Sulla riduttibilità della funzione $x^n - A$ in un campo qualunque di razionalità.

Von

A. CAPELLI in Neapel.

(Auszug aus einem an Herrn F. Klein gerichteten Briefe.)

Il sign. Wendt, nel fascicolo testè comparso dei mathem. Annalen, tratta la questione della riduttibilità dell' equazione $x^n - A = 0$ per un campo di razionalità qualunque K . Questa questione era già stata risolta dal sign. Vahlen*), nel 1895, per il campo naturale di razionalità e poi da me**), nel 1897, per un campo K qualunque.

La sua trattazione è basata sulla distinzione di due casi, secondochè, cioè, l'equazione di grado $\varphi(n)$ che ha per radici le radici primitive di $x^n - 1 = 0$, è irriduttibile ovvero riduttibile nel campo K . I criterii di riduttibilità da lui dati danno quindi luogo a due enunciati differenti, secondochè si verifichi l'uno o l'altro dei due casi.

Poichè il sign. Wendt cita solamente il lavoro del Vahlen, credo sia opportuno ricordare, in questi stessi Annali, i criterii da me ottenuti, che risolvono completamente il problema e danno luogo ad enunciati più semplici di quelli del sign. Wendt. Io ho trovato quanto segue:

I°. Se $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma \dots$ è il numero n decomposto nei suoi fattori primi distinti, affinchè l'equazione $x^n - A = 0$ sia riduttibile nel campo di razionalità K , è necessario e sufficiente che sia riduttibile in questo campo almeno una delle equazioni:

$$x^{p^\alpha} - A = 0, x^{q^\beta} - A = 0, x^{r^\gamma} - A = 0, \dots$$

*) Acta Mathematica, 2° fascicolo del vol. XIX.

**) Rendiconto della R. Acc. della Scienze di Napoli, Nota I° (Dicembre 1897). Cfr. anche la Nota II° (Febbrajo 1898). I risultati sono ottenuti applicando alcuni teoremi di indole più generale (Cfr. Jahrbuch über die Fortschritte der Math., Jahrgang 1897 und 1898).

II°. Affinchè l'equazione $x^{p^\alpha} - A = 0$ (in cui p è numero primo) sia riduttibile nel campo K , è necessario e sufficiente che si verifichi uno dei due casi seguenti:

- a) il numero A è la potenza $p^{m\alpha}$ di un numero del campo K ;
- b) $p = 2$, $\alpha > 1$, $-A$ è il quadruplo della quarta potenza di un numero del campo K .

È poi manifesto che questi risultati si possono anche riassumere così: *affinchè l'equazione $x^n - A = 0$ sia riduttibile nel campo K , è necessario e sufficiente che si verifichi uno dei due seguenti casi:*

1) *il numero A è la potenza $h^{m\alpha}$ di un numero del campo K , essendo h un divisore di n .*

2) *il grado n è un multiplo di 4, $-A$ è il quadruplo della quarta potenza di un numero del campo K .*

Napoli, Luglio 1900.