6. *Die optischen Eigenschaften dünner
Metallplatten;
von Gilbert T. Walker.*

Es ist bekannt, daß die Reflexionserscheinungen von Lichtwellen an einer Metallfläche sich berechnen lassen mit Benutzung derselben analytischen Bedingungen, die für die Reflexion an einer nichtmetallischen Fläche gelten, wenn man den Refraktionsindex durch eine komplexe Zahl ersetzt.

Die Einzelheiten sind von Cauchy vom Standpunkt der elastisch-festen Theorie aus ausgearbeitet worden, während die elektromagnetische Theorie zu denselben Resultaten führt. Bei Anwendung von Gaußschen Einheiten können die Gleichungen des elektrischen Feldes in folgende Form gekleidet werden:

$$n^2(1 - ik)^2 \frac{dE}{dt} = V \operatorname{curl} H,$$

$$\frac{dH}{dt} = -V \operatorname{curl} E,$$

wo E und H die elektrische und magnetische Kraft vorstellen, V die Geschwindigkeit des Lichtes ist und $n^2(1 - ik)^2$ an die Stelle der Dielektrizitätskonstante tritt.

In dem Falle einer dünnen Metallplatte ist die Anwendung von Cauchys Theorie von Jochmann¹⁾ ausgeführt worden; das Problem ist in neuerer Zeit von Voigt²⁾, Drude³⁾ und J. J. Thomson⁴⁾ erforscht worden.

Die dem allgemeinen Falle entsprechenden theoretischen Resultate sind von komplizierter Form. So haben denn auch

1) Jochmann, Pogg. Ann., Ergänzungsbd. 5. p. 620. 1871.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 25. p. 95. 1885.

3) P. Drude, Wied. Ann. 51. p. 77. 1894; Physik des Äthers, p. 578. 1894.

4) J. J. Thomson, Recent Researches, § 358. 1893.

J. J. Thomson¹⁾ und Drude²⁾ angenäherte Ausdrücke erhalten, die dann anwendbar sind, wenn d/λ hinreichend klein ist, wobei d die Dicke der dünnen Schicht und λ die Wellenlänge bedeutet. Thomson findet, daß das Ergebnis auf optische Versuche nicht anwendbar ist, und Drude wendet es nur auf Hertz'sche Wellen an. In sehr viel Fällen ist jedoch eine andere Art der Annäherung zulässig, und zwar ist diese besonders anwendbar auf viele der in den neuerdings von Hagen und Rubens veröffentlichten wichtigen und interessanten Arbeiten enthaltenen Beobachtungen.³⁾

Wir wollen planpolarisierte Lichtwellen betrachten, die senkrecht auf eine Metallplatte fallen, deren Grenzebenen als $x = 0$ und $x = -d$ angenommen werden. Die elektrische Kraft in dem Luftgebiet $x > 0$ kann als reeller Teil von $A e^{i(m x + p t)} + A' e^{i(-m x + p t)}$ angenommen werden, wo die beiden Glieder die einfallenden und die reflektierte Welle vorstellen und $m = 2\pi/\lambda$, $p = m V$ ist. Innerhalb des Metalles ist $0 > x > -d$ und ist die elektrische Kraft der reelle Teil von $B e^{i(m' x + p t)} + B' e^{i(-m' x + p t)}$, wenn $m'/m = n(1 - ik)$, n der Brechungskoeffizient und k der Absorptionskoeffizient des Metalles ist. In dem in die Luft austretenden Strahl ist die elektrische Kraft der reelle Teil von $C e^{i(m x + p t)}$.

Die gewöhnlichen Grenzbedingungen der elektromagnetischen Theorie ergeben dann Gleichungen, welche führen zu⁴⁾

$$\begin{aligned} \frac{A}{C} &= \frac{(m + m')^2 e^{i m' d} - (m - m') e^{-i m' d}}{4 m^2 m' e^{i m d}} \\ &= \frac{(m + m')^2}{4 m m'} e^{i(m' - m) d} \left\{ 1 - \left(\frac{m - m'}{m + m'} \right)^2 e^{-2 i m' d} \right\} \\ &= \frac{\{1 + n(1 - ik)\}^2}{4 n(1 - ik)} e^{-2 \pi i(1 - n) d/\lambda} e^{2 \pi i n k d/\lambda} \\ &\quad \left[1 - \left\{ \frac{1 - n(1 - ik)}{1 + n(1 - ik)} \right\}^2 e^{-4 \pi i n d/\lambda} e^{-4 \pi i k n d/\lambda} \right]. \end{aligned}$$

1) l. c. p. 424.

2) P. Drude, Physik des Äthers, p. 581—582. 1894.

3) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. p. 432. 1902.

4) J. J. Thomson, l. c. Gleichung (11), p. 416; P. Drude, l. c. Gleichung (80), p. 581.

Nun ist für auf Silber auffallendes Natriumlicht $4 \pi k n = 46,12$; und wenn d/λ nicht klein ist, so ist $e^{-4 \pi k n d/\lambda}$ klein und der Faktor zwischen eckigen Klammern [] annähernd der Einheit gleich. Wenn z. B. $d = 50 \mu\mu$ ist, so wird dieser Faktor¹⁾ gleich $0,994 e^{(0,0029) 2 \pi i}$; für $d = 75 \mu\mu$ ist sein Wert gleich $0,9994 e^{(0,00042) 2 \pi i}$, und für $d = 100 \mu\mu$ ist er gleich

$$0,99996 e^{(0,00006) 2 \pi i}.$$

Es sei

$$\frac{4 n (1 - i k)}{\{1 + n (1 - i k)\}^2} = \alpha e^{i \beta},$$

wo α und β reelle Zahlen sind, welche nur von dem gewählten Metall abhängen. Wenn wir dann kleine Glieder vernachlässigen, so erhalten wir:

$$(I) \quad \frac{C}{A} = \alpha e^{-2 \pi n k d/\lambda} e^{i \{\beta + 2 \pi (1 - n) d/\lambda\}}.$$

Bei dieser Annäherung variiert dann die Intensität des durchgelassenen Strahles proportional mit $\alpha^2 e^{-4 \pi n k d/\lambda}$ und besteht die Phasenbeschleunigung gegen die des einfallenden Lichtes aus einem Betrage β , der von Oberflächenwirkungen herrührt, und einem Betrage $2 \pi (1 - n) d/\lambda$, welcher zur Dicke der Platten proportional ist.

In ähnlicher Weise erhält man für den in Luft reflektierten Strahl

$$\begin{aligned} \frac{A'}{A} &= \frac{(m^2 - m'^2) (e^{i m' d} - e^{-i m' d})}{(m + m')^2 e^{i m' d} - (m - m')^2 e^{-i m' d}} \\ &= \frac{m - m'}{m + m'} \left[\{1 - e^{-2 i m' d}\} \left\{1 - \left(\frac{m - m'}{m + m'}\right)^2 e^{-2 i m' d}\right\}^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Wie vorhin können wir zum Zwecke der Annäherung $e^{-2 i m' d}$ vernachlässigen und die eckige Klammer durch die Einheit ersetzen. Wenn $d = 50 \mu\mu$ ist, beträgt der entsprechende Fehler in der Intensität des reflektierten Strahles ungefähr

1) Hier sind Drudes Werte für n und $n k$ benutzt worden.

2,7 Proz.; in der Phasenänderung macht er etwa 0,5 Proz. aus. Bei dickeren Platten ist er jedoch viel kleiner.

Für Gold ist die Annäherung etwas weniger gut. Der Fehler in der Durchlässigkeit beträgt etwa 1,5 Proz. für Platten von $50 \mu\mu$; für dieselbe Genauigkeit in Bezug auf das Reflexionsvermögen ist eine Dicke von $75 \mu\mu$ erforderlich.

Die elektromagnetische Theorie gibt $(m - m')/(m + m')$ als Grenzwert von A'/A für dicke Platten: wir wollen diese Größe durch $y e^{i\zeta}$ darstellen, wo y und ζ reell sind. Das Reflexionsvermögen, das von Hagen und Rubens mit R bezeichnet wird, wird dann y^2 . Wenn wir nun nach dem Vorgang dieser Autoren die Intensität des einfallenden und des austretenden Lichtes mit J_0 und i bezeichnen, so liefert uns (I)

$$\log_e \frac{i}{J_0} = 2 \left\{ \log_e \alpha - 2 \pi n k \frac{d}{\lambda} \right\}.$$

Also, wenn $\mu = \log_{10} e$, so haben wir

$$(II) \quad \log_{10} \frac{i}{J_0} = 2 \log_{10} \alpha - 4 \pi \mu n k \frac{d}{\lambda}.$$

Entsprechend diesem Ergebnis stellen jedoch Hagen und Rubens ohne gehörige Untersuchung fest, daß¹⁾

$$\log \frac{i}{J_0} = \log p = -a d + \log(1 - R),$$

wo a gegeben ist durch

$$n k = \frac{a \lambda}{4 \pi \mu},$$

also

$$(III) \quad \log \frac{i}{J_0} = -4 \pi \mu n k \frac{d}{\lambda} + \log(1 - y^2).$$

1) Vgl. l. c., p. 444. Auf p. 438 ist die Absorptionskonstante definiert durch die Gleichung $i/J = 10^{-a d}$, wo J die Intensität des Lichtes ist, das gerade in das Metall eingetreten ist. An Stelle von i müßten wir in dieser Gleichung die Intensität des Lichtes gerade vor dem Austreten haben, ein endlicher Betrag von Licht wird an der zweiten Fläche in die Metallplatte zurückreflektiert.

Da $(1 - y^2)$ nicht einmal angenähert gleich α^2 ist, so sind die beiden Ausdrücke (II) und (III) miteinander nicht zu vereinigen.

Aber die von Hagen und Rubens angewandte Methode, um nk zu finden, besteht im Aufzeichnen des geometrischen Ortes, der bestimmt ist durch die Koordinaten $(d, \log J_0/i)$; dieser Ort ist eine gerade Linie, deren Neigung zur d -Achse $\text{tg}^{-1} 4\pi \mu n k / \lambda$ beträgt. Durch Messung dieser Neigung erhält man nk und ein Fehler in diesem Gliede von (II), das von d unabhängig ist, beeinflußt das erhaltene Resultat nicht.

Um die Theorie mit dem Experiment zu vergleichen, habe ich die theoretischen Berechnungen für Gold und Silber durchgeführt, die dann Anwendung finden, wenn Natriumlicht durch Platten hindurchgeht, deren Dicke zwischen Null und 10^{-5} cm variiert. Die angewandten Konstanten sind die von Drude erhaltenen, und zwar habe ich die unverkürzten Formeln benutzt. Um die Eigenschaften graphisch darzustellen, habe ich die Resultate für Platten mit hinzugenommen, deren Dicke so klein ist, daß δ^2/λ^2 vernachlässigt werden kann.¹⁾

Die Ergebnisse sind in den Tabellen 1 und 2 enthalten. Wenn wir C/A mit $Me^{i\theta}$ und A'/A mit $Ne^{i\varphi}$ bezeichnen, so können wir M^2 die Durchlässigkeit und N^2 das Reflexionsvermögen nennen; $\theta/2\pi$ ist dann die Differenz zwischen der Phase des durchgelassenen und der des auffallenden Lichtes, in Bruchteilen einer Wellenlänge ausgedrückt; $\phi/2\pi$ ist die entsprechende Differenz für das reflektierte Licht. Die Tabellen enthalten auch die Werte von d/λ ; dieselben würden die entsprechende Phasendifferenz des durchgelassen Lichtes sein, wenn die Platte durch Luft ersetzt würde.

1) Dieselben sind nach den leicht erhältlichen Formeln

$$\frac{C}{A} = (1 - n^2 k \varepsilon) \left\{ 1 + \frac{1}{2} i \varepsilon (1 - n^2 + n^2 k^2) \right\},$$

$$\frac{A'}{A} = \frac{1}{2} \{ 1 - n^2 (1 - i k)^2 \} i \varepsilon \left[1 - \frac{1}{2} i \varepsilon \{ 1 + n^2 (1 - i k)^2 \} \right],$$

wo $\varepsilon = 2\pi \delta/\lambda$ ist, in die Tabellen eingetragen worden.

Tabelle 1.

Gold.

d in $\mu\mu$	δ	5	12,5	25	50	75	100	∞
$M^2 = \frac{i}{J_0}$	$1 - 0,0220 \delta$	0,855	0,598	0,291	0,0653	0,0146	0,00327	0
$\log \frac{J_0}{i}$	$0,00956 \delta$	0,068	0,223	0,536	1,185	1,835	2,486	∞
$\frac{\theta}{2\pi}$	$0,00664 \delta$	0,035	0,077	0,124	0,174	0,206	0,234	∞
$\frac{d}{\lambda}$	$0,0017 \delta$	0,0085	0,0212	0,0424	0,0849	0,1273	0,1698	∞
$\frac{\Phi}{2\pi}$	$0,287 + 0,00494 \delta$	0,313	0,344	0,372	0,390	0,398	0,393	0,393
N^2	$0,00233 \delta^2$	0,050	0,228	0,510	0,763	0,830	0,846	0,851

Tabelle 2.

Silber.

d in $\mu\mu$	δ	5	12,5	25	50	75	100	∞
$M^2 = \frac{i}{J_0}$	$1 - 0,0142 \delta$	0,818	0,454	0,152	0,0197	0,0028	0,00039	0
$\log \frac{J_0}{i}$	$0,00615 \delta$	0,0875	0,343	0,819	1,705	2,560	3,410	∞
$\frac{\theta}{2\pi}$	$0,0123 \delta$	0,0570	0,118	0,173	0,225	0,263	0,298	∞
$\frac{d}{\lambda}$	$0,0017 \delta$	0,0085	0,0212	0,0424	0,0849	0,1273	0,1698	∞
$\frac{\Phi}{2\pi}$	$0,265 + 0,0106 \delta$	0,313	0,362	0,397	0,413	0,415	0,415	0,415
N^2	$0,00598 \delta^2$	0,124	0,459	0,772	0,925	0,947	0,951	0,951

Der theoretische Wert von $\log(Z_0/i)$ für Gold wird durch die kontinuierliche Linie in Fig. 1 dargestellt. Der fragliche geometrische Ort ist kaum von einer geraden Linie verschieden für Dicken, die größer sind als $12 \mu\mu$; die Tangente im Koordinatenursprung ist durch eine punktierte Linie angegeben. Die Sterne * auf dieser Figur stellen vier experimentelle Werte vor für $\lambda = 0,589 \mu$, welche aus Hagen und Rubens'

Versuchsergebnaten¹⁾ gewonnen worden sind, indem zwischen $\lambda = 0,55 \mu$ und $\lambda = 0,6 \mu$ interpoliert wurde.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 2 zeigt die Wirkung der Dicke auf das Reflexionsvermögen. Die kontinuierliche Kurve ist theoretisch; die Zeichen $\times$ geben die experimentellen Werte für $\lambda = 0,6 \mu$ an,

1) E. Hagen u. H. Rubens, l. c., Tab. 4. p. 447.

und die Zeichen + bedeuten die wie früher¹⁾ durch Interpolation erhaltenen für $\lambda = 0,589 \mu$.

Die entsprechenden Resultate für Silber sind in den Figg. 3 und 4 dargestellt. Erstere enthält auch die Beobachtungen für die Wellenlängen 0,42, 0,5, 0,6 und 0,7 μ .²⁾

Fig. 3.

Fig. 4.

Aus ihren Resultaten folgern Hagen und Rubens, daß für Natriumlicht und Platten aus chemisch niedergeschlagenem Silber $nk = 4,12$ anstatt 3,67 ist, welch letzteres Drudes

1) l. c., Tab. 2. p. 441.

2) l. c., Tab. 3. p. 446.

Wert für Silber in größerer Masse ist. Aber die Unregelmäßigkeiten der Kurven, die durch die beobachteten Punkte gezogen sind, zeigen deutlich, daß experimentelle Schwierigkeiten vorhanden sind; vielleicht liegt hieran zum Teil die Ursache für die Differenz der beiden Werte für n_k .

Im großen und ganzen sieht man, daß die Experimentaluntersuchungen dieser Autoren eine wesentliche Stütze für die elektromagnetische Theorie liefern.

(Eingegangen 23. Oktober 1902.)