme

$$C = \text{arc tg} \frac{x - \varrho_2 \cos \varphi_2}{y - \varrho_2 \sin \varphi_2} - \text{arc tg} \frac{x - \varrho_1 \cos \varphi_1}{y - \varrho_1 \sin \varphi_1} + \text{arc tg} \frac{x - \varrho'_2 \cos \varphi_2}{y - \varrho'_2 \sin \varphi_2} - \text{arc tg} \frac{x - \varrho'_1 \cos \varphi_1}{y - \varrho'_1 \sin \varphi_1}.$$

Bringen wir diese Gleichung auf eine algebraische Form und setzen  $C = \varphi_1 - \varphi_2$ , so erhalten wir eine Gleichung, welche identisch mit dem Product der beiden ersten Gleichungen ist.

1) Da nämlich  $N_1 + N_2 + \dots + N_n = 0$  ist, so läßt sich  $u$  unter folgender Form darstellen:

$$u = M - \sum \frac{N_k - N_\lambda}{n} (\log r_k + \log r'_k - \log r_\lambda - \log r'_\lambda),$$

wo die Summe in Bezug auf  $k$  und  $\lambda$  zu nehmen ist, doch so, daß  $\lambda$  immer größer als  $k$  ist (denn suchen wir in den beiden Ausdrücken für  $u$  die Coefficienten von  $\log r_1 + \log r'_1$ , so finden wir sie gleich); ein einzelnes Glied dieses Ausdrucks  $= \text{const}$  gesetzt, stellt nach dem Vorigen ein System von Curven dar, welche die Gränze der Scheibe senkrecht schneiden; ein solches System stellt also auch die Summe  $= \text{const}$  gesetzt, dar.

der Fläche der Curven) nicht ändern, es wird also für  $u$  derselbe Ausdruck gelten. Wir wollen zu diesen Curven unendlich kleine Kreise nehmen, deren Mittelpunkte  $A_1, A_2 \dots$  sind; diesen Kreisen wurden von den Punkten  $A_1, A_2 \dots$  die Elektrizitätsmengen  $E_1, E_2 \dots$  zugeführt, und zwar vertheilt sich eine jede gleichmäÙig auf alle Theile des zugehörigen Kreises <sup>1)</sup>); denken wir uns also diese Kreise als die Peripherien der Flächen, mit denen die Scheibe von Drähten berührt wird, die ihr die Elektrizitätsmengen  $E_1, E_2 \dots$  zuführen, so wird der aufgestellte Ausdruck für  $u$  Gültigkeit haben, wenn wir annehmen können, daß der Strom in einem jeden Drahte gleichmäÙig in Bezug auf seine Axe vertheilt sey. In einiger Entfernung von der Scheibe findet diese Vertheilung im Drahte statt, da also die Möglichkeit da ist, daß sie bis zum Ende des Drahtes bleibe, so wird dieses wirklich eintreffen.

Wir haben bis jetzt  $E_1, E_2 \dots$  immer als unmittelbar gegeben betrachtet; verfolgen wir ein bestimmtes Experiment, so müssen wir diese GröÙen erst durch Rechnung ermitteln. Ich will von dieser Rechnung ein einfaches Beispiel geben, wobei wir zugleich den Widerstand der Scheibe finden werden.

Zwei um  $A_1$  und  $A_2$  beschriebene Kreise seyen die

- 1) Die Curven gleicher Spannung in der Nähe des Punktes  $A_1$  werden die concentrischen Kreise  $r_1 = const$ , weil hier  $r_1$  unendlich klein gegen  $r_2, r_3 \dots r'_1, r'_2 \dots$  ist; und hieraus folgt, daß sich die Elektrizität vom Punkte  $A_1$  gleichmäÙig nach allen Richtungen hin verbreitet. Diese Betrachtung gilt jedoch nicht, wenn  $A_1$  sehr nahe an der Peripherie der Scheibe liegt, denn dann wird auch  $r'_1$  unendlich klein. Befindet sich also einer von den Drähten sehr nahe an der Gränze, so wird der für  $u$  aufgestellte Ausdruck für Punkte, die nahe am Drahte liegen, nicht gelten; daß er dennoch für entfernte Punkte gilt, ergibt sich, wenn wir für den Draht eine unendliche Zahl sehr nahe liegender Einströmungspunkte substituiren. Hieraus ergibt sich denn auch, daß im allgemeinen Fall die Gestalt der Drähte in Bezug auf die Spannung der entfernt liegenden Punkte von gar keinem Einfluß ist, wenn sie nur als unendlich dünn betrachtet werden können.

beiden Enden eines Drahtes, der den Radius  $\rho$  und die Leitungsfähigkeit  $k'$  habe. In einem Querschnitte des Drahtes  $D$  habe die elektromotorische Kraft  $K$  ihren Sitz; es soll der elektrische Zustand der Schließung ermittelt werden.

Bezeichnen wir die Länge des Drahtes von dem Querschnitte  $D$  bis zu einem andern Querschnitte mit  $l$ , so ist die Spannung dieses:

$$\left. \begin{aligned} u' &= m - nl. \\ u' &= m - K + nl' \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{für die eine Hälfte des Drahtes,} \\ \text{für die andere Hälfte.} \end{array}$$

Die Spannung eines Punktes der Scheibe ist:

$$u = M - \frac{E}{2\pi \cdot k \cdot \delta} \log \frac{r_1 \cdot r'_1}{r_2 \cdot r'_2}.$$

Hier bedeutet  $E$  die Intensität des Stromes, der durch den Draht fließt; es ist also:

$$E = n \cdot k' \cdot \pi \rho^2, \quad n = \frac{E}{k' \cdot \pi \rho^2}.$$

Sind die Werthe von  $l$ , die zu den durch  $A_1$  und  $A_2$  gelegten Querschnitten des Drahtes gehören  $l_1$  und  $l_2$ , so sind die Spannungen in diesen <sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} u'_1 &= m - \frac{E}{k' \cdot \pi \cdot \rho^2} l'_1 \\ u'_2 &= m - K + \frac{E}{k' \cdot \pi \cdot \rho^2} l_2. \end{aligned}$$

Die Peripherien dieser Querschnitte gehören aber auch der Scheibe an, folglich ist:

$$\begin{aligned} u'_1 &= M - \frac{E}{2\pi k \delta} \log \frac{\rho \cdot A_1 \cdot A'_1}{A_1 \cdot A_2 \cdot A_1 \cdot A'_2} \\ u'_2 &= M - \frac{E}{2\pi k \delta} \log \frac{A_2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot A'_1}{\rho \cdot A_2 \cdot A'_2}. \end{aligned}$$

1) Diese Ausdrücke sind nicht streng richtig; denn in der Nähe der Scheibe gilt nicht die Gleichung  $u' = m - nl$ , weil die Ströme in dem Drahte hier nicht parallel mit seiner Axe sind; doch da wir  $\rho$  als unendlich klein betrachten, so können wir diesen Umstand vernachlässigen. — Auf dieselbe Art müssen wir die Gleichung  $\omega' = \frac{l_1 + l_2}{k' \cdot \pi \rho^2}$  rechtfertigen.

(Da nämlich  $\rho$  unendlich klein ist, so können wir in  $u'_1$  für  $r'_1, A_1, A'_1$ , u. s. w. setzen.) Aus diesen Gleichungen ergibt sich:

$$K = E \cdot \left\{ \frac{(l_1 + l_2)}{k' \cdot \pi \rho^2} + \frac{1}{2\pi k \delta} \log \left( \left( \frac{A_1 A_2}{\rho} \right)^2 \cdot \frac{A_1 A'_2 \cdot A'_1 A_2}{A_1 A'_1 \cdot A_2 A'_2} \right) \right\}.$$

Bezeichnen wir den Widerstand der Scheibe mit  $\omega$ , den des Drahtes mit  $\omega'$ , so muß:

$$K = E \cdot (\omega' + \omega)$$

seyn; da nun:

$$\omega' = \frac{l_1 + l_2}{k' \cdot \pi \rho^2}$$

ist, so ist:

$$\omega = \frac{1}{2\pi \cdot k \cdot \delta} \cdot \log \left\{ \left( \frac{A_1 A_2}{\rho} \right)^2 \cdot \frac{A_1 A'_2 \cdot A_2 A'_1}{A_1 A'_1 \cdot A_2 A'_2} \right\}.$$

Ich wende mich jetzt zur Beschreibung der Versuche, welche ich angestellt habe.

Ich benutzte zu ihnen eine kreisförmige Scheibe von dünnem Kupferblech, die einen Fuß im Durchmesser hatte; an zwei Punkten ihres Randes, die  $\frac{3}{4}$  F. von einander abstanden, waren zwei dünne Kupferdrähte angelöthet, die mit den Polen einer Hydrokette in Verbindung gesetzt wurden. Setzte ich auf die Scheibe die Enden zweier Drähte, deren andere Enden in die Quecksilberschälchen eines Multiplicators getaucht waren, so mußte die Magnetnadel desselben eine Ablenkung erleiden, wenn die Punkte der Scheibe, in denen diese berührt wurde, eine verschiedene Spannung hatten; sie mußte keine Ablenkung erleiden, wenn die berührten Punkte in *einer* Curve gleicher Spannung lagen. Liefs ich also den einen Draht fest stehen und suchte mit dem andern solche Punkte, daß die Magnetnadel keine Ablenkung erlitt, so konnte ich beliebig viele Punkte finden, die in der durch den Fußpunkt des ersten Drahtes gezogenen Curve gleicher Spannung lagen. Nach der Theorie sollte diese Curve ein Kreis seyn, der über einem Durchmesser beschrieben ist, dessen Endpunkte zu

den Einströmungspunkten harmonisch sind; ich suchte also einen solchen Kreis zu zeichnen, der den gefundenen Punkten möglichst nahe läge. In der folgenden Tabelle geben die erste Columnne den Radius dieses Kreises, die folgenden die Entfernungen der gefundenen Punkte von ihm an (die Einheit ist  $\frac{1}{100}$  Zoll).

| Radius. | Entfernungen.                               |
|---------|---|
| 114     | +1, -1, -1, +1                              |
| 278     | 0, 0, 0, 0, 0, +1                           |
| 604     | +1, +1, +1, 0, -1, -1, -3, -2, 0, -1, +7,   |
| 590     | -1, -2, -1, 0, 0, 0, +3                     |
| 285     | 0, -1, -1, -1, 0, -2, +7                    |
| 117     | 0, 0, -1, +1                                |
|         | +2, +2, 0, -2, -3, 0, 0, +2, +4, +6, +3, 0. |

Die Figur 3. Taf. V. zeigt die ungefähre Lage der beobachteten Punkte. (Die letzte Reihe in der Tabelle bezieht sich auf die Punkte, welche nahe an der Mittellinie  $BC$  liegen, und gibt ihre Entfernungen von dieser an.)

Die Abweichungen sind so geringe, dafs sie wohl hinreichend aus der ungleichmäfsigen Leitungsfähigkeit der Kupferscheibe und aus Beobachtungsfehlern erklärt werden können. Läfst man diese Erklärung zu, so beweist dieses Experiment, dafs die Spannung in einem jeden Punkte der Scheibe eine Function von  $\frac{r_2}{r_1}$ , d. h. dafs:

$$u = f\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

ist; welche Function  $f$  ist, zeigt ein anderer Versuch.

Ich leitete durch die Scheibe den Strom einer constanten Hydrokette, und berührte sie an zwei Punkten mit den Enden zweier Drähte, in deren Schließung aufer dem Multiplicator eine schwache, aus Kupfer und Zink gebildete, Thermokette eingeschaltet war. Wählte ich jetzt die beiden Berührungspunkte so, dafs durch den Multiplicator kein Strom ging, so mußte die Differenz

ihrer Spannungen gleich der elektromotorischen Kraft der Thermokette seyn. Ich nahm den einen Berührungspunkt in der Verbindungslinie der Einströmungspunkte an, und las an einer Scale seine Entfernungen von diesen,  $r_1$  und  $r_2$ , ab; dann suchte ich in derselben Linie den entsprechenden Berührungspunkt; die Entfernung dieses von den Einströmungspunkten will ich  $R_1$  und  $R_2$  nennen; es war  $r_1 + r_2 = R_1 + R_2 = 39$ , und ich fand:

|       |       |
|-------|-------|
| $r_1$ | $R_1$ |
| 5     | 10,4  |
| 10    | 17,3  |
| 15    | 22,8  |
| 20    | 28    |
| 25    | 31,5  |
| 30    | 34,4. |

Hieraus ergibt sich das Gesetz, welches  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  nahe befolgen:

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{R_2}{R_1} = \text{const}$$

Berechnete ich nämlich nach diesem Gesetze  $R_1$  aus  $r_1$ , so fand ich folgende Abweichungen:

| $R_1$ | Fehler von $R_1$ . |
|-------|--------------------|
| 10,4  | + 0,4              |
| 17,3  | - 0,1              |
| 22,8  | - 0,4              |
| 28    | + 0,2              |
| 31,5  | 0,0                |
| 34,4  | - 0,2.             |

Dieselben Versuche, wie in der Verbindungslinie der Einströmungspunkte, stellte ich jetzt noch in einem durch diese gelegten Kreise an, der den Radius 5 Zoll hatte. Diesen Kreis hatte ich eingetheilt, um die Lage der Berührungspunkte bequem ablesen zu können, nenne ich die Bögen von dem einen Einströmungspunkte bis zu diesen beiden Punkten  $\varphi$  und  $\psi$ , so fand ich:

| $\varphi$ . | $\psi$ . |
|-------------|----------|
| 10          | 25,4     |
| 20          | 48,3     |
| 30          | 62,5     |
| 40          | 70,9     |
| 50          | 78,7     |
| 60          | 84       |
| 70          | 88,75    |
| 80          | 92.      |

Der Bogen von dem einen Einströmungspunkte bis zum andern war =100; hieraus berechnete ich  $r_1, r_2, R_1, R_2$  und untersuchte, ob diese Größen auch hier dem oben ausgesprochenen Gesetze folgten. Die Fehler, welche dann bei  $\psi$  vorausgesetzt werden mußten, waren:

| $\psi$ . | Fehler von $\psi$ |
|----------|-------------------|
| 25,4     | +0,2              |
| 48,3     | +0,3              |
| 62,5     | -0,4              |
| 70,9     | -1,4              |
| 78,7     | 0,0               |
| 84       | -0,3              |
| 88,75    | 0,6               |
| 92       | 0,0.              |

Die Fehler dieser und der vorigen Beobachtungsreihe können, meiner Meinung nach, hinreichend erklärt werden, theils als Beobachtungsfehler, theils aus der ungleichmäßigen Leitungsfähigkeit der Kupferscheibe, so daß folgendes Gesetz als durch das Experiment bewiesen angesehen werden kann: Wenn  $f \frac{r_2}{r_1} - f \frac{R_2}{R_1}$  constant ist, so ist auch  $\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{R_1}{R_2}$  constant. (Es ist nämlich nach dem Früheren  $f \frac{r_2}{r_1} - f \frac{R_2}{R_1} =$  der Differenz der Spannungen der Berührungspunkte.)

Hieraus ist es leicht, die Function  $f$  zu finden; setzen wir nämlich  $\frac{r_2}{r_1} = p$ ,  $\frac{R_2}{R_1} = P$ , so beweist der eben ausgesprochene Satz, dafs:

$$fp - fP = F \frac{P}{p}$$

ist, wo  $F$  eine noch unbekante Function bezeichnet; setzen wir  $\frac{P}{p} = q$ , so wird die Gleichung:

$$f(qP) - f(P) = F(q)$$

oder wenn wir partiell nach  $P$  differenziren:

$$q \cdot f'(qP) - f'P = 0;$$

also, wenn wir  $P = 1$  setzen:

$$f'q = \frac{f'(1)}{q}$$

$$= \frac{N}{q}$$

$$fq = M + N \log q$$

$$u = M + N \log \frac{r_2}{r_1},$$

wo  $M$  und  $N$  zwei willkürliche Constanten bezeichnen.

#### Anmerkung.

Ich habe mir viele Mühe gegeben, den für den Widerstand der Scheibe aufgestellten Ausdruck durch Experimente zu prüfen; doch waren die Veränderungen, die der Widerstand erlitt, wenn die Entfernung der Drähte variirt wurde, so kleine Gröfsen, dafs die Beobachtungen eine Unsicherheit erhielten, bei der sie unmöglich etwas für oder gegen die Theorie beweisen konnten. Eine Hauptschwierigkeit, auf die ich auferdem bei diesen Versuchen stiefs, war die: zu bewirken, dafs die Drähte die Scheibe immer mit derselben Innigkeit berührten; dieses konnte noch am besten dadurch bewirkt werden, dafs ich statt der Kupferscheibe eine Quecksilberscheibe anwandte, in die ich die Drähte hineintauchte.

Um

Um die kleinen Veränderungen des Widerstandes beobachten zu können, traf ich folgende Vorrichtung: Der Strom einer starken Hydrokette theilte sich in die beiden Arme  $ACB$  und  $ADB$  (Taf. V. Fig. 4), die Punkte  $C$  und  $D$  waren durch einen Zwischenbogen verbunden, in den ein Multiplikator eingeschaltet war;  $AC$  enthielt die Scheibe mit den beiden Drähten, durch die der Strom durch diese hindurch geleitet wurde,  $BC$  einen Rheostaten;  $AD$  war ein kurzer dicker,  $BD$  ein langer dünner Kupferdraht. Stellte ich nun den Rheostaten so, daß durch den Multiplikator kein Strom ging, so mußte ich, wie ich gleich beweisen will (wenn die Widerstände von  $AC, BC, \dots$  durch  $(AC), (BC), \dots$  bezeichne):

$$(AC) : (BC) = (AD) : (BD)$$

seyn. Die Veränderungen von  $(AC)$  waren also den unmittelbar beobachteten Veränderungen von  $(BC)$  proportional; einer kleinen Veränderung von  $(AC)$  entsprach aber eine bedeutende von  $(BC)$ .

Um die angegebene Proportion auf eine bequeme Weise ableiten zu können, will ich zuerst den folgenden Satz beweisen:

Wird ein System von Drähten, die auf eine ganz beliebige Weise mit einander verbunden sind, von galvanischen Strömen durchflossen, so ist:

1) wenn die Drähte 1, 2, ..  $\mu$  in einem Punkte zusammenstoßen,

$$I_1 + I_2 + \dots + I_\mu = 0,$$

wo  $I_1, I_2, \dots$  die Intensitäten der Ströme bezeichnen, die jene Drähte durchfließen, alle nach dem Berührungspunkte zu als positiv gerechnet;

2) wenn die Drähte 1, 2, ..  $\nu$  eine geschlossene Figur bilden,

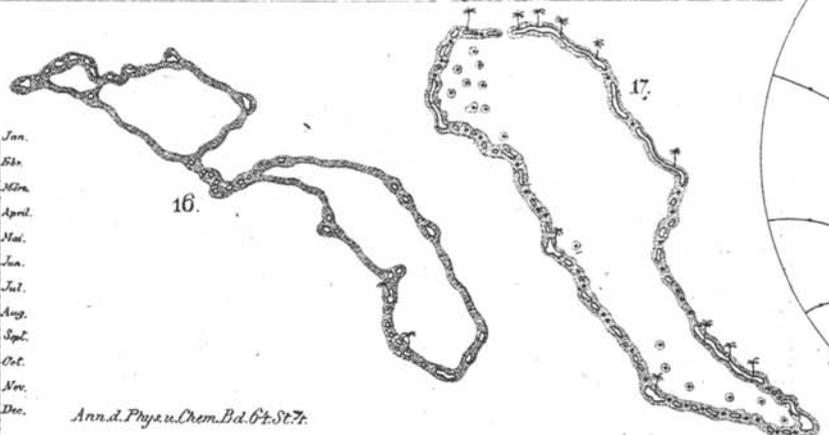
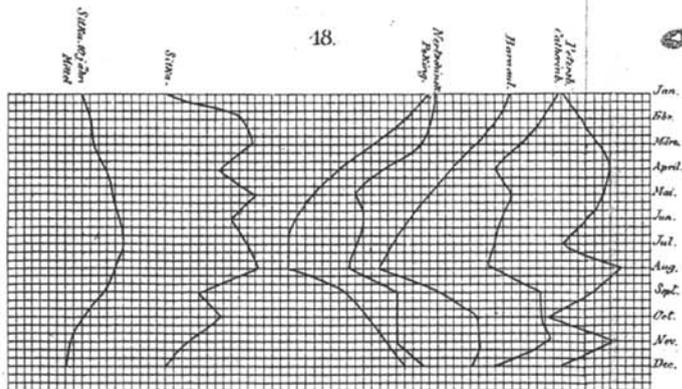
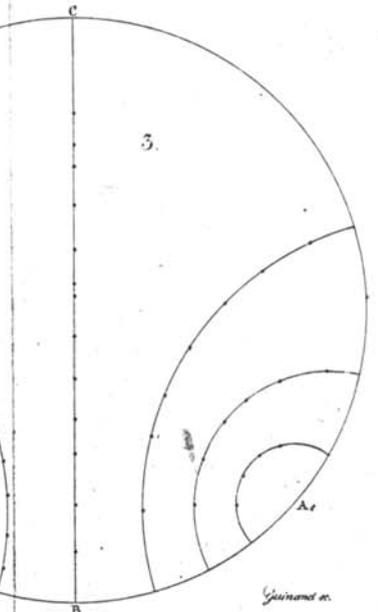
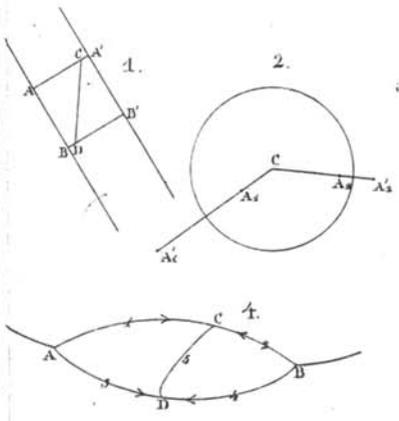
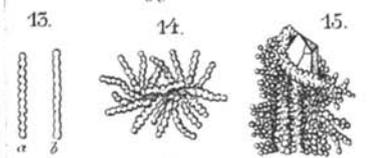
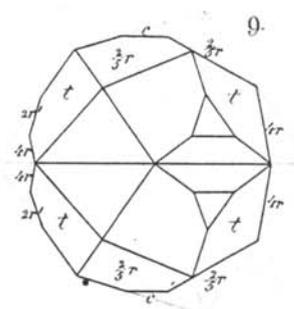
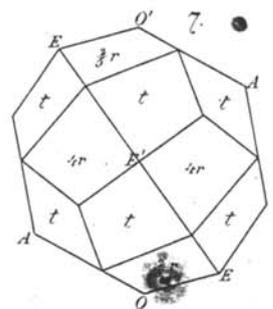
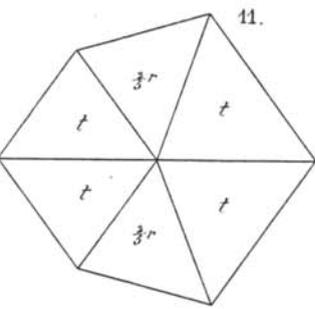
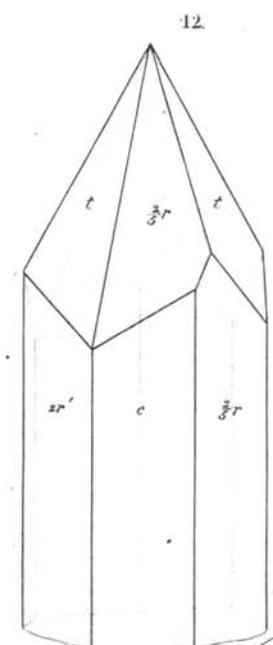
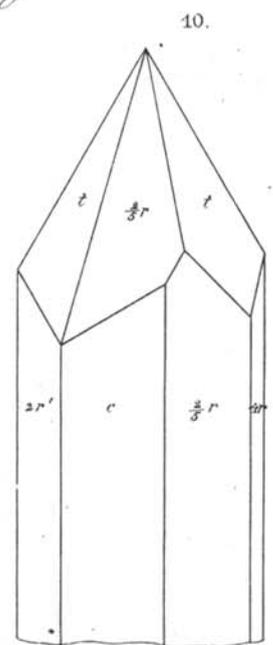
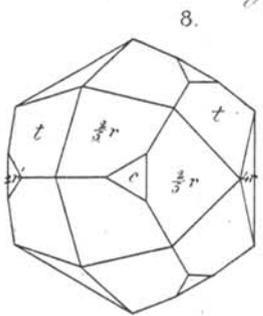
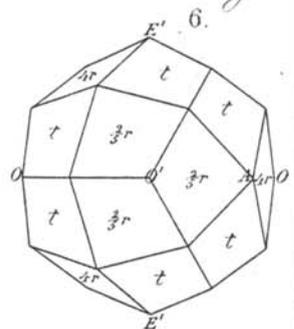
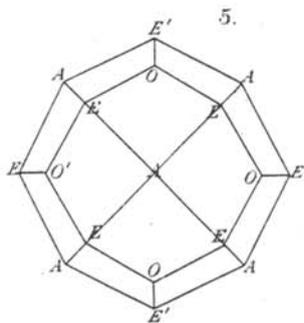
$$I_1 \cdot \omega_1 + I_2 \cdot \omega_2 + \dots + I_\nu \cdot \omega_\nu$$

= der Summe aller elektromotorischen Kräfte, die sich auf dem Wege: 1, 2, ..  $\nu$  befinden; wo  $\omega_1, \omega_2, \dots$  die



*Geol. Silber von Kongsberg.*

*Schleifsteiner Galuit. Taf. V.*



*Ann. d. Phys. u. Chem. Bd. 64. St. 7.*

*Günther m.*