Ueber die Abhängigkeit der Charaktere einer durch Leitcurven bestimmten Regelfläche von den Charakteren dieser Leitcurven.

Von

OTTO RUPP in Brunn.

Die windschiefen Regelflächen, welche durch eine Gerade erzeugt werden, die

- 1) drei gegebene Curven einfach,
- 2) eine gegebene Curve zweifach und eine andere einfach, und
- 3) eine gegebene Curve dreifach schneidet,

sind zuerst von George Salmon betrachtet worden*).

A. Cayley**) fügt den von Salmon gefundenen Resultaten neue hinzu. Ausser den Graden der Flächen und den Anzahlen der doppelten resp. mehrfachen Erzeugenden bestimmt derselbe namentlich auch die Ordnungen der eigentlichen Doppelcurven. Die Methode, welche Cayley zur Ermittlung der letzteren anwendet, beruht darauf, dass eine (Leit-)Curve m^{ter} Ordnung durch ein System zweier Curven p^{ter} und q^{ter} Ordnung (wobei $p + q = m$ ist) ersetzt wird***).

Nachdem zur Lösung des bezeichneten Problems eine directe geometrische Methode bisher nicht bekannt ist,†) und andererseits die oben genannten Autoren bei ihren Betrachtungen stationäre Punkte der Leitcurven ausschlossen, so dürfte in dieser Hinsicht die vorliegende

*) Salmon: On a class of Ruled Surfaces, Cambridge and Dublin Math. Journ. vol. 8. pag. 45.

— On the Degree of a Surface reciprocal to a given one. Transact. Royal Irish Acad. vol. 23. p. 461. — cf. auch Salmon's Raumgeometrie II. Theil. Deutsche Ausgabe von Fiedler, p. 296. (3. Auflage.)

**) A. Cayley: On Skew Surfaces, otherwise Scrolls. Philos. Transactions vol. 153. p. 453.

***) Diese Methode ist wesentlich eine Anwendung der Form III. des Schubert'schen Principes von der Erhaltung der Anzahl (cf. Schubert: Calcul der abzählenden Geometrie, § 4).

†) Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, II. Theil. p. 302 (3. Auflage).

Abhandlung als Vervollständigung der Theorie bezeichneter drei Regelflächen dienen. Dieselbe befasst sich mit der Ableitung der Charaktere und gewöhnlichen Singularitäten dieser Flächen auf directem geometrischen Wege.

I.

Allgemeine Betrachtungen über die Singularitäten der Regelflächen.
Bezeichnungen und Gleichungen.

Eine Gerade g , welche in jeder Lage drei Raumeurven C_1 , C_2 und C_3 , die eine allgemeine gegenseitige Lage besitzen, in je einem Punkte a_1 , a_2 resp. a_3 schneidet, erzeugt eine windschiefe Regelfläche.

Sind t_1 , t_2 und t_3 die Tangenten der Curven C_1 , C_2 und C_3 in den drei Punkten a_1 , a_2 und a_3 , so repräsentiren die Ebenen (gt_1) , (gt_2) und (gt_3) die Berührebenen der Regelfläche in a_1 , a_2 , a_3 . Da bekanntlich die Reihe der Punkte auf einer Erzeugenden jeder Regelfläche zu dem Büschel der ihnen entsprechenden Berührebenen projectivisch ist, so ist im vorliegenden Falle vermöge der drei Paare entsprechender Elemente $a_1, (gt_1)$; $a_2, (gt_2)$ und $a_3, (gt_3)$ die Berührebene in jedem weiteren Punkte der Erzeugenden g bestimmt.

Es giebt nun im Allgemeinen immer eine bestimmte endliche Anzahl von Erzeugenden g , welche die eine oder die andere der drei Leitcurven C_1 , C_2 , C_3 noch ein zweites Mal schneiden.

Vorausgesetzt, eine derartige Erzeugende g schneide die Leitcurven C_2 und C_3 in a_2 resp. a_3 , und die Leitcurve C_1 in den beiden Punkten a_1 und a_1' . Dann entspricht irgend einem beliebigen Punkte x der Erzeugenden g eine Berührebene G_x vermöge der projectivischen Beziehung

$$(a_1 a_2 a_3 x) = (gt_1 gt_2 gt_3 G_x)$$

und eine zweite Berührebene G_x' vermöge der projectivischen Beziehung

$$(a_1' a_2 a_3 x) = (gt_1' gt_2 gt_3 G_x'),$$

d. h. einem jeden Punkte x von g entsprechen zwei verschiedene Berührebenen. Die Gerade g ist mithin eine „Doppelerzeugende“ der Regelfläche.

Die beiden zur Reihe der Punkte einer Doppelerzeugenden, also auch untereinander projectivischen Büschel von Tangentialebenen besitzen zwei Doppelebenen, welche offenbar keine anderen sind, als die Berührebenen (gt_2) und (gt_3) in den Punkten a_2 und a_3 .

Wenn in den beiden genannten projectivischen Büscheln von Tangentialebenen ausser den Ebenen (gt_2) und (gt_3) noch ein drittes Paar entsprechender coincidirender Ebenen existirt, so sind diese Büschel identisch, d. h. es coincidiren alle einander entsprechenden

Ebenen. In diesem Falle ist g eine „stationäre Erzeugende“, d. i. eine Doppelerzeugende, in deren jedem Punkte die beiden Tangentialebenen der Regelfläche zusammenfallen.

Dieser Fall kann nur dann eintreten:

1) Wenn die Doppelverhältnisse $(a_1 a_1' a_2 a_3)$ und $(gt_1 gt_1' gt_2 gt_3)$ gleichen Werth besitzen, oder

2) Wenn die Punkte a_1 und a_1' zusammenfallen, und in ihrer Vereinigung einen „stationären Punkt“ der Leitcurve C_1 repräsentiren.

Nachdem die Beziehung $(a_1 a_1' a_2 a_3) = (gt_1 gt_1' gt_2 gt_3)$ eine Bedingung bezüglich der gegenseitigen Lage der Leitcurven C_1 , C_2 und C_3 in sich schliesst, so kann dieselbe im vorliegenden Falle nicht berücksichtigt werden, wohl aber die in 2) ausgesprochene, welche zu folgendem Satze führt:

„Die Erzeugenden der Regelfläche, welche durch die stationären Punkte einer Leitcurve hindurchgehen, sind stationäre Erzeugende, und können stationäre Erzeugenden im Allgemeinen auf keine andere Art entstehen.“

Dieser Satz gilt, wie man sich durch analoge Betrachtungen überzeugt, nicht bloß für die Regelfläche mit drei einfach zu schneidenden Leitlinien, sondern auch für die beiden anderen oben angeführten Regelflächen.

Eine andere gewöhnliche Singularität der Regelflächen sind die sogenannten „Kanten“ oder „Torsallinien.“^{*)}

Wie es unter ∞^1 Paaren von projectivischen einstufigen Grundgebilden im Allgemeinen eine endliche Anzahl mal vorkommt, dass jedem beliebigen Elemente des einen Grundgebildes ein constantes Element des anderen, und umgekehrt entspricht**), so kommt es im vorliegenden Falle im Allgemeinen auch unter den ∞^1 Projectivitäten der Punkte und Tangentialebenen längs einer Erzeugenden der Regelfläche eine endliche Anzahl mal vor, dass einem jeden ihrer Punkte eine und dieselbe Tangentialebene und jeder ihrer Tangentialebenen ein und derselbe Punkt entspricht. Die Erzeugenden, welche Träger solcher ausgearteten Projectivitäten sind, nennt man „Torsallinien“, die festen Tangentialebenen derselben „Torsalebenen“, und die festen Punkte auf ihnen „Spitzen“.

Für M als Grad und R als Rang einer windschiefen Fläche ist die Zahl der Torsallinien gleich:

*) Die erste Bezeichnung rührt von de La Gournerie her (arêtes, Kanten); die zweite von Sturm. (Eine „Torse“ nennt Cayley das Ebenensystem einer jeden developpablen Fläche.)

**) Sturm, Math. Annalen Band 6 und 12. — Hirst, *Proced. of the London Math. Soc.* vol. 5 und 8. — Schubert, *Calcül der abzählenden Geometrie.* §§ 27 und 28.

$$T = 2R - 2M. *)$$

Da eine Ebene, welche durch eine Erzeugende einer Regelfläche gelegt wird, die Fläche nur in einem einzigen Punkte dieser Erzeugenden berührt, so muss eine Ebene, welche die Regelfläche in zwei Punkten einer Erzeugenden berührt, nach Form IV des Principis von der Erhaltung der Anzahl**) in allen Punkten dieser Erzeugenden berühren, d. h. die Erzeugende muss nothwendig eine Torsallinie sein.

Auf Grund dieser Anschauung lassen sich die Anzahlen der Torsallinien der zu untersuchenden Regelflächen von vornherein bestimmen. Sind C_1 , C_2 und C_3 drei Leitlinien einer Regelfläche und ist eine Gerade g , welche C_1 , C_2 und C_3 beziehungsweise in den Punkten a_1 , a_2 und a_3 treffen mag, eine Torsallinie der Fläche, so müssen, wenn t_1 , t_2 und t_3 die Tangenten von C_1 , C_2 und C_3 in a_1 , a_2 , a_3 vorstellen, irgend zwei von den drei Tangentialebenen (gt_1) , (gt_2) und (gt_3) coincidiren, d. h. es müssen irgend zwei von den Tangenten t_1 , t_2 , t_3 sich schneiden. Hieraus folgt aber, dass eine jede Torsallinie gleichzeitig eine Erzeugende derjenigen Developpablen sein müsse, welche irgend zweien von den drei Leitcurven C_1 , C_2 , C_3 umschrieben ist. In Folge der allgemeinen gegenseitigen Lage der Leitcurven wird der Fall, dass alle drei Tangenten t_1 , t_2 , t_3 in einerlei Ebene liegen, nicht eintreten. Schneiden sich z. B. t_2 und t_3 , so ist a_1 die Spitze der Torsallinie, und jede durch g gehende Ebene berührt nach der Definition der Torsallinie die Regelfläche in a_1 . Andererseits ist dann aber auch a_1 ein Schnittpunkt der Leitcurve C_1 mit der den Curven C_2 und C_3 umschriebenen Developpablen. Jeder Schnittpunkt der einen Leitcurve mit der den beiden anderen Leitcurven umschriebenen Developpablen ist hiernach Spitze einer Torsallinie, und die Gesamtzahl dieser drei Gruppen von Schnittpunkten ist auch die Gesamtzahl der Torsallinien der Regelfläche.

Auf der Regelfläche, deren Erzeugenden eine Curve C_1 zweifach und eine zweite Curve C_2 einfach schneiden, giebt es zwei Gruppen von Torsallinien, nämlich solche, welche ihre Spitzen auf C_2 haben, und solche, deren Spitzen auf C_1 liegen. Durch Betrachtungen, welche den vorhergehenden analog sind, findet man, dass die ersteren die gemeinschaftlichen Erzeugenden der Regelfläche und der der Curve C_1

*) R. Sturm beweist diese Relation durch eine Betrachtung der eindeutigen Beziehung zwischen den Punkten und den Tangentialebenen der Regelfläche auf zwei beliebigen ihrer ebenen Schnitte. Math. Ann. Bd. VI, p. 255.

H. Schubert leitet dieselbe Gleichung mittelst seiner Coincidenzformel für das Punktepaar direct ab, und zeigt auch, dass dieselbe eine specielle Form seiner Coincidenzformel für das Strahlenpaar ($\varepsilon\sigma = 2\varepsilon\beta - 2\varepsilon g$, Calcül der abzählenden Geometrie § 315, Formel 22) ist. Mathem. Ann. Bd. XVII, p. 575—576.

**) Schubert, Calcül, § 4.

doppeltumschriebenen Developpablen, und die letzteren die gemeinschaftlichen Erzeugenden der Regelfläche und der den Curven C_1 und C_2 umschriebenen Developpablen sind. Endlich ergeben sich die Torsallinien einer Regelfläche, welche von den dreifachen Secanten einer Raumcurve erzeugt wird, als gemeinschaftliche Erzeugende dieser Regelfläche und der der Leitcurve doppelt umschriebenen Developpablen.

II.

Methoden und Gleichungen zur Berechnung der Charaktere.

Der Uebersichtlichkeit wegen sollen hier vorab die Bezeichnungen und Gleichungen, von welchen im Folgenden Gebrauch gemacht wird, zusammengestellt werden.

Es sei

m — die Ordnung einer Leitcurve,

r — ihr Rang,

p — ihr Geschlecht,

h — die Zahl ihrer scheinbaren Doppelpunkte,

β — die Zahl ihrer stationären Punkte,

M — der Grad einer Regelfläche,

R — der Rang derselben (Classe des ebenen Schnittes),

ND — (nodal director) die Summe der Ordnungen ihrer vielfachen Leitcurven, reducirt auf Doppelcurven (wobei eine k -fache Curve m^{ter} Ordnung mit einer Doppelcurve $\frac{1}{2} mk(k-1)^{\text{ter}}$ Ordnung äquivalent ist),

NG — (nodal generator) die Zahl der Doppelerzeugenden, wobei eine jede k -fache Erzeugende durch $\frac{1}{2} k(k-1)$ Doppelerzeugende ersetzt ist,

NR — (nodal residue) die Ordnung der eigentlichen, ausser den vielfachen Leitlinien und Doppelerzeugenden vorhandenen Doppelcurve,

NT — (nodal total) die Summe der Ordnungen aller vorgenannten Doppellinien, d. h. die Gesamtzahl der Doppelpunkte eines ebenen Schnittes der Regelfläche,

SG — Zahl der stationären Erzeugenden (oder der Rückkehrpunkte des ebenen Schnittes der Regelfläche),

T — Zahl der Torsallinien,

$D(m_1 m_2)$ — die Ordnung (Rang) der zwei Curven m_1^{ter} und m_2^{ter} Ordnung umschriebenen Developpablen,

$D(m^2)$ — die Ordnung der einer Curve m^{ter} Ordnung doppelt umschriebenen Developpablen.

Zwischen den angeführten Zahlwerthen bestehen Beziehungen, welche bereits von verschiedenen Autoren ohne Anwendung der analytischen Geometrie abgeleitet wurden, und zwar sind es folgende:

Für die Regelfläche mit drei einfach zu schneidenden Leitcurven m_1, m_2, m_3 :

$$(1) \quad M = 2 m_1 m_2 m_3,$$

$$(2) \quad ND = \frac{1}{2} m_1 m_2 m_3 (m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1 - 3),$$

$$(3) \quad NG = \frac{1}{2} m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3 - 3) + m_1 m_2 h_3 + m_2 m_3 h_1 + m_3 m_1 h_2.$$

Für die Regelfläche mit einer zweifach zu schneidenden Leitcurve C_1 und einer einfach zu schneidenden Leitcurve C_2 :

$$(4) \quad M = m_2 \left[h_1 + \frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1) \right],$$

$$(5) \quad ND = \frac{1}{2} m_2 [h_1^2 - h_1 + m_1 m_2 (m_1 - 1)^2 - m_1 (m_1 - 1)],$$

$$(6) \quad NG = h_1 h_2 + \frac{1}{4} m_1 m_2 (m_1 - 1) (m_2 - 1) + 3 m_2 (m_1 - 2) \cdot \left[h_1 - \frac{1}{6} m_1 (m_1 - 1) \right].$$

Für die Regelfläche der dreifachen Secanten:

$$(7) \quad M = (m - 2) \left[h - \frac{1}{6} m (m - 1) \right],$$

$$(8) \quad ND = \frac{1}{2} m (h - m + 2) (h - m + 1),$$

$$(9) \quad NG = \frac{1}{4} [-m^4 + 18m^3 - 71m^2 + 78m - 48mh + 132h + 12h^2].$$

$$(10) \quad T = -4h^2 + 2h(m^2 + 4m - 22) - 5m^3 + 27m^2 - 34m - 6\beta(h - 2m + 6).$$

Ferner die Gleichungen:

$$(11) \quad D(m_1 m_2) = m_1 r_2 + m_2 r_1,$$

$$(12) \quad D(m^2) = r(m - 3) - 3\beta^*.$$

*) Die Werthe (1), (2), (3), (4), (5) sind von Salmon und Cayley in der Anfangs citirten Abhandlungen geometrisch, die Werthe (6), (7), (8), (9), (12) analytisch bestimmt worden; cf. in dieser Beziehung auch Salmon-Fiedler Raumgeometrie, II. Theil p. 296 (3. Auflage).

Die Werthe (7) und (9) (letzterer = der 6-fachen Zahl der eine Raumcurve vierpunktig schneidenden Geraden) wurden geometrisch abgeleitet für den vollen Schnitt zweier Flächen von Picquet: Comptes rendus vol. 77, p. 474, von Schubert: Calcul der abzählenden Geometrie p. 323, und für eine beliebige Raumcurve (m, h, β) von Zeuthen: Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche etc. Brioschi Annali di Matematica, III. vol., p. 175 (Ohne Beweis auch mitgetheilt in Comptes rendus 1868, p. 225).

Die Zeuthen'sche Abhandlung enthält auch eine geometrische Ableitung für Werth (12), als auch für die Ordnung der eigentlichen Doppelcurve auf der Regelfläche der dreifachen Secanten.

Nun wurde früher gezeigt, dass man bei den fraglichen drei Regelflächen sowohl die Zahl SG der stationären Erzeugenden (als jener, welche von den stationären Punkten der Leitcurven ausgehen), als auch der Torsallinien (als gemeinschaftlicher Erzeugenden der Regelfläche und der den Leitcurven paarweise resp. doppelt umschriebenen Developpablen) von vornherein zu bestimmen vermag. Dann ergibt sich aber vermittelst der in 1—12 angegebenen Gradzahlen und der früher aufgestellten Gleichung

$$T = 2R - 2M$$

unmittelbar der „Rang“ der Regelfläche

$$(13) \quad R = \frac{1}{2} T + M,$$

und ferner vermittelst der auf den ebenen Schnitt der Regelfläche angewandten Plücker'schen Formel die Ordnung NT der Total-Doppelcurve

$$(14) \quad \begin{aligned} NT &= \frac{1}{2} [M(M-1) - R - 3SG], \\ &= \frac{1}{2} \left[M(M-2) - \frac{1}{2} T - 3SG \right]; \end{aligned}$$

endlich wieder mit Benützung der in 1—12 gegebenen Werthe für NG und ND die Ordnung NR der eigentlichen Doppelcurve

$$(15) \quad NR = NT - ND - NG.$$

Eine andere Methode zur Bestimmung der Charaktere der in Frage stehenden Regelflächen beruht auf der Anwendung der Zeuthen'schen Correspondenzformel. Sind nämlich zwei Curven C und C' vom Geschlecht p resp. p' derart auf einander bezogen, dass einem Punkte von C x' Punkte auf C' und einem Punkte von C' x Punkte auf C entsprechen, und kommt es t -mal vor, dass von x zusammengehörigen Punkten zwei coincidiren, und t' -mal, dass von x' zusammengehörigen Punkten zwei coincidiren, so besteht die Relation

$$(16) \quad t - t' = 2x'(p-1) - 2x(p'-1)*.$$

Sind nun C und C' zwei Curven auf einer Regelfläche, so vermitteln die Erzeugenden der letzteren eine Correspondenz ihrer Punkte. Die vorstehende Correspondenzformel kann dann einerseits in der Weise verwendet werden, dass man die Punkte einer Leitcurve auf jene eines ebenen Schnittes bezieht, und andererseits, indem man die Punkte zweier Leitcurven aufeinander bezieht.

Im ersten Falle hat man, wenn C die Curve des ebenen Schnittes, und C' die Leitcurve der Regelfläche bedeutet, für x den Grad der

*) Mathem. Annalen Bd. III, pag. 150. Cf. auch Clebsch-Lindemann, Geometrie pag. 458.

Vielfachheit von C' zu setzen; x' ist gleich 1 und t' mithin gleich 0. Die Zahl t , d. i. die Anzahl der Coincidenzen des ebenen Schnittes wird erfüllt, erstens durch jene Punkte, welche den Torsallinien angehören, deren Spitzen auf C' liegen, und zweitens durch jene Punkte, welche den stationären Erzeugenden angehören, welche nicht von den stationären Punkten von C' , sondern von jenen der anderen Leitcurven herrühren.

Im zweiten Falle, das ist, wenn man für C und C' zwei Leitcurven der Regelfläche setzt, ist x' gleich dem Grad der Vielfachheit von C' und x gleich jenem von C . Die Coincidenzen t und t' sind gerade so wie im ersten Falle zu zählen. Dann ergibt die Gleichung (16) eine Identität, welche gleichzeitig ein Kriterium für die Richtigkeit der Zahlen t und t' , somit auch für die Richtigkeit der früher angestellten Betrachtungen über die stationären Erzeugenden und Torsallinien der Regelflächen repräsentirt.

Besser noch kann man, um eine Verification für die letztgenannten Betrachtungen zu erhalten, an Stelle der Anwendung der Zeuthen'schen Geschlechtsformel, *direct zwei Formeln bestimmen, deren Differenz die erstere giebt.*

Als Beispiel mag die Regelfläche mit drei Leitcurven C_1, C_2 und C_3 dienen. Man bestimmt zunächst direct mittelst des Chasles'schen Correspondenzprinzips die Zahl W_{13} , welche angiebt, wie oft es vorkommt, dass die Verbindungslinie zweier Punkte auf C_1 , die (vermöge der Erzeugenden der Regelfläche) demselben Punkte von C entsprechen, eine gegebene Gerade g_1 schneidet.

Zu diesem Zwecke betrachtet man g_1 als Träger zweier Ebenenbüschel, welche die Punkte der C_1 projeciren, und findet leicht, dass die Correspondenz eine symmetrisch $m_1 m_2 m_3 (m_1 m_3 - 1)$ -deutige ist. Nach dem Chasles'schen Correspondenzprincip kommt es nur $2m_1 m_2 m_3 (m_1 m_3 - 1)$ mal vor, dass zwei einander entsprechende Ebenen d. h. Ebenen, welche zwei Punkte der C_1 enthalten, die demselben Punkte von C_2 entsprechen, zusammenfallen. Diese Coincidenzen werden erfüllt: 1) durch die Zahl W_{13} zweimal, 2) durch die stationären Punkte β_1 der Leitcurve $m_2 m_3$ mal, da einem jeden derselben $m_2 m_3$ Punkt auf C_2 entsprechen; 3) die Schnittpunkte der Curve C_1 mit jenen Torsallinien, deren Spitzen auf der Curve C_2 liegen; die Anzahl derselben ist gleich der Anzahl der Schnittpunkte von C_2 mit der Curve C_1 und C_3 umschriebenen Developpablen, also nach Gleichung (11) gleich $m_2 (r_1 m_3 + r_3 m_1)$; 4) zweimal von den Punkten auf C_1 , welche von jenen Doppelerzeugenden, welche C_3 in zwei verschiedenen Punkten treffen. Die Anzahl derselben ist gleich der Anzahl der Schnittpunkte von C_1 mit jener Regelfläche, deren Erzeugenden C einfach und C_3 zweifach schneiden; also mit Rücksicht auf Gleichung

(4) gleich $\frac{1}{2} m_1 m_2 (m_3^2 - m_3 + 2h_3)$; und endlich 5) dreimal durch die Schnittpunkte von C_1 mit den $\beta_3 m_1 m_2$ stationären Erzeugenden, welche von den stationären Punkten auf C_3 herrühren. Hiernach ist

$$2m_1 m_2 m_3 (m_1 m_3 - 1) = 2W_{13} + \beta_1 m_2 m_3 + m_2 (r_1 m_3 + r_3 m_1) \\ + m_1 m_2 (m_3^2 - m_3 + 2h) + 3\beta_3 m_1 m_2.$$

Nun bestimmt man wieder direct durch das Correspondenzprincip die Zahl V_3 , welche angiebt, wie oft die Verbindungslinie zweier solcher Punkte auf C_2 eine gegebene Gerade g_2 schneidet, welche zwei Punkten auf C_1 entsprechen, deren Verbindungslinie ebenfalls eine gegebene Gerade g_1 schneidet.

Eine beliebige durch g_2 gelegte Ebene ε schneidet C_2 in m_2 Punkten, welchen auf C_1 $m_2 m_1 m_3$ Punkte entsprechen. Die durch g_1 und diese Punkte gelegten Ebenen schneiden C_1 noch in weiteren $m_2 m_1 m_3 (m_1 - 1)$ Punkten, welchen auf C_2 $m_2 m_1 m_3 (m_1 - 1) m_2 m_3$ Punkte, also durch g_2 ebensoviel Ebenen ε' entsprechen. Man erhält auf diese Weise eine symmetrische $m_2 m_1 m_3 (m_1 - 1) m_2 m_3$ -deutige Correspondenz zwischen den Ebenenbüscheln ε und ε' und mithin nach dem Correspondenzprincip $2m_2 m_1 m_3 (m_1 - 1) m_2 m_3$ Doppelsebenen. Die Zahl dieser Coincidenzen wird erfüllt: 1) durch die frühere Zahl W_{13} zweimal, 2) durch die gesuchte Zahl V_3 zweimal, 3) durch die $r_1 m_2 m_3$ Punkte, welche den Berührungspunkten der r_1 durch g_1 an C_1 gelegten Tangentialebenen entsprechen, und endlich 4) durch die $\beta_1 m_2 m_3$ Punkte, welche den β_1 stationären Punkten von C_1 auf C_2 entsprechen. Es ist daher

$$2m_2 m_1 m_3 (m_1 - 1) m_2 m_3 = 2W_{13} + 2V_3 + r_1 m_2 m_3 + \beta_1 m_2 m_3.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich, wenn man berücksichtigt, dass $r_3 + 2h_3 + 3\beta_3 = m_3^2 - m_3$ ist, für V_3 der Werth

$$V_3 = m_1 m_2 m_3^2 (m_1 - 1) (m_2 - 1).$$

Man sieht, dass diese Zahl in Bezug auf m_1 und m_2 symmetrisch ist (wie dies nach der Definition von V_3 nothwendig der Fall sein muss) und daher die Richtigkeit der früheren Betrachtungen über Torsallinien und stationäre Erzeugenden bestätigt. *)

*) Diese Betrachtung resp. Verification verdankt der Verfasser einer Mittheilung des Herrn Dr. Hermann Schubert. Dieselbe ist eine verallgemeinerte Nachbildung des Beweises für die Erhaltung des Geschlechts zweier ein-eindeutig auf einander bezogenen Curven, welchen Herr Dr. Schubert im 16ten Bande der Math. Ann. pag. 180 gegeben hat.

III.

Charaktere und Singularitäten der Regelfläche (C_1, C_2, C_3) .

Der Grad der Regelfläche ist nach Gleichung (1) gleich

$$M = 2m_1m_2m_3.$$

Durch jeden der β_1 stationären Punkte von C_1 gehen m_2m_3 Erzeugende der Regelfläche, nämlich die gemeinschaftlichen Erzeugenden der zwei Kegelflächen, welche aus diesem Punkte über den Curven C_2 und C_3 beschrieben werden. Die β_1 stationären Punkte von C_1 geben daher (nach I) Veranlassung zur Entstehung von $\beta_1m_2m_3$ stationären Erzeugenden der Regelfläche. Ebenso bestimmen die β_2 resp. β_3 stationären Punkte von C_2 und C_3 resp. $\beta_2m_3m_1$ und $\beta_3m_1m_2$ stationäre Erzeugenden, so dass die Gesamtzahl SG der letzteren

$$SG = \beta_1m_2m_3 + \beta_2m_3m_1 + \beta_3m_1m_2$$

ist.

Die den Curven C_1 und C_2 gemeinschaftlich umschriebene Developpable, deren Ordnung nach Gleichung (11) gleich $r_1m_2 + r_2m_1$ ist, schneidet die Curve C_3 in $m_3(r_1m_2 + r_2m_1)$ Punkten, welche, wie in I. gezeigt wurde, Spitzen ebensovieler Torsallinien repräsentiren. Analog ergeben sich die Zahlen $m_1(r_2m_3 + r_3m_2)$ und $m_2(r_3m_1 + r_1m_3)$ jener Torsallinien, welche ihre Spitzen auf C_1 resp. C_2 haben. Mithin ist die Gesamtzahl T der Torsallinien

$$T = 2(m_1m_2r_3 + m_2m_3r_1 + m_3m_1r_2).$$

Nach Gleichung (13) ergibt sich jetzt der Rang R der Regelfläche

$$R = 2m_1m_2m_3 + m_1m_2r_3 + m_2m_3r_1 + m_3m_1r_2.$$

Ferner nach Formel (14) für die Ordnung NT der Summe aller Doppellinien

$$2NT = 2m_1m_2m_3(2m_1m_2m_3 - 2) - (m_1m_2r_3 + m_2m_3r_1 + m_3m_1r_2) - 3(m_1m_2\beta_3 + m_2m_3\beta_1 + m_3m_1\beta_2).$$

Endlich nach (15), (2) und (3) mit gleichzeitiger Berücksichtigung, dass $r_1 + 2k_1 + 3\beta_1 = m_1(m_1 - 1)$ ist, die Ordnung der eigentlichen Doppelcurve

$$NR = \frac{1}{2} m_1m_2m_3 [4m_1m_2m_3 - (m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1) - 2(m_1 + m_2 + m_3) + 5]^*).$$

*) Uebereinstimmend mit dem von Cayley gegebenen Werthe.

IV.

Charaktere und Singularitäten der Regelfläche, deren Erzeugenden eine Curve C_1 zweifach und eine Curve C_2 einfach schneiden.

Der Grad M der Regelfläche ist nach (4) (I)

$$M = m_2 \left[h_1 + \frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1) \right].$$

Durch jeden Punkt des Raumes gehen h_1 Gerade, welche die Curve C_1 zweipunktig schneiden. Die β_2 stationären Punkte von C_2 bestimmen mithin $\beta_2 h_1$ stationäre Erzeugenden der Regelfläche. Da ferner der aus einem stationären Punkte der Curve C_1 über dieser beschriebene Perspektivkegel bekanntlich von der $(m_1 - 2)$ ten Ordnung ist, und daher $(m_1 - 2)m_2$ seiner Erzeugenden auch die Curve C_2 treffen, so entsprechen den β_1 stationären Punkten von C_1 $\beta_1(m_1 - 2)m_2$ stationäre Erzeugende der Regelfläche. Man erhält demgemäss die Gesamtzahl SG der stationären Erzeugenden

$$SG = \beta_2 h_1 + \beta_1 m_2 (m_1 - 2).$$

Die der Curve C_1 doppeltumschriebene Developpable, deren Ordnung (Glg. 12) $r_1(m_1 - 3) - 3\beta_1$ ist, schneidet C_2 in $r_1 m_2 (m_1 - 3) - 3\beta_1 m_2$ Punkten, welche nach I. Spitzen ebensovieler Torsallinien vorstellen.

Bezieht man nun die Punkte der Leitcurve C_2 auf jene des ebenen Schnittes der Regelfläche mittelst des Zeuthen'schen Correspondenzprincips (Gleichung (16), I.):

$$t - t' = 2x'(p - 1) - 2x(p' - 1),$$

wobei die nicht accentuirten Buchstaben für den ebenen Schnitt, und die accentuirten für die Curve C_2 gelten mögen, so hat man nach den Auseinandersetzungen in I. für x den Grad der Vielfachheit von C_2 , also h_1 zu setzen; $x' = 1$, und mithin $t' = 0$. Die Coincidenzen t auf dem ebenen Schnitt rühren von den Torsallinien her, deren Spitzen auf C_2 liegen, und von den stationären Erzeugenden, welche durch die stationären Punkte der Curve C_1 bestimmt sind. Hiernach ist

$$t = r_1 m_2 (m_1 - 3) - 3\beta_1 m_2 + \beta_1 m_2 (m_1 - 2) = r_1 m_2 (m_1 - 3) + \beta_1 m_2 (m_1 - 5).$$

Endlich bedeutet p das Geschlecht des ebenen Schnittes und p' jenes der Curve C_2 ; es ist daher bekanntlich

$$2(p - 1) = R - 2M + SG$$

und

$$2(p' - 1) = r_2 - 2m_2 + \beta_2.$$

Setzt man diese Werthe in die Geschlechtsgleichung ein, so ergibt sich für den Rang R der Regelfläche der Ausdruck

$$R = r_1 m_2 (m_1 - 3) + m_1 m_2 (m_1 - 1) + h_1 r_2 - 3\beta_1 m_2.$$

Vermittelst der Gleichung $T = 2(R - M)$ erhält man die Zahl T der Torsallinien

$$T = 2r_1 m_2 (m_1 - 3) + m_1 m_2 (m_1 - 1) - 6\beta_1 m_2 + 2h_1 r_2 - 2h_1 m_2$$

oder weil $m_1 (m_1 - 1) - 2h_1 - 3\beta_1' = r_1$ ist,

$$T = r_1 m_2 (2m_1 - 5) + 2h_1 r_2 - 3\beta_1 m_2.$$

Andrerseits folgt aus $R = M(M - 1) - 2NT - 3SG$

$$2NT = m_2^2 \left[h_1 + \frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1) \right]^2 - m_2 h_1 - \frac{3}{2} m_1 m_2 (m_1 - 1) \\ - r_1 m_2 (m_1 - 3) - h_1 r_2 - 3\beta_2 h_1 - 3\beta_1 m_2 (m_1 - 3).$$

Endlich ergibt sich mittelst Formel (15) und den Gleichungen (5) und (6) die Ordnung der eigentlichen Doppelcurve (wenn man gleichzeitig $r_1 = m_1 (m_1 - 1) - 2h_1 - 3\beta_1$ etc. benützt)

$$NR = NT - ND - NG \\ = m_2 \left[\frac{1}{2} h_1 (m_1 - 2) (m_1 - 3) + \frac{1}{8} m_1 (m_1 - 1) (m_1 - 2) (m_1 - 3) \right] \\ + m_2 (m_2 - 1) \left[\frac{1}{2} h_1^2 + \frac{1}{2} h_1 (m_1^2 - m_1 - 1) + \frac{1}{8} m_1 (m_1 - 1) (m_1^2 - 5m_1 + 2) \right]^*).$$

V.

Charaktere und Singularitäten der Regelfläche, welche von den dreipunktigen Secanten einer Raumcurve gebildet wird.

Der Grad der Fläche ist nach Gleichung (7)

$$M = (m - 2) \left[h - \frac{1}{6} m (m - 1) \right],$$

und die Zahl der Torsallinien nach (10)

$$T = -4h^2 + 2h(m^2 + 4m - 22) - 5m^3 + 27m^2 - 34m - 6\beta(h - 2m + 6).$$

Hieraus folgt mittelst der Formel (13) für den Rang R der Werth

$$R = -2h^2 + h(m^2 + 5m - 24) - \frac{1}{6}(16m^3 - 84m^2 + 104m) \\ - 3\beta(h - 2m + 6).$$

Nachdem ferner bekanntlich durch jeden stationären Punkt einer Raumcurve $(h - 2m + 6)$ Geraden gehen, welche die Curve noch in zwei weiteren Punkten treffen, so ist die Zahl der stationären Erzeugenden

$$SG = \beta(h - 2m + 6).$$

*) Der von Cayley auf analytischem Wege gefundene Werth ist um $m_1(m_1 - 1)m_2(m_2 - 1)$ grösser, indem dieses Glied, welches im Schlussresultate $NR = NT - ND - NG$ wegzufallen hat, aus Versehen stehen geblieben ist.

Nach der Plücker'schen Gleichung $R = M(M-1) - 2NT - 3SG$ findet man daher

$$2NT = m^2h^2 - 4mh^2 + 6h^2 - \frac{1}{3}(m^4 - 5m^3 + 11m^2 + 14m - 78)h \\ + \frac{1}{36}(m^6 - 6m^5 + 13m^4 + 90m^3 - 518m^2 + 636m)$$

also endlich nach Formel (15) und den Gleichungen (8) und (9) für die Ordnung der Doppelcurve den Ausdruck

$$NR = \frac{1}{2}h^2m(m-1) - \frac{1}{6}h(m^4 - 5m^3 + 5m^2 - 49m + 120) \\ + \frac{1}{72}(m^6 - 6m^5 + 31m^4 - 270m^3 + 868m^2 - 840m).*)$$

Brünn, Anfang Februar 1881.

*) Der von Cayley angegebene Werth ist um $6m$ grösser, weil im Resultate $NR = NT - ND - NG + 3m$ statt $- 3m$ steht.