Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen.

Von

ERNST HELLINGER in Marburg a. d. L. und OTTO TOEPLITZ in Göttingen.

Inhaltsübersicht.

	Seite
Einleitung.	289

Erstes Kapitel.

§ 1. Die Konvergenz der beschränkten Linearformen	293
§ 2. Die Konvergenz der beschränkten Bilinearformen	295
§ 3. Die Hilbertschen Faltungssätze	299
§ 4. Beschränkte quadratische Formen, beschränkte Bilinearformen mit komplexen Koeffizienten, beschränkte Hermitesche Formen.	303
§ 5. Kriterien der Beschränktheit	306
§ 6. Kalkül mit beschränkten Matrizen (Bilinearformen)	309
§ 7. Formalsätze über reziproke Formen	311
§ 8. Klassifikation der Probleme	313

Zweites Kapitel.

§ 9. Gleichmäßige Endlichkeit linearer Formen	318
§ 10. Gleichmäßige Endlichkeit bilinearer und quadratischer Formen	321
§ 11. Die Vollständigkeit des Systems der beschränkten Matrizen	327
§ 12. Die isomorphen Systeme und ihre Unsymmetrie	328

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit enthält in ausführlicher Form die Ergebnisse einer gemeinsamen Untersuchung, deren Resultate wir in einer Note gleichen Titels*) kurz angezeigt und die wir seither weiter fortgeführt haben (*zweites Kapitel*). Diese Untersuchung kann als eine axiomatische Behandlung des Kalküls mit unendlichen Matrizen angesehen werden; die beiden Konvergenzsätze (§§ 9 und 10), auf denen sie fußt, bieten jedoch vielleicht auch selbständiges Interesse.

*) Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl., 1906, S. 351—355.

Wir benutzen indessen zugleich diese Gelegenheit, uns eine Grundlage zu verschaffen, auf die wir uns außer im zweiten Kapitel der vorliegenden Arbeit auch in einigen folgenden Arbeiten wollen berufen können, ohne die Kenntnis anderer Arbeiten aus dem Gebiete der Integralgleichungen und der unendlichvielen Veränderlichen vorauszusetzen (*erstes Kapitel*). Es handelt sich dabei einerseits um eine Reihe von Konvergenzhilfssätzen — darunter (§§ 1—3) die sog. Faltungssätze von Herrn Hilbert, deren Be-
weise er in seiner vierten Mitteilung*) nur angedeutet hat —, die im wesentlichen in der einen Tatsache gipfeln, daß man mit passender Vor-
sicht für unendliche Matrizen (Bilinearformen von unendlichvielen Ver-
änderlichen) einen ebensolchen Kalkül aufstellen kann, wie er sich seit
Cayley und Frobenius in der Algebra der Bilinearformen von endlichvielen
Veränderlichen eingebürgert hat (§§ 6 und 7). Andererseits erwächst
aus diesen Konvergenztatsachen die Möglichkeit, nach dem Muster der
Algebra der quadratischen und bilinearen Formen (Elementarteilertheorie)
eine Serie von Problemen aufzustellen und zu klassifizieren, die wir in
unseren folgenden Arbeiten zwar einzeln formulieren werden, ohne jedoch
jedesmal den vollen Zusammenhang wiederholen zu können; diesen zu
geben und anzudeuten, wie sich die vorliegende moderne Theorie der un-
endlichvielen Veränderlichen ihm einordnet, ist der Zweck von § 8.

Den Ausgangspunkt für die Ausarbeitung solcher Grundlagen bildete für uns der Gedanke von Hilbert, die beiden fundamentalen Probleme der Theorie der linearen Integralgleichungen in Probleme einer Theorie der unendlichvielen Veränderlichen zu übertragen. Wir meinen einerseits Fredholms Auflösungstheorie**) der linearen Integralgleichung 2. Art

$$(1) \quad f(s) = \varphi(s) + \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt,$$

andererseits Hilberts Eigenwerttheorie***) der linearen Integralgleichung mit symmetrischem Kern

$$(2) \quad f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt, \quad \text{wo } K(s, t) = K(t, s).$$

Hilbert†) findet den Übergang von den Funktionen $\varphi(s)$ der reellen

*) „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen“
Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl., 1906, S. 157 ff., speziell S. 176—182.

**) „Sur une classe d'équations fonctionnelles“. Acta math. 27 (1903), S. 365 ff.

***) „Grundzüge ...“, 1. Mitteil., Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl., 1904, S. 49 ff.

†) „Grundzüge ...“, 5. Mitteil., Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl., 1906, S. 439 ff.

Veränderlichen s , die im Intervall $a \leq s \leq b$ betrachtet wird, zu den unendlichvielen Variablen, indem er irgend ein orthogonales Funktionensystem (z. B. das trigonometrische) $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots$ zugrunde legt und der Funktion $\varphi(s)$ gewissermaßen als ihre Koordinaten die Koeffizienten ihrer nach Fourierscher Art gebildeten Entwicklung, nämlich

$$x_1 = \int_a^b \varphi_1(s) \varphi(s) ds, \quad x_2 = \int_a^b \varphi_2(s) \varphi(s) ds, \dots$$

zuordnet. Nach einem bekannten Satze*) entsprechen dabei den stetigen Funktionen solche Größenreihen $x_1, x_2, \dots$, deren Quadratsumme $x_1^2 + x_2^2 + \dots$ konvergiert; daß umgekehrt jedes Wertsystem $x_1, x_2, \dots$ von konvergenter Quadratsumme wo nicht einer stetigen Funktion, so doch einer Funktion einer gewissen weiteren Klasse („im Lebesgueschen Sinne nebst ihrem Quadrat integrabel“) entspricht, ist der Inhalt des Fischer-Riesz'schen Theorems.***) Setzt man zunächst rein formal, d. h. ohne die gebotene Rücksicht auf die Konvergenz der betreffenden Entwicklungen, in (1) und (2) für $\varphi(s)$ die Reihe $x_1 \varphi_1(s) + x_2 \varphi_2(s) + \dots$ ein und analog $y_1 \varphi_1(s) + y_2 \varphi_2(s) + \dots$ für $f(s)$, $\sum_{(p,q)} a_{pq} \varphi_p(s) \varphi_q(t)$ für $K(s, t)$, so erhält man durch Vergleichung der Entwicklungskoeffizienten rechts und links die unendlichvielen linearen Gleichungen:

$$(I) \quad \begin{aligned} y_1 &= (1 + a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + \dots, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + (1 + a_{22})x_2 + \dots, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

und

$$(II) \quad \begin{aligned} y_1 &= x_1 - \lambda(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots), \\ y_2 &= x_2 - \lambda(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad \text{wo } a_{pq} = a_{qp}.$$

Nachträglich gelingt es leicht, den außer acht gelassenen Konvergenzverhältnissen Rechnung zu tragen und zu beweisen, daß die genannten beiden Probleme der Integralgleichungstheorie in folgende Probleme übergehen:

I. die Auflösung der unendlichvielen linearen Gleichungen (I) mit unendlichvielen Unbekannten durch solche Wertsysteme der Unbekannten, deren Quadratsumme konvergiert;

*) Vgl. Hurwitz, Math. Ann. Bd. 57, S. 425 ff.; Bd. 59, S. 553.

**) F. Riesz, Comptes Rendus de l'acad. des sciences de Paris, t. 144 (1907), S. 615. — E. Fischer, ebenda, S. 1022.

II. eine Behandlung der zu (II) gehörigen quadratischen Form $\sum_{(p,q)} a_{pq} x_p x_q^*$ von unendlichvielen Veränderlichen, analog der Hauptachsentransformation der quadratischen Formen von n Veränderlichen, wobei wiederum nur solche Wertsysteme der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots$ in Betracht gezogen werden, deren Quadratsumme konvergiert.

Natürlich entspringen beide Male aus den Stetigkeits- oder Integrabilitätseinschränkungen, denen man die gegebenen Funktionen $K(s, t), f(s)$ zu unterwerfen hat, gewisse Konvergenzbeschränkungen für die Größen a_{pq} und y_p .

Diese Hilbertsche Übertragung und viel mehr noch die wirkliche Behandlung der beiden Probleme in der vierten Mitteilung nach algebraischem Vorbilde legten den Versuch nahe, noch weitere Methoden und Probleme der Algebra auf unendlichviele Variablen zu übertragen. Es handelt sich hinsichtlich der Probleme um diejenigen Partien der Algebra, die man etwa unter dem Sammelnamen einer *linearen Algebra* vereinigen könnte: bilineare Formen (Rangverhältnisse), Trägheitsgesetz der quadratischen Formen, Formenscharen (Elementarteilertheorie von Weierstraß, Kronecker, Frobenius usw.). Hinsichtlich der Methoden dieser linearen Algebra sind in erster Reihe die Operationen des Matrizenkalküls gemeint, deren Ausführbarkeit unerlässlich ist, um auch nur die vorher erwähnten Problemstellungen für unendlichviele Veränderliche zu formulieren (vgl. § 8).

Der Inhalt des zweiten Kapitels der vorliegenden Arbeit läßt sich an dieser Stelle charakterisieren als eine Untersuchung axiomatischer Natur über die Frage, inwieweit der Bereich der Wertsysteme von konvergenter Quadratsumme, der sich aus der Theorie der Integralgleichungen ergeben hat, ohne Rücksicht auf dieses Anwendungsgebiet von einem algebraischen Standpunkte aus vor Bereichen den Vorzug verdient, die durch andere Konvergenzeinschränkungen festgelegt sind (§ 11, 12). Als maßgebend für eine solche independente Begründung gilt uns, ob sich für die Gesamtheit der Bilinearformen (Matrizen), die zu dem betreffenden Bereiche gehören, ein dem Cayleyschen nachgebildeter Kalkül etablieren läßt.

*) Die in Klammern unter das Summenzeichen gesetzten Indizes sollen stets alle ganzzahligen Werte 1, 2, ... durchlaufen.

Erstes Kapitel.

§ 1.

Die Konvergenz der beschränkten Linearformen.

Die Schwarzsche Ungleichung.*) Sind $u_1, u_2, \dots$ und $v_1, v_2, \dots$ zwei Folgen von je abzählbar unendlichvielen reellen Größen und konvergieren die Reihen

$$\sum_{(p)} u_p^2 = u_1^2 + u_2^2 + \dots, \quad \sum_{(p)} v_p^2 = v_1^2 + v_2^2 + \dots,$$

so konvergiert auch $u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots$ absolut, und es ist

$$\left| \sum_{(p)} u_p v_p \right| \leq \sqrt{\sum_{(p)} u_p^2} \sqrt{\sum_{(p)} v_p^2} \quad (**)$$

Der Beweis ergibt sich aus der Tatsache, daß $\sum_{p=1}^n (\lambda u_p + \mu v_p)^2$ eine positiv-definite quadratische Form der Veränderlichen λ, μ ist, wobei λ, μ reelle Größen bedeuten:

$$\lambda^2 \sum_{p=1}^n u_p^2 + 2\lambda\mu \sum_{p=1}^n u_p v_p + \mu^2 \sum_{p=1}^n v_p^2 \geq 0.$$

Daraus folgt nämlich, daß die Diskriminante dieser Form

$$\left(\sum_{p=1}^n u_p v_p \right)^2 - \sum_{p=1}^n u_p^2 \sum_{p=1}^n v_p^2 \leq 0 \quad (***)$$

ist, oder

$$(1) \quad \left| \sum_{p=1}^n u_p v_p \right| \leq \sqrt{\sum_{p=1}^n u_p^2} \sqrt{\sum_{p=1}^n v_p^2}.$$

Sind nun die Größen $u_1, u_2, \dots; v_1, v_2, \dots$ zunächst alle positiv, so

*) Wir übernehmen diesen Namen von der seit Poincaré (Acta Math. 20, S. 73) als „Schwarzsche Ungleichung“ bekannten Integralungleichheit

$$\left| \int_a^b u(s) v(s) ds \right| \leq \sqrt{\int_a^b \{u(s)\}^2 ds} \sqrt{\int_a^b \{v(s)\}^2 ds}$$

(vgl. H. A. Schwarz, Ges. math. Abh. I, S. 251), welcher sie genau analog ist.

**) Mit dem Quadratwurzelzeichen ist stets die positive Wurzel gemeint.

***) Es folgt dies auch aus der sog. Lagrangeschen Identität, d. h. aus dem Multiplikationstheorem für rechteckige Systeme.

folgt aus (1) unmittelbar der obige Satz. Denn nach dessen Voraussetzung bleiben die Wurzelausdrücke auf der rechten Seite der Relation (1) mit wachsendem n unter endlicher Grenze, und mithin auch die Summe linker Hand. Als Summe positiver Summanden konvergiert sie also.

Werden dagegen die Größen $u_1, u_2, \dots; v_1, v_2, \dots$ lediglich als reell vorausgesetzt, so hat man die eben gebrauchte Schlußweise nur auf die Folgen der Beträge

$$|u_1|, |u_2|, \dots; |v_1|, |v_2|, \dots$$

anzuwenden, um die Konvergenz von $|u_1||v_1| + |u_2||v_2| + \dots$, d. h. die absolute Konvergenz von $u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots$ zu erkennen.

Nachdem so der erste Teil der Behauptung erwiesen ist, folgt der zweite unmittelbar aus (1) durch Grenzübergang.

Gewissermaßen eine Umkehrung der Schwarzschen Ungleichung bedeutet die folgende Bemerkung, die von der Definition ausgeht:

Definition. Eine Folge reeller Größen $a_1, a_2, \dots$ oder die aus ihnen (rein formal) gebildete „Linearform von unendlichvielen Veränderlichen“ $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots$ heiße „beschränkt“, wenn eine nicht nur von den x_p , sondern auch von n unabhängige positive GröÙe M existiert, sodaß für jedes n und für solche $x_1, \dots, x_n$, deren Quadratsumme $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$ ist, der absolute Betrag des „ n^{ten} Abschnitts“ der unendlichen Linearform

$$\left| \sum_{p=1}^n a_p x_p \right| = |a_1 x_1 + \dots + a_n x_n| \leq M$$

ist, oder — was auf dasselbe hinausläuft — wenn eine nicht nur von den x_p , sondern auch von n unabhängige GröÙe M existiert, sodaß für jedes n und beliebige $x_1, \dots, x_n$

$$\left| \sum_{p=1}^n a_p x_p \right| = |a_1 x_1 + \dots + a_n x_n| \leq M \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

ist.

Besagt unter Benutzung dieser Terminologie die Schwarzsche Ungleichung unter anderem auch, daß eine Linearform von unendlichvielen Veränderlichen beschränkt ist, wenn die Quadratsumme ihrer Koeffizienten konvergiert, so kann dem also jetzt an die Seite gestellt werden, daß umgekehrt die Quadratsumme der Koeffizienten einer beschränkten Linearform stets konvergiert.

In der Tat: Setzt man speziell

$$x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n,$$

daher a fortiori eine obere Grenze. — Man kann dieselbe Tatsache übrigens auch so formulieren, daß zu einer reellen Bilinearform mit endlicher Variablenzahl stets eine positive GröÙe M existiert, sodaß für beliebige Werte der Veränderlichen, auch solche, deren Quadratsumme über 1 gelegen ist,

$$\left| \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n a_{pq} x_p y_q \right| \leq M \sqrt{\sum_{p=1}^m x_p^2} \sqrt{\sum_{q=1}^n y_q^2}$$

gilt.

Nunmehr definieren wir mit Hilbert:

Definition. Eine Doppelfolge (Koeffizientenschema, Matrix) reeller GröÙen

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

oder die aus ihnen (rein formal) gebildete „Bilinearform von unendlichvielen Veränderlichen“

$$\begin{aligned} A = A(x, y) &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q = \sum_{(p, q)} a_{pq} x_p y_q \\ &= a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + \cdots \\ &+ a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2 + \cdots \\ &+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{aligned}$$

heiÙe „beschränkt“, wenn eine nicht nur von den x_p, y_q , sondern auch von n unabhängige positive GröÙe M existiert, sodaß für jedes n und für solche $x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n$, deren Quadratsummen $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1, y_1^2 + \dots + y_n^2 \leq 1$ sind, der absolute Betrag des „ n^{ten} Abschnitts“ der unendlichen Bilinearform:

$$\left| \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n a_{pq} x_p y_q \right| \leq M$$

ist, oder — was auf dasselbe hinausläuft — wenn eine nicht nur von den x_p, y_q , sondern auch von n unabhängige positive GröÙe M existiert, sodaß für jedes n und beliebige $x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n$

$$\left| \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n a_{pq} x_p y_q \right| \leq M \sqrt{\sum_{p=1}^n x_p^2} \sqrt{\sum_{q=1}^n y_q^2}$$

ist.

Über solche beschränkte Formen gelten die folgenden Konvergenzsätze, die der zunächst rein formal hingeschriebenen Bilinearform von unendlichvielen Veränderlichen einen konkreteren Inhalt verleihen und

zugleich die Grundlage für die Beweise der im nächsten Paragraphen folgenden Hilbertschen Faltungssätze abgeben.

Satz 1. Die Quadratsumme der Größen irgend einer Zeile oder auch irgend einer Kolonne aus dem Koeffizientenschema einer beschränkten Bilinearform konvergiert und liegt ihrem absoluten Werte nach unter dem Quadrate M^2 der oberen Grenze M der Bilinearform selbst.

Betrachtet man nämlich die Definition der Beschränktheit für solche Wertsysteme, bei denen $x_2 = 0, \dots, x_n = 0$, dagegen $x_1; y_1, \dots, y_n$ beliebig sind, so hat man $|a_{11}x_1y_1 + \dots + a_{1n}x_1y_n| \leq M \sqrt{x_1^2} \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$, oder $|a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n| \leq M \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$, d. h. $a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots$ ist eine beschränkte Linearform der unendlichvielen Veränderlichen $y_1, y_2, \dots$. Der Konvergenzsatz über Linearformen (§ 1) ergibt dann die Konvergenz von $a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots \leq M^2$. Und ähnlich, wie hier die Konvergenz der Quadratsumme der Elemente der ersten Zeile, folgt die jeder anderen Zeile und die jeder Kolonne.

Zugleich ergibt die Schwarzsche Ungleichung, daß für alle $y_1, y_2, \dots$ von konvergenter Quadratsumme

$$|a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \dots|$$

absolut konvergiert und

$$\leq M \sqrt{x_1^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots}$$

ist, daß also auch jede einzelne Zeile des Doppelreihenschemas einer beschränkten Bilinearform absolut konvergiert und ihrem absoluten Werte nach unter der oberen Grenze M der Bilinearform gelegen ist, wenn man nur Variabelnsysteme zuläßt, deren Quadratsumme 1 nicht übersteigt.

In ähnlicher Weise erkennt man, indem man $x_1, \dots, x_\nu$ beliebig, $x_{\nu+1} = 0, \dots, x_n = 0$ setzt und die Definition der Beschränktheit betrachtet, daß die Summe der ersten ν Zeilen im Doppelreihenschema der Bilinearform die gleiche Eigenschaft hat:

$$(1) \quad \left| \sum_{p=1}^{\nu} \left(\sum_{(q)} a_{pq} y_q \right) x_p \right| \leq M \sqrt{\sum_{p=1}^{\nu} x_p^2} \sqrt{\sum_{(q)} y_q^2}.$$

Die Summe linkerhand darf übrigens nach Belieben umgeordnet werden.

Die letztere Bemerkung ist das wesentliche Hilfsmittel zum Beweise von

Satz 2. Zeilenweise Konvergenz) der beschränkten Bilinearformen. Eine beschränkte Bilinearform konvergiert für alle Wertsysteme*

*) Die Erörterungen des Textes setzen die bekannte Theorie der Doppelreihenkonvergenz (vgl. Encykl. d. math. Wiss. I A 3, 35 (Teil I, S. 97) sowie Édition française I 4, 16 (Vol. 1, S. 249)), welcher Begriffe und Namen entlehnt sind, nicht voraus.

ihrer beiden Variablenreihen von konvergenten Quadratsummen $x_1^2 + x_2^2 + \dots$, $y_1^2 + y_2^2 + \dots$ zeilenweise im Sinne der zeilenweisen Konvergenz einer Doppelreihe, d. h. es konvergiert die Summe jeder einzelnen Zeile und alsdann die Summe der Zeilensummenwerte:

$$\left| \sum_{(p)} \left(\sum_{(q)} a_{pq} x_p y_q \right) \right| = |A(x, y)| \leq M \sqrt{\sum_{(p)} x_p^2} \sqrt{\sum_{(q)} y_q^2}.$$

In der Tat: man überlege nur, was die behauptete Konvergenz der Summe der Zeilensummen bedeutet — denn daß diese Zeilensummen selbst existieren, ist schon im voraus erörtert. Es bedeutet, daß sich zu gegebenem ε ein Index n bestimmen läßt, sodaß

$$(2) \quad \left| \sum_{p=1}^{n+h} \left(\sum_{(q)} a_{pq} x_p y_q \right) - \sum_{p=1}^n \left(\sum_{(q)} a_{pq} x_p y_q \right) \right| = \left| \sum_{p=n+1}^{n+h} \left(\sum_{(q)} a_{pq} x_p y_q \right) \right| < \varepsilon$$

ist für jedes $h > 0$. Aus Gleichung (1) folgt aber, wenn man $v = n + h$, jedoch $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ wählt:

$$\left| \sum_{p=n+1}^{n+h} \left(\sum_{(q)} a_{pq} x_p y_q \right) \right| \leq M \sqrt{\sum_{p=n+1}^{n+h} x_p^2} \sqrt{\sum_{(q)} y_p^2}.$$

Nun kann man n so groß wählen, daß $x_{n+1}^2 + \dots + x_{n+h}^2$, dieser Ausschnitt aus einer als konvergent vorausgesetzten Reihe, für jedes $h > 0$ beliebig klein ist, also auch so groß, daß (2) für ein vorgegebenes ε und jedes $h > 0$ erfüllt ist, w. z. b. w.

Satz 3. Abschnittsweise Konvergenz der beschränkten Bilinearformen. Eine beschränkte Bilinearform konvergiert für alle Wertsysteme ihrer beiden Variablenreihen von konvergenten Quadratsummen $x_1^2 + x_2^2 + \dots$, $y_1^2 + y_2^2 + \dots$ abschnittsweise im Sinne der abschnittswisen Konvergenz einer Doppelreihe und zwar gegen denselben Wert wie bei zeilenweiser Summation, d. h. es existiert der Limes:

$$\lim_{n=\infty} \left(\sum_{p,q=1}^n a_{pq} x_p y_q \right) = \lim_{n=\infty} A_n(x, y) = \sum_{(p)} \left(\sum_{(q)} a_{pq} x_p y_q \right) = A(x, y).$$

Beide Teile der Behauptung sollen gemeinsam bewiesen werden, indem gezeigt wird, daß von einem hinreichend großen n ab $A_n(x, y)$ von $A(x, y)$ beliebig wenig abweicht. Zu diesem Ende vergleiche man für gegebene x_p, y_q den Wert des n^{ten} Abschnitts mit der Summe der ersten n Zeilen der Bilinearform:

$$(3) \quad \sum_{p=1}^n \left(\sum_{(q)} a_{pq} x_p y_q \right) - \sum_{p,q=1}^n a_{pq} x_p y_q = \sum_{p=1}^n \left(\sum_{q=n+1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q \right).$$

Diese Differenz wird mit wachsendem n beliebig klein. Denn wählt man, ähnlich wie beim Beweise der zeilenweisen Konvergenz, in (1) $v = n$; $y_1 = 0, \dots, y_n = 0$, so findet man, daß der Betrag des Ausdrucks (3) unter

$$(4) \quad M \sqrt{\sum_{p=1}^n x_p^2} \sqrt{\sum_{q=n+1}^{\infty} y_q^2}$$

gelegen ist. Wählt man n bei vorgelegtem ε so groß, daß $\sum_{q=n+1}^{\infty} y_q^2 < \left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^2$ ist, so wird der Ausdruck (4) kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$, für dieses und alle späteren n . Nun kann man gleichzeitig dafür sorgen, daß für dieses und alle folgenden n die Summe der ersten n Zeilen von $A(x, y)$ um weniger als $\frac{\varepsilon}{2}$ abweicht — wobei man Satz 2 benutzt —; so findet man endlich, daß man n bei vorgegebenem ε so groß wählen kann, daß $A_n(x, y)$ sich von $A(x, y)$ für diesen und jeden folgenden Wert von n um weniger als ε unterscheidet, d. h. aber, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x, y)$ existiert und ist gleich $A(x, y)$.*) —

Satz 4. In Analogie zu den beiden vorangehenden Sätzen konvergiert eine beschränkte Bilinearform auch kolonnenweise und gegen denselben Wert wie im Sinne abschnittsweiser Konvergenz. Aus allem diesem zusammen geht endlich hervor, daß sie zeilenweise und kolonnenweise gegen denselben Wert $A(x, y)$ konvergiert, gegen den auch die Abschnitte konvergieren; dieser soll deshalb als Wert der Bilinearform schlechthin bezeichnet werden.

§ 3.

Die Hilbertschen Faltungssätze.

Sind $A = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q$ und $B = \sum_{(p,q)} b_{pq} x_p y_q$ zwei beschränkte Bilinearformen, so ergibt Satz 1 des vorigen Paragraphen in Verbindung mit der Schwarzschen Ungleichung die absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{(\alpha)} a_{p\alpha} b_{\alpha q} = a_{p1} b_{1q} + a_{p2} b_{2q} + \dots,$$

wobei p, q irgend zwei Indizeswerte bedeuten. Sei c_{pq} der Wert dieser

*) Der Beweis enthält implizit auch die Konvergenz des Doppellimes

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \left(\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n a_{pq} x_p y_q \right).$$

unendlichen Reihe, so nennt Hilbert die Bilinearform $C = \sum_{(p,q)} c_{pq} x_p y_q$ die „Faltung“ der beiden gegebenen A und B .*)

Der erste Hilbertsche Faltungssatz. Die Faltung

$$C = AB = \sum_{(p,q)} c_{pq} x_p y_q = \sum_{(p,q)} \left(\sum_{(\alpha)} a_{p\alpha} b_{\alpha q} \right) x_p y_q$$

zweier beschränkter Bilinearformen

$$A = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q \quad \text{und} \quad B = \sum_{(p,q)} b_{pq} x_p y_q$$

existiert nicht nur, sondern ist selbst wieder beschränkt.

Die behauptete Beschränktheit bedeutet die Existenz einer oberen Schranke für den n^{ten} Abschnitt der Faltung C , d. h. für den Ausdruck:

$$(1) \quad \left| \sum_{p,q=1}^n \left(\sum_{(\alpha)} a_{p\alpha} b_{\alpha q} \right) x_p y_q \right|.$$

Dieser ist eine dreifache Summe; aber nur der eine ihrer Indizes läuft bis ∞ , und da diese Summation eine absolut konvergente ist, ist der ganze Ausdruck eine Summe von endlichvielen absolut konvergenten Reihen, ist also selbst absolut konvergent und darf beliebig umgeordnet werden, solange n endlich ist. Demnach kann man ihm auch folgende Gestalt geben:

$$(2) \quad \left| \sum_{(\alpha)} \left(\sum_{p=1}^n a_{p\alpha} x_p \right) \left(\sum_{q=1}^n b_{\alpha q} y_q \right) \right|.$$

Die Schwarzsche Ungleichung würde für diesen Ausdruck eine obere Schranke ergeben, wenn Konvergenz und obere Schranken für die beiden Ausdrücke

$$(3) \quad \sum_{(\alpha)} \left(\sum_{p=1}^n a_{p\alpha} x_p \right)^2 \quad \text{und} \quad \sum_{(\alpha)} \left(\sum_{q=1}^n b_{\alpha q} y_q \right)^2$$

bekannt wären; und zwar würde die Quadratwurzel aus dem Produkt dieser beiden Schranken eine solche für (2) sein. Es wird also hinreichen, folgenden Satz über *nur eine* beschränkte Bilinearform zu beweisen:

*) a. a. O. S. 179. Hilbert benutzt daselbst für die Faltung zweier Formen A, B die symbolische Schreibweise $A(x, \cdot) B(\cdot, y)$; wir benutzen schon an dieser Stelle die der Schreibweise des Matrizenkalküls nachgebildete AB , von welcher § 6 ausführlich handelt.

Die Beweise der Faltungssätze vgl. a. a. O. S. 178—180. Die beiden „Faltungssätze“ entsprechen dem Hilfssatz 2, 3 und Hilfssatz 4 bei Hilbert.

Wenn $\sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q$ beschränkt ist, existiert $\sum_{(\alpha)} \left(\sum_{p=1}^n a_{p\alpha} x_p \right)^2$ und bleibt seinem Betrage nach unter einer von $x_1, x_2, \dots$ und n unabhängigen Grenze, die übrigens gleich dem Quadrate M^2 der oberen Grenze M von $\sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q$ ist.

Zum Beweise dieser Tatsache gehe man von der Bemerkung aus, daß

$$(4) \quad \left| \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^v a_{pq} x_p y_q \right| \leq M \sqrt{\sum_{p=1}^n x_p^2} \sqrt{\sum_{q=1}^v y_q^2}$$

ist, wenn M die obere Grenze von A bedeutet. Ordnet man die endliche Summe linker Hand wie folgt:

$$\sum_{q=1}^v \left(\sum_{p=1}^n a_{pq} x_p \right) y_q,$$

so besagt (4), daß die Linearform der unendlichvielen Veränderlichen $y_1, y_2, \dots$

$$\sum_{(q)} \left(\sum_{p=1}^n a_{pq} x_p \right) y_q$$

beschränkt ist (vgl. § 1). Nach dem Konvergenzsatz über Linearformen konvergiert also die Quadratsumme ihrer Koeffizienten und es ist

$$\sum_{(q)} \left(\sum_{p=1}^n a_{pq} x_p \right)^2 \leq M^2 \sum_{p=1}^n x_p^2;$$

das ist aber genau, was noch zu beweisen übrig war, wenn noch der Summationsbuchstabe q durch den anderen α ersetzt wird.

Zugleich folgt, daß $M \cdot N$ eine Schranke für die Faltung AB ist, daß also die genaue obere Grenze der Faltung nicht größer als das Produkt der Grenzen der gefalteten Formen ist.*) —

*) Vielfach ist auch folgende Bemerkung von Nutzen, welche bei Hilbert an der Spitze der Entwicklung steht:

Corollar zum ersten Faltungssatz. Der Wert der Faltung $C(x, y)$ wird auch durch die folgende einfache, absolut konvergente Reihe dargestellt:

$$C(x, y) = \sum_{(\alpha)} \left(\sum_{(p)} a_{p\alpha} x_p \right) \left(\sum_{(q)} b_{\alpha q} y_q \right) = \sum_{(\alpha)} \frac{\partial A}{\partial y_\alpha} \frac{\partial B}{\partial x_\alpha}.$$

Beweis. Der Wert von $C(x, y)$ ist nach Satz 2 des § 2 dargestellt als

$$C(x, y) = \sum_{(p)} x_p \left(\sum_{(q)} y_q c_{pq} \right) = \sum_{(p)} x_p \left\{ \sum_{(q)} y_q \left(\sum_{(\alpha)} a_{p\alpha} b_{\alpha q} \right) \right\}.$$

Der Koeffizient von x_p im letzten Ausdruck ist der Wert der Bilinearform $B(x, y)$

Der zweite Hilbertsche Faltungssatz. Für drei beschränkte Bilinearformen

$$A = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q, \quad B = \sum_{(p,q)} b_{pq} x_p y_q, \quad C = \sum_{(p,q)} c_{pq} x_p y_q$$

gilt die Beziehung $A(BC) = (AB)C$, d. h.:

$$\sum_{(p,q)} \left\{ \sum_{(\alpha)} a_{p\alpha} \left(\sum_{(\beta)} b_{\alpha\beta} c_{\beta q} \right) \right\} x_p y_q = \sum_{(p,q)} \left\{ \sum_{(\beta)} \left(\sum_{(\alpha)} a_{p\alpha} b_{\alpha\beta} \right) c_{\beta q} \right\} x_p y_q.$$

Um diese Identität zweier Bilinearformen festzustellen, hat man die Übereinstimmung ihrer einzelnen Koeffizienten zu beweisen, d. h. man hat zu beweisen, daß

$$(5) \quad \sum_{(\alpha)} a_{p\alpha} \left(\sum_{(\beta)} b_{\alpha\beta} c_{\beta q} \right) = \sum_{(\beta)} \left(\sum_{(\alpha)} a_{p\alpha} b_{\alpha\beta} \right) c_{\beta q}$$

für jedes Indizespaar p, q richtig ist. In eine einzelne dieser Relationen gehen die b_{pq} sämtlich ein; sie sind nach Voraussetzung die Koeffizienten einer beschränkten Bilinearform. Von den a_{pq} dagegen geht in die einzelne Formel (5) nur eine Zeile ein, und deren Elemente haben nach § 2 Satz 1 eine konvergente Quadratsumme; ebenso konvergiert die Quadratsumme der Kolonne der c_{pq} , die in die einzelne Formel (5) eingeht. Setzt man also etwa

$$a_{p1} = x_1, \quad a_{p2} = x_2, \quad \dots, \\ c_{1q} = y_1, \quad c_{2q} = y_2, \quad \dots,$$

so besagt die behauptete Gültigkeit von (5) nichts anderes, als daß $\sum_{(\alpha, \beta)} b_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ bei zeilenweiser Summation denselben Wert ergibt wie bei kolonnenweiser. Der zweite Faltungssatz erscheint mithin als eine unmittelbare Folge des zusammenfassenden Satzes 4 von § 2.

für $x_\alpha = a_{p\alpha}$, berechnet durch kolonnenweise Summation. Nach Satz 4 von § 2 darf man dafür auch zeilenweise summieren:

$$C(x, y) = \sum_{(p)} x_p \left\{ \sum_{(\alpha)} a_{p\alpha} \left(\sum_{(q)} b_{\alpha q} y_q \right) \right\}.$$

Dies ist aber der Wert der Bilinearform $A(x, y)$, wo für y_α geschrieben ist $\sum_{(q)} b_{\alpha q} y_q$. Durch Wiederholung desselben Schlusses erhält man daher

$$C(x, y) = \sum_{(\alpha)} \left(\sum_{(q)} b_{\alpha q} y_q \right) \left(\sum_{(p)} a_{p\alpha} x_p \right),$$

und das ist die Behauptung.

§ 4.

Beschränkte quadratische Formen, beschränkte Bilinearformen mit komplexen Koeffizienten, beschränkte Hermitesche Formen.

Definition. Eine quadratische Form von unendlichvielen Veränderlichen $A(x, x) = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p x_q$ ($a_{pq} = a_{qp}$) heißt beschränkt, wenn eine von $x_1, x_2, \dots$ und n unabhängige positive Größe M existiert, sodaß für alle $x_1, \dots, x_n$, deren Quadratsumme ≤ 1 ist, und für jedes n

$$\left| \sum_{p,q=1}^n a_{pq} x_p x_q \right| \leq M$$

ist, oder also für beliebige $x_1, \dots, x_n$:

$$\left| \sum_{p,q=1}^n a_{pq} x_p x_q \right| \leq M \sum_{p=1}^n x_p^2.$$

Mit der quadratischen Form $A(x, x) = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p x_q$ ist eine Bilinearform naturgemäß verbunden, nämlich ihre sog. „Polarform“ $A(x, y) = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q$. Und jede Bilinearform ist umgekehrt auf diese Art an eine quadratische Form geknüpft, wenn ihre Koeffizienten die Symmetriebedingung $a_{pq} = a_{qp}$ erfüllen. Es gilt nun der Satz, mit dessen Hilfe sich alle Konvergenzbetrachtungen der vorangehenden Paragraphen auf beschränkte quadratische Formen übertragen:

Satz 1. Ist die quadratische Form $A(x, x) = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p x_q$ beschränkt, so ist es auch ihre Polarform, d. h. die Bilinearform $A(x, y) = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q$.
Es ist nämlich — rein algebraisch —

$$A_n(x+y, x+y) = A_n(x, x) + 2A_n(x, y) + A_n(y, y),$$

$$A_n(x-y, x-y) = A_n(x, x) - 2A_n(x, y) + A_n(y, y),$$

mithin

$$A_n(x, y) = \frac{1}{4} \{ A_n(x+y, x+y) - A_n(x-y, x-y) \}.$$

Es ist ferner, wenn M die obere Grenze der Form $A(x, x)$ bedeutet,

$$|A_n(x+y, x+y)| \leq M \sum_{p=1}^n (x_p + y_p)^2,$$

$$|A_n(x-y, x-y)| \leq M \sum_{p=1}^n (x_p - y_p)^2,$$

mithin

$$\begin{aligned} |A_n(x, y)| &\leq \frac{1}{4} \left\{ M \sum_{p=1}^n (x_p + y_p)^2 + M \sum_{p=1}^n (x_p - y_p)^2 \right\} \\ &\leq \frac{M}{2} \left\{ \sum_{p=1}^n x_p^2 + \sum_{p=1}^n y_p^2 \right\}; \end{aligned}$$

speziell für solche Wertsysteme also, für die

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1, \quad y_1^2 + \cdots + y_n^2 \leq 1$$

ist, ist

$$|A_n(x, y)| \leq M,$$

d. h. $A(x, y)$ ist beschränkt, und M ist zugleich eine obere Schranke dafür. Da unter den Werten, deren die Polarform $A(x, y)$ fähig ist, speziell aber auch alle Werte inbegriffen sind, deren $A(x, x)$ fähig ist, ist M zugleich auch die *genaue* Grenze von $A(x, y)$.

Die Polarform hat dieselbe genaue obere Grenze, wie die quadratische Form, zu der sie gehört.*)

Definition. Eine Bilinearform mit komplexen Koeffizienten

$$\sum_{(p,q)} c_{pq} x_p y_q = \sum_{(p,q)} (a_{pq} + i b_{pq}) x_p y_q$$

heißt beschränkt, wenn eine von den Veränderlichen und von n unabhängige positive Größe M existiert, sodaß

$$\left| \sum_{p,q=1}^n c_{pq} x_p y_q \right| \leq M$$

*) Im Zusammenhange hiermit sei noch erwähnt: Faltet man eine beliebige beschränkte Bilinearform A mit ihrer offenbar ebenfalls beschränkten „transponierten“ Form $A'(x, y) = A(y, x)$, so hat man in AA' eine symmetrische Bilinearform; auf diese Weise gehört also zu jeder symmetrischen oder unsymmetrischen Bilinearform A eine quadratische Form $AA'(x, x)$, und ähnlich noch die zweite $A'A(x, x)$. Beide quadratischen Formen sind definit, und zwar hat man

$$AA'(x, x) = \sum_{(\alpha)} \left(\sum_{(p)} a_{p\alpha} x_p \right)^2, \quad A'A(x, x) = \sum_{(\alpha)} \left(\sum_{(q)} a_{\alpha q} x_q \right)^2.$$

Übrigens sind die oberen Grenzen der Formen $AA'(x, x)$ und $A'A(x, x)$ beide gleich dem Quadrate M^2 der oberen Grenze M von $A(x, y)$. Denn einmal ist eine jede nach dem ersten Faltungssatze kleiner als $M \cdot M$, andererseits folgt aus der Schwarzschen Ungleichung

$$|A(x, y)| = \left| \sum_{(\alpha)} y_{\alpha} \left(\sum_{(p)} a_{p\alpha} x_p \right) \right| \leq \sqrt{\sum_{(\alpha)} y_{\alpha}^2 \cdot AA'(x, x)};$$

also kann auch umgekehrt die obere Grenze von A die Quadratwurzel aus der von AA' nicht übersteigen.

ist für alle x_p, y_q , die den Bedingungen

$$x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_n \bar{x}_n = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 \leq 1,$$

$$y_1 \bar{y}_1 + \dots + y_n \bar{y}_n = |y_1|^2 + \dots + |y_n|^2 \leq 1$$

genügen; dabei ist durch Überstreichen der Übergang zur konjugiert-imaginären Größe angedeutet.

Für reelle Wertsysteme der Veränderlichen folgt speziell, daß

$$\left| \sum_{p,q=1}^n a_{pq} x_p y_q + i \sum_{p,q=1}^n b_{pq} x_p y_q \right| \leq M$$

ist, falls $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$, $y_1^2 + \dots + y_n^2 \leq 1$, d. h.

$$\left(\sum_{p,q=1}^n a_{pq} x_p y_q \right)^2 + \left(\sum_{p,q=1}^n b_{pq} x_p y_q \right)^2 \leq M^2,$$

woraus

$$\left| \sum_{p,q=1}^n a_{pq} x_p y_q \right| \leq M, \quad \left| \sum_{p,q=1}^n b_{pq} x_p y_q \right| \leq M$$

hervorgeht, d. h. reeller und imaginärer Teil sind einzeln beschränkte Formen im Sinne reeller Formen. Die Umkehrung hiervon ist nicht minder evident.

Satz 2. Eine Bilinearform mit komplexen Koeffizienten

$$C = \sum_{(p,q)} c_{pq} x_p y_q = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q + i \sum_{(p,q)} b_{pq} x_p y_q = A + iB$$

ist dann und nur dann beschränkt, wenn reeller und imaginärer Bestandteil einzeln im Sinne reeller Bilinearformen beschränkt sind.

Mit Hilfe dieses Satzes übertragen sich die Konvergenzsätze der vorangehenden Paragraphen unmittelbar auf Formen mit komplexen Koeffizienten.

Definition. Eine Hermitesche Form von unendlichvielen Veränderlichen, d. h. eine Form $H(x, \bar{x}) = \sum_{(p,q)} h_{pq} x_p \bar{x}_q = \sum_{(p,q)} (s_{pq} + i t_{pq}) x_p \bar{x}_q = S + iT$, wo $h_{pq} = \bar{h}_{qp}$, also $s_{pq} = s_{qp}$, $t_{pq} = -t_{qp}$ ist, heißt beschränkt, wenn eine von den Veränderlichen und von n unabhängige positive Größe M existiert, sodaß

$$\left| \sum_{p,q=1}^n h_{pq} x_p \bar{x}_q \right| \leq M,$$

falls

$$x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_n \bar{x}_n = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 \leq 1$$

ist.

Indem man die Schwarzsche Ungleichung wie folgt auf komplexe Größen überträgt:

$$\left| \sum_{(p)} u_p v_p \right| \leq \sqrt{\sum_{(p)} u_p \bar{u}_p} \sqrt{\sum_{(p)} v_p \bar{v}_p},$$

und analog wie zu Anfang dieses Paragraphen bei den quadratischen Formen schließt, erhält man

Satz 3. Ist die Hermitesche Form $\sum_{(p,q)} h_{pq} x_p \bar{x}_q$ beschränkt, so ist es auch die zugehörige Bilinearform $\sum_{(p,q)} h_{pq} x_p y_q$, und beide haben dieselbe genaue obere Grenze.*)

§ 5.

Kriterien der Beschränktheit.**)

Erste Bemerkung. Satz 1 von § 2 gibt zwar eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für die Beschränktheit einer Bilinearform.

Die Bilinearform $\sum_{(p,q)} \frac{1}{(p+q)^{1-\varepsilon}} x_p y_q$ gibt nämlich, wenn $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ ist, ein Beispiel einer Bilinearform, in deren Koeffizientenschema die Quadratsumme jeder Zeile und jeder Kolonne offenbar konvergiert und mit wachsendem Zeilen- bzw. Kolonnenindex nicht nur unter endlicher Grenze bleibt, sondern sogar unbegrenzt klein wird, und die doch nicht beschränkt ist. Denn sonst müßte speziell für $x_p = y_p = \frac{1}{p^{1/2+\eta}}$ ($\eta > 0$) die Doppelsumme positiver Größen

$$A(x, y) = \sum_{(p,q)} \frac{1}{(p+q)^{1-\varepsilon}} \frac{1}{p^{1/2+\eta}} \frac{1}{q^{1/2+\eta}}$$

konvergieren; durch Verkleinerung ihrer Glieder verwandelt sich aber diese Reihe in

$$\sum_{(p,q)} \frac{1}{(p+q)^{1-\varepsilon}} \frac{1}{(p+q)^{1/2+\eta}} \frac{1}{(p+q)^{1/2+\eta}} = \sum_{(p,q)} \frac{1}{(p+q)^{2-\varepsilon+2\eta}},$$

und es ist

$$\sum_{(p,q)} \frac{1}{(p+q)^m} = \frac{1}{2^m} + \frac{2}{3^m} + \frac{3}{4^m} + \dots$$

*) Analog der Anmerkung S. 304 gehören zu jeder komplexen, beschränkten Bilinearform zwei beschränkte definite Hermitesche Formen, $A \bar{A}'(x, \bar{x})$ und $\bar{A}' A(x, \bar{x})$, deren obere Grenzen beide mit dem Quadrate der oberen Grenze von $|A(x, y)|$ übereinstimmen.

**) Die Bemerkungen dieses Paragraphen werden in den übrigen Entwicklungen nicht unmittelbar benutzt.

divergent für $m - 1 \leq 1$, d. i. $m \leq 2$. Es genügt also, $2 - \varepsilon + 2\eta \leq 2$, mithin $\eta \leq \frac{\varepsilon}{2}$ zu wählen, um die obige Form als nicht beschränkt zu erkennen. —

Zweite Bemerkung. Konvergiert die Quadratdoppelsumme $\sum_{(p,q)} a_{pq}^2$, so ist $\sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q$ beschränkt; es ist dies jedoch keine notwendige Bedingung für die Beschränktheit.

Das letztere lehrt schon das einfache Beispiel der Form

$$E(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots,$$

deren Beschränktheit nur eine andere Formulierung der Schwarzschen Ungleichung ist, während die Quadratsumme ihrer Koeffizienten, in der die 1 unendlich oft auftritt, divergiert.

Andererseits folgt aber durch zweimalige Anwendung der Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q \right)^2 &= \left(\sum_{(q)} \left(\sum_{(p)} a_{pq} x_p \right) y_q \right)^2 \leq \sum_{(q)} \left(\sum_{(p)} a_{pq} x_p \right)^2 \sum_{(q)} y_q^2 \\ &\leq \sum_{(q)} \left(\sum_{(p)} a_{pq}^2 \sum_{(p)} x_p^2 \right) \sum_{(q)} y_q^2 \leq \sum_{(p,q)} a_{pq}^2 \sum_{(p)} x_p^2 \sum_{(q)} y_q^2, \end{aligned}$$

sodaß $\sqrt{\sum_{(p,q)} a_{pq}^2}$ zugleich eine obere Schranke der Form ist.

Übrigens ist bei den Formen von konvergenter Quadratdoppelsumme die genaue obere Grenze stets zugleich wirkliches Maximum der Werte der Form im Bereich $\sum_{(p)} x_p^2 \leq 1$, $\sum_{(q)} y_q^2 \leq 1$. Sie teilen nämlich mit den Bilinearformen von endlichvielen Veränderlichen die Eigenschaft der Stetigkeit in einem so weitgehenden Maße, daß der Weierstraßsche Schluß für die Existenz des Maximums angewendet werden darf*); diese Eigenschaft ist folgende: Ist eine Folge von Stellen $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots; y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots$ ($n = 1, 2, \dots$) vorgelegt, für die jeder einzelne Limes

$$\lim_{n=\infty} x_1^{(n)} = x_1, \lim_{n=\infty} x_2^{(n)} = x_2, \dots; \lim_{n=\infty} y_1^{(n)} = y_1, \lim_{n=\infty} y_2^{(n)} = y_2, \dots$$

existiert, so existiert $\lim_{n=\infty} A(x^{(n)}, y^{(n)})$ und ist gleich $A(x, y)$. Diese Eigen-

*) Übrigens ist mit den Formen von konvergenter Doppelquadratsumme die Klasse der Formen mit der in Rede stehenden Eigenschaft nicht erschöpft; vgl. Hilbert, 4. Mitteilung, S. 203 (Satz VI).

schaft nennen wir mit Hilbert*) „Vollstetigkeit“, im Gegensatz zu der weniger besagenden „Stetigkeit“, welche allen beschränkten Formen zukommt und welche die Existenz jenes Limes nur unter der Bedingung fordert, daß

$$\lim_{n=\infty} \{(x_1 - x_1^{(n)})^2 + (x_2 - x_2^{(n)})^2 + \dots\} = 0,$$

$$\lim_{n=\infty} \{(y_1 - y_1^{(n)})^2 + (y_2 - y_2^{(n)})^2 + \dots\} = 0$$

ist.

Daß nicht jede beschränkte Bilinearform vollstetig ist, geht aus der anderen Bemerkung hervor, daß nicht jede beschränkte Bilinearform ihre genaue obere Grenze zum Maximum hat. Denn es ist z. B. die Form

$$\frac{1}{2} x_1 y_1 + \frac{2}{3} x_2 y_2 + \frac{3}{4} x_3 y_3 + \dots$$

beschränkt; sie erreicht aber ihre obere Grenze 1 nicht, der sie für

$$x_1 = y_1 = 0, \dots, x_{n-1} = y_{n-1} = 0, x_n = y_n = 1, x_{n+1} = y_{n+1} = 0, \dots$$

beliebig nahe kommt. Es ist nämlich nach der Schwarz'schen Ungleichung

$$\left| \frac{1}{2} x_1 y_1 + \frac{2}{3} x_2 y_2 + \frac{3}{4} x_3 y_3 + \dots \right| \leq \sqrt{\frac{1}{2} x_1^2 + \frac{2}{3} x_2^2 + \dots} \sqrt{\frac{1}{2} y_1^2 + \frac{2}{3} y_2^2 + \dots},$$

und die rechte Seite wird nur dann gleich $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots}$ sein, wenn sämtliche x_p und y_p verschwinden.

Dritte Bemerkung. *Es gibt beschränkte Bilinearformen, welche ihre obere Grenze nicht erreichen, welche also nicht vollstetig sind.*

Weit schwieriger ist die Begründung von folgender Tatsache:

Vierte Bemerkung. *Eine beschränkte Bilinearform $\sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q$ ist nicht notwendig „absolut-beschränkt“, d. h. $\sum_{(p,q)} |a_{pq}| x_p y_q$ braucht nicht notwendig beschränkt zu sein, m. a. W. die Form braucht keine absolut-konvergente Doppelsumme vorzustellen.*

Wir führen ohne Beweis nur an, daß dies aus dem Beispiel $\sum_{(p \neq q)} \frac{1}{p-q} x_p y_q$ hervorgeht.**)

*) 4. Mitteilung S. 200; in der 5. Mitteilung (S. 439) sagt Hilbert dafür schlechtweg „Stetigkeit“, während er die im Text an zweiter Stelle genannte Eigenschaft als „beschränkte Stetigkeit“ bezeichnet.

**) Daß diese Form beschränkt ist, hat zuerst Hilbert in einem Vortrage in der math. Gesellsch. in Göttingen bewiesen (Februar 1907). Ein anderer Beweis dafür von Herrn I. Schur wird, wie er uns mitteilt, demnächst im Journ. f. Math. erscheinen. Daß jene Form nicht absolut-beschränkt ist, ist etwa in Satz 1 von Nr. 3 der Arbeit „Zur Transformation der Scharen bilinearer Formen von unendlichvielen Veränderlichen“ von O. Toeplitz enthalten (Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1907, S. 110; eine ausführliche Darstellung mit Beweisen folgt demnächst in diesen Annalen).

§ 6.

Kalkül mit beschränkten Matrizen (Bilinearformen).

Man kann die Hilbertschen Faltungssätze einfach dahin interpretieren, daß man für beschränkte unendliche Matrizen den für endliche Matrizen üblichen Kalkül aufstellen kann. An der Spitze stehen dabei die

Definitionen:)* Unter einer unendlichen Matrix wird eine unendliche Doppelfolge von Größen

$$A = (a_{pq}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

verstanden. Insbesondere heißt eine unendliche Matrix „beschränkt“, wenn die zugehörige Bilinearform $\sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q$ beschränkt ist.

Addition. Unter der Summe zweier beschränkten Matrizen $A = (a_{pq})$, $B = (b_{pq})$ versteht man die offenbar ebenfalls beschränkte Matrix

$$C = (c_{pq}) = (a_{pq} + b_{pq}) = A + B,$$

oder ausgeschrieben:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots \\ b_{21} & b_{22} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Multiplikation. Unter dem Produkt zweier beschränkten Matrizen $A = (a_{pq})$, $B = (b_{pq})$ versteht man die nach dem ersten Faltungssatz existierende und selbst wieder beschränkte Matrix

$$C = (c_{pq}) = \left(\sum_{(\alpha)} a_{p\alpha} b_{\alpha q} \right) = AB,$$

oder ausgeschrieben:

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots \\ b_{21} & b_{22} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots & \cdots \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

die in der bei dem Multiplikationstheorem der Determinanten üblichen Art durch Komposition von Zeilen der ersten und Kolonnen der zweiten Matrix gebildet ist.

Bezeichnet man noch die lediglich mit Nullen besetzte Matrix mit 0, so unterliegt die eben definierte Addition beschränkter unendlicher Matrizen denselben formalen Gesetzen, wie die Addition gemeiner Zahlen. Mit der

*) Vgl. Cayley, Remarques sur la notation des fonctions algébriques, J. f. Math. 50, S. 282; Frobenius, J. f. Math. 84, S. 1.

Multiplikation steht es, wie schon bei endlichen Matrizen, anders, jedoch genau so wie bei endlichen Matrizen, solange die Umkehrung der Multiplikation nicht in Betracht gezogen wird; erst bei der Division tritt ein Unterschied der beschränkten unendlichen gegenüber den endlichen Matrizen auf. Im einzelnen gestaltet sich dies folgendermaßen.

Zunächst gilt das kommutative Gesetz der Multiplikation ebensowenig wie bei endlichen Matrizen; danach ist also zwischen AB und BA zu unterscheiden. Die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes für die Multiplikation $A(BC) = (AB)C$ besagt der zweite Hilbertsche Faltungssatz; die des distributiven Gesetzes ist ohne weiteres evident, da es sich bei diesem nur um absolut-konvergente einfache, nicht um möglicherweise*) nur bedingt-konvergente Doppelsummen handelt. — Daß ein Produkt nur verschwindet, wenn ein Faktor verschwindet, ist wie bei endlichen Matrizen unrichtig. — Mit $E = (e_{pq})$ werde endlich die „Einheitsmatrix“ bezeichnet, die zu der Bilinearform $x_1y_1 + x_2y_2 + \dots$ gehört:

$$E = (e_{pq}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix};$$

es sei also $e_{pq} = 1$ für $p = q$, $e_{pq} = 0$ für $p \neq q$. Es gilt dann unmittelbar für jede Matrix A :

$$AE = A, \quad EA = A.$$

Wie bei endlichen Matrizen ist es nützlich, die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

mit dem kleinen Buchstaben a zu bezeichnen, speziell also E nebenbei mit 1. $aA = Aa$ wird dann die Matrix (aa_{pq}) bedeuten, woraus hervorgeht, daß eine solche Matrix a mit jeder anderen A hinsichtlich der Reihenfolge bei der Multiplikation vertauschbar ist.

Ist $A = (a_{pq})$ irgend eine beschränkte Matrix, so soll die andere offenbar ebenfalls beschränkte Matrix

$$A' = (a_{qp}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots \\ a_{12} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

*) Vgl. § 5, Vierte Bemerkung.

die zu A „transponierte Matrix“ A' heißen, sodaß das Koeffizientenschema einer quadratischen Form durch $A = A'$ charakterisiert ist, das einer Hermiteschen Form durch $A = \bar{A}'$. — Es gilt formal $(AB)' = B' A'$.

§ 7.

Formalsätze über reziproke Formen.

Wir untersuchen nun die Division von Matrizen, d. h. die Frage nach der Existenz der durch die beiden Matrixgleichungen

$$(1) \quad AX = E, \quad YA = E,$$

definierten *vorderen Reziproken* X und *hinteren Reziproken* Y^* von A . Bei endlichen Matrizen ist die Lösbarkeit beider Gleichungen (1) an das Nichtverschwinden der Determinante der Matrix A geknüpft, sodaß die Lösbarkeit der einen die der anderen zur Folge hat, und jede ist höchstens auf eine Weise lösbar. Dagegen lehrt das Beispiel der Matrizen

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

daß $AX = E$ nicht nur eine, sondern sogar unendlich viele Lösungen haben kann (die $w_1, w_2, \dots$ sind ganz willkürlich), während zugleich $YA = E$ unlösbar ist. In Anbetracht dieses Tatbestandes wird es nützlich sein, zu bemerken, daß für endliche wie für beschränkt-unendliche Matrizen folgende Sätze gelten, die nicht an die Natur der Matrizen, sondern rein formal an die für Matrizen geltenden Rechnungsregeln geknüpft sind**):

Erster Formalsatz. *Besitzt eine beschränkte Matrix sowohl eine vordere als auch eine hintere beschränkte Reziproke, sind also die beiden Gleichungen $AX = E$, $YA = E$ lösbar, so sind die Lösungen beider einander gleich und also die einzigen.*

Denn durch vordere Multiplikation der einen Gleichung mit Y folgt $YAX = Y$, durch hintere Multiplikation der anderen mit X ebenso $YAX = X$, also $X = Y$.

*) Hilbert gebraucht hierfür in einem etwas anderen Zusammenhange den Ausdruck „*Resolvente*“ (vierte Mitt. S. 160 ff.).

**) Vgl. O. Toeplitz, Die Jacobische Transformation der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen, Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl., 1907, S. 101 ff., § 4. — Der formale Charakter dieser Sätze bewirkt es, daß sie und mit ihnen die Problemstellungen des § 8 sich unmittelbar auch auf die finiten, zeilenfiniten etc. Systeme übertragen.

Da im Falle $A = A'$ aus $AX = E$ sofort $E' = (AX)' = X'A$ folgt, so ergibt sich unmittelbar das

Korollar. Eine beschränkte, symmetrische Matrix besitzt entweder keine beschränkte Reziproke oder nur eine einzige, zugleich vordere und hintere; dieselbe ist selbst symmetrisch.

Eine Umkehrung des ersten Formalsatzes stellt der zweite dar:

Zweiter Formalsatz. Besitzt eine beschränkte Matrix eine und nur eine hintere Reziproke, so ist diese zugleich auch vordere, und also auch die einzige.

Beweis: Sei X die hintere Reziproke, $AX = E$, und sei $XA = U$, so folgt $AXA = A$ oder $AU = A$, $A(E - U) = 0$; also ist mit X zugleich auch $X + (E - U)$ eine hintere Reziproke von A :

$$A(X + E - U) = AX + A(E - U) = E + 0 = E;$$

die vorausgesetzte Eindeutigkeit der hinteren Reziproken gibt $X + E - U = X$ oder $E - U = 0$, $U = E$, d. h. $XA = E$, w. z. b. w.

Bezüglich der Reziproken hat man danach im ganzen die vier Möglichkeiten:

1. A hat eine einzige beschränkte Reziproke, vorn und hinten dieselbe, die alsdann durch A^{-1} bezeichnet werden darf;
2. A hat weder eine vordere, noch eine hintere beschränkte Reziproke;
3. A hat keine vordere, unendlich viele hintere Reziproken;
4. A hat keine hintere, unendlich viele vordere Reziproken.

Bei endlichen Matrizen kommen die Fälle 3. und 4. nicht vor.

Der Nutzen des Matrizenkalküls beruht — bei endlichen wie bei unendlichen Matrizen — auf der doppelten Bedeutung der Matrix: als Koeffizientenschema einer bilinearen (quadratischen) Form und als Koeffizientenschema einer linearen, homogenen Transformation. Insbesondere erhält man die Bilinearform $B(\xi, \eta)$, die aus einer anderen $A(x, y)$ hervorgeht, wenn man darin die lineare Substitution $x = U(\xi)$, $y = V(\eta)$ einführt, im Matrizenkalkül als $B = U'AV$, also speziell die quadratische Form $B(\xi, \xi)$, die aus $A(x, x)$ durch die Substitution $x = W(\xi)$ entsteht, als $B = W'AW$. Andererseits geht eine lineare Transformation $y = A(x)$, deren beide Variablenreihen man den linearen Substitutionen $x = U(\xi)$, $y = V(\eta)$ unterwirft, in $\eta = B(\xi)$ über, wo $B = V^{-1}AU$ ist, also speziell in $B = U^{-1}AU$, wenn man beide Variablenreihen derselben Transformation unterwirft.

Endlich ist eine Matrix R offenbar das Koeffizientenschema einer orthogonalen Substitution, wenn $RR' = E$ und $R'R = E$ ist. Daß, anders als bei Matrizen von n Zeilen und Kolonnen, keine dieser beiden Relationen eine Folge der anderen ist, lehrt zugleich das Beispiel (2).

§ 8.

Klassifikation der Probleme.

Die Hilbertschen Faltungssätze (§§ 1—4) oder, anders ausgedrückt, die Begründung des Kalküls mit beschränkten Matrizen (§§ 6, 7) gestatten es, eine wesentliche Gruppe von Problemen der linearen Algebra unmittelbar für unendlichviele Veränderliche zu formulieren. Es sei eine Übersicht über diese algebraischen Probleme vorangestellt, die sich nachträglich vermöge einer geringfügigen Modifikation der Formulierung sofort auf unendlichviele Veränderliche übertragen.

Die Theorie der linearen Gleichungssysteme, wenn man das gesamte System ihrer Tatsachen im Auge behält, wie sie sich etwa an das Wort „Rang eines Gleichungssystems“ anknüpfen, kommt auf das sog. Problem der Äquivalenz bilinearer Formen hinaus oder subsumiert sich ihm wenigstens; dieses Problem präzisiert sich folgendermaßen:

Ia. *Äquivalenz bilinearer Formen. Zwei Bilinearformen*

$$A = \sum_{p,q=1}^n a_{pq} x_p y_q, \quad B = \sum_{p,q=1}^n b_{pq} \xi_p \eta_q$$

heißen äquivalent, wenn sie durch lineare Transformationen der beiden

Variablenreihen $x_p = \sum_{\alpha=1}^n u_{p\alpha} \xi_\alpha$, $y_q = \sum_{\beta=1}^n v_{q\beta} \eta_\beta$ von nicht verschwindenden

Determinanten $|u_{pq}| \neq 0$, $|v_{pq}| \neq 0$ ineinander übergeführt werden können. Im Matrizenkalkül heißt das

$$U' A V = B, \quad |U| \neq 0, \quad |V| \neq 0.$$

Die Beantwortung dieses Problems lautet, daß zwei Bilinearformen mit endlicher Variabelnzahl dann und nur dann übereinstimmen, wenn sie denselben Rang haben. Es ist leicht, aus diesem Resultat alle geläufigen Sätze über die Auflösung linearer Gleichungssysteme abzuleiten, soweit der Begriff der Determinante*) darin nicht vorkommt.

Das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen subsumiert sich folgendem Problem:

Ib. *Kongruenz quadratischer Formen. Zwei quadratische Formen*

$$A = \sum_{p,q=1}^n a_{pq} x_p x_q, \quad B = \sum_{p,q=1}^n b_{pq} \xi_p \xi_q \quad (a_{pq} = a_{qp}, \quad b_{pq} = b_{qp})$$

*) Wie man diesen von einem solchen Standpunkte aus entwickeln kann, ist in Kroneckers „Vorlesungen über die Theorie der Determinanten“, Band 1 (Leipzig 1903) durchgeführt.

heißen kongruent, wenn sie durch eine lineare Transformation der Veränderlichen $x_p = \sum_{\alpha=1}^n w_{p\alpha} \xi_\alpha$ von nicht verschwindender Determinante $|w_{pq}| \neq 0$ ineinander übergeführt werden können. Im Matrizenkalkül heißt das:

$$W' A W = B, \quad |W| \neq 0.$$

Auch hier lautet die Antwort — was keine selbstverständliche Folge der vorigen ist —, daß zwei quadratische Formen dann und nur dann kongruent sind, wenn sie im Range übereinstimmen. —

Das Hauptachsenproblem der Kurven und Flächen 2. Ordnung subsumiert sich als sehr spezieller Fall dem Problem der Elementarteilerttheorie, wie es Weierstraß zuerst gelöst hat, genauer dem zweiten der beiden folgenden:

IIa. Äquivalenz von Scharen bilinearer Formen. Zwei Scharen $A_1 - \lambda A_2$, $B_1 - \lambda B_2$, oder besser zwei Paare $A_1(x, y)$, $A_2(x, y)$; $B_1(\xi, \eta)$, $B_2(\xi, \eta)$ von bilinearen Formen heißen äquivalent, wenn sie durch lineare Transformationen der beiden Variablenreihen von nicht verschwindenden Determinanten gleichzeitig ineinander transformiert werden können; im Matrizenkalkül:

$$U A_1 V = B_1, \quad U A_2 V = B_2, \quad |U| \neq 0, \quad |V| \neq 0,$$

oder, mit der Unbestimmten λ in eine einzige Relation kombiniert:

$$U(A_1 - \lambda A_2)V = B_1 - \lambda B_2, \quad |U| \neq 0, \quad |V| \neq 0,$$

wo nur hervorzuheben ist, daß die u_{pq} , v_{pq} von λ unabhängig sein müssen.

Die Übereinstimmung der „charakteristischen Größen“, d. h. der Nullstellen der Polynome bezüglich λ

$$|A_1 - \lambda A_2|, \quad |B_1 - \lambda B_2|$$

ist eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für die Äquivalenz zweier Scharen von Bilinearformen; auch die Übereinstimmung der genaueren Rangzahlen der Systeme $A_1 - \lambda A_2$, $B_1 - \lambda B_2$ für alle und insbesondere die charakteristischen Werte des Parameters λ reicht nicht aus. Vielmehr müssen zu den charakteristischen Größen noch gewisse Anzahlinvarianten hinzutreten, um sie zu einem vollen Invariantensystem zu ergänzen; eine genauere Zerfällung der charakteristischen Polynome in ihre sog. Elementarteiler muß vorgenommen werden.

IIb. Kongruenz von Scharen quadratischer Formen. Zwei Scharen $A_1 - \lambda A_2$, $B_1 - \lambda B_2$ oder, besser zwei Paare $A_1(x, x)$, $A_2(x, x)$; $B_1(\xi, \xi)$, $B_2(\xi, \xi)$ von quadratischen Formen heißen kongruent, wenn sie durch eine lineare Transformation der Veränderlichen von nicht verschwindender Determinante gleichzeitig ineinander transformiert werden können; im Matrizenkalkül:

$$W' A_1 W = B_1, \quad W' A_2 W = B_2, \quad |W| \neq 0,$$

oder mit der Unbestimmten λ in eine einzige Relation kombiniert:

$$W' (A_1 - \lambda A_2) W = B_1 - \lambda B_2, \quad |W| \neq 0,$$

wo nur hervorzuheben ist, daß die w_{pq} von λ unabhängig sein sollen.

Wiederum ist — was auch hier nicht selbstverständlich folgt — für die Kongruenz wie für die Äquivalenz außer der Übereinstimmung der charakteristischen Größen und der zugehörigen Rangzahlen noch diejenige der Elementarteiler erforderlich, um die notwendigen Bedingungen zu hinreichenden zu ergänzen. —

Wählt man als zweites Formenpaar in beiden Fällen die Einheitsform

$$E = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \quad \text{bzw.} \quad = x_1^2 + \cdots + x_n^2,$$

so wird aus IIa das sog. Ähnlichkeitsproblem:

IIIa. *Ähnlichkeit von Bilinearformen.* Zwei Bilinearformen A, B heißen ähnlich, wenn eine dritte U von nicht verschwindender Determinante existiert, sodaß $U^{-1} A U = B$ ist.

Sie sind es, wenn ihre charakteristischen Größen und überdies die Elementarteiler übereinstimmen.

Aus IIb dagegen wird, wenn man zugleich alle vorkommenden Größen als reelle versteht, das Hauptachsenproblem, da $W' W = E$ nur im Matrizenkalkül ausdrückt, daß W das Koeffizientenschema einer orthogonalen Transformation ist:

IIIb. *Orthogonaläquivalenz quadratischer Formen.* Zwei reelle quadratische Formen heißen orthogonaläquivalent, wenn sie sich orthogonal ineinander transformieren lassen.

Sie sind es, wenn die charakteristischen Größen (d. s. die Wurzeln der Säkulargleichung), die in diesem Falle bekanntlich selbst reell sind, übereinstimmen; die Hinzunahme der Elementarteiler ist in diesem Spezialfalle nicht nötig. —

Alle diese Problemformulierungen übertragen sich unmittelbar auf Formen unendlichvieler Veränderlicher von konvergenter Quadratsumme, wenn man statt endlicher überall beschränkte unendliche Matrizen, beschränkte bilineare und quadratische Formen in Betracht zieht. Es bedarf nur noch der einen Modifikation, daß man statt von „linearen Transformationen mit nicht verschwindender Determinante“ von solchen redet, die „eindeutig invertierbar“ sind (Fall 1. des Schemas am Ende von § 7). Bei endlicher Variablenzahl ist dies nur eine andere Ausdrucksweise, und bei unendlichvielen wird es auf diese Weise möglich, einen passenden analogen Begriff zu bilden, ohne den Begriff einer unendlichen Determinante zu gebrauchen,

der nur bei ganz speziellen beschränkten Matrizen ausgebildet worden ist und sich für den vorliegenden Zweck eben auch als unnötig erweist.

Die charakteristischen Größen definieren sich dann als diejenigen Werte des Parameters λ , für welche $A_1 - \lambda A_2$ keine eindeutige beschränkte Reziproke hat. Nach Hilbert nennen wir die Gesamtheit dieser Werte das Spektrum der Formenschar.

Definition. Das Spektrum einer Formenschar $A_2 - \lambda A_1$ ist die Gesamtheit derjenigen Werte des Parameters λ , für welche $A_1 - \lambda A_2$ keine eindeutige beschränkte Reziproke hat. Spektrum einer einzelnen Form A schlechthin heißt das Spektrum der Formenschar $A - \lambda E$.

Unmittelbar aus den Formalsätzen des § 7 folgt der

Satz von der Invarianz des Spektrums. Die Übereinstimmung der Spektra ist eine notwendige Bedingung für Äquivalenz, Kongruenz, Ähnlichkeit und Orthogonaläquivalenz. Z. B. haben also zwei orthogonaläquivalente quadratische Formen sicher dasselbe Spektrum.

Das Problem III b bildet den Hauptgegenstand der vierten Mitteilung von Hilbert. Anders als bei endlicher Variabelnzahl erschöpft hier das Spektrum der quadratischen Form bei weitem nicht das volle Invariantensystem. In dem ersten Teil der vierten Mitt. (bis S. 199), in der anschließenden Dissertation*) von E. Hellinger sowie in der von beiden unabhängigen Darstellung in der Habilitationsschrift**) des letzteren wird dies Problem in gewissem Sinne vollständig gelöst. Andererseits gibt Hilbert (a. a. O. S. 200—203) die vollständige Lösung des Problems III b für die besondere Klasse der vollstetigen***) beschränkten quadratischen Formen, sowie Anwendungen auf einen gewissen Spezialfall des Problems II b und auf analoge Probleme für Hermitesche und schiefssymmetrische vollstetige Formen (S. 209—218). Diese Theorie unterscheidet sich von der zuvor erwähnten allgemeinen Theorie darin, daß ihre Resultate denen der Algebra genau analog sind: die Übereinstimmung der Spektra erweist sich auch als hinreichende Bedingung für die Orthogonaläquivalenz zweier vollstetigen Formen. Diese spezielle Theorie gestattet auch (5. Mitt.), die Resultate der 1. Mitt. von Hilbert, insbesondere die Existenz der Eigenwerte und die Entwicklung nach Eigenfunktionen, durch Rückkehr zu den Integralgleichungen abzuleiten, da die stetigen oder nur hinreichend integrierbaren Kernen

*) Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlichvielen Variablen. Göttingen 1907.

**) Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen. Journ. f. Math. 136 (1909), S. 210—271.

***) Vgl. § 5, zweite und dritte Bemerkung.

$K(s, t)$ entsprechenden quadratischen Formen unter den vollstetigen enthalten sind.*)

Zugleich gibt Hilbert (a. a. O. S. 218—227) alles, um die Fredholmschen Sätze abzuleiten; mit anderen Worten, er behandelt das Problem Ia für vollstetige Bilinearformen.***) Unter das allgemeine Problem Ia fallen dann die Arbeiten über Auflösung linearer Gleichungssysteme mit unendlichvielen Unbekannten, soweit sie die Konvergenz der Quadratsumme der Unbekannten fordern: E. Schmidt***), der noch weniger als Beschränktheit des Koeffizientensystems voraussetzt, nämlich nur die Konvergenz der Quadratsumme der Koeffizienten jeder einzelnen Gleichung, und eine vollständige Auflösungstheorie entwickelt; O. Toeplitz†), der ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz einer eindeutigen, beschränkten Reziproken gibt; E. Hilb††), der dasselbe Kriterium einfacher ableitet.

*) An dieser Stelle sind eine Reihe neuer Arbeiten zu erwähnen, welche an sich Integralgleichungen betreffen, aber, auf unendlichviele Veränderliche übertragen, einen Beitrag zur Theorie des Ähnlichkeitsproblems (IIa) für vollstetige Formen bedeuten würden:

J. Plemelj, Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichungen, Monatshefte f. Math. u. Phys. 15 (1904) S. 93.

E. Goursat, Recherches sur les équations intégrales linéaires, Annales de la faculté des sciences de l'université de Toulouse, 1908, S. 6.

I. Schur, Math. Ann. Bd. 66, S. 488 ff., insbesondere 501—510.

**) Der erste, der eine systematische Theorie einer gewissen Klasse linearer, unendlicher Gleichungssysteme von einiger Allgemeinheit gegeben hat, ist Helge von Koch (Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires, Acta Math. 16 (1892), S. 217 ff. — insbesondere S. 245—249). Seine Auflösungsformeln, die sich aus unendlichen Determinanten aufbauen, kann man kurz durch die Bemerkung beschreiben, daß sie, auf Integralgleichungen überschrieben, in die Formeln von Fredholm übergehen. Übrigens hat Helge von Koch neuerdings (Sur la convergence des déterminants infinis, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, 28 (2. Sem. 1909), S. 255 ff.) unter Ausdehnung seiner früheren Konvergenzeinschränkungen seine Methoden auf die Forderung konvergenter Quadratsumme und auf eine wesentlich umfassendere Teilklasse der vollstetigen Formen angewandt.

***)) Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, Rend. del. Circ. Mat. di Palermo, 25, 1. Semestre 1908, S. 53—77.

†) Die Jacobische Transformation der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen, Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl., 1907, S. 101—109.

††) Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, Sitzungsber. d. phys.-med. Soc. in Erlangen, Bd. 40 (1908), S. 84.

Zweites Kapitel.

§ 9.

Gleichmäßige Endlichkeit linearer Formen.

Satz von der gleichmäßigen Endlichkeit der Linearformen unendlichvieler Veränderlicher. Konvergiert die mit reellen Koeffizienten $a_1, a_2, \dots$ gebildete Reihe (Linearform)

$$a(x) = \sum_{(p)} a_p x_p = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots$$

für jedes Wertsystem $x_1, x_2, \dots$ der unendlichvielen Veränderlichen, dessen Quadratsumme $\sum_{(p)} x_p^2$ konvergiert und ≤ 1 ist, so gibt es eine reelle positive Zahl M derart, daß für alle jene Wertsysteme der Wert der Linearform, absolut genommen, unterhalb M liegt:

$$(1) \quad |a(x)| = \left| \sum_{(p)} a_p x_p \right| \leq M \quad \text{für} \quad \sum_{(p)} x_p^2 \leq 1.$$

Mit anderen Worten: Eine an jedem einzelnen Punkte innerhalb der Einheitskugel $\sum_{(p)} x_p^2 \leq 1$ endliche Linearform bleibt in ihr gleichmäßig endlich und ist demnach eine beschränkte Linearform.

Man könnte*) die Behauptung dieses Satzes auch in der äquivalenten Form aussprechen, daß $\sum_{(p)} a_p^2$ konvergiert.**)

Der Beweis des Satzes verläuft indirekt: .

*) Vgl. § 1, Konvergenzsatz über Linearformen.

**) Die hier gegebene Formulierung entspricht genau dem im nächsten Paragraphen aufzustellenden Satz über quadratische bzw. bilineare Formen, bei denen ein solches einfaches Kriterium, aus den Koeffizienten die Beschränktheit zu erkennen, nicht vorhanden ist; wir werden auch den Beweis so führen, daß der jenes Satzes als genaue Verallgemeinerung erscheint. Das dürfte für eine begrifflich einfache Gestaltung des Beweises auch dieses einfachen Satzes vorteilhaft sein, obwohl man auf anderem Wege, von der Konvergenz der Quadratsumme $\sum_{(p)} a_p^2$ ausgehend, vielleicht etwas schneller zum Ziele kommt. Diesen letzteren Weg geht sowohl der erste Beweis, den wir einer mündlichen Mitteilung von E. Steinitz verdanken (1906) und der der Veröffentlichung des Wortlautes von diesem Satz in unserer gemeinsamen Note zugrunde lag, als auch der Beweis von E. Landau für den allgemeinen Fall, daß die Konvergenzbedingung $\sum_{(p)} x_p^2 \leq 1$ durch die allgemeinere $\sum_{(p)} x_p^s \leq 1$ (wo $s > 1$) ersetzt ist (Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl., 1907, S. 25).

Ist die Behauptung (1) nicht erfüllt, so muß es eine Folge unendlichvieler Wertsysteme:

$$\begin{aligned} x_1', x_2', \dots, \\ x_1'', x_2'', \dots, \\ \dots \end{aligned}$$

geben, — ein jedes von einer Quadratsumme ≤ 1 —, für die die Linearform $a(x)$ Werte von beliebig großem absolutem Betrage annimmt. Unter diesen werden gewiß unendlichviele positive oder unendlichviele negative Werte vorhanden sein; wir können jedenfalls ev. durch einen Zeichenwechsel der a_p bewirken, daß unendlichviele beliebig große positive Werte $a(x')$, $a(x'')$, $\dots$ auftreten. Indem wir ferner von jeder dieser Reihen eine hinreichend hohe Partialsumme $a_{n'}(x')$, $a_{n''}(x'')$, $\dots$ nehmen, erhalten wir auch eine Folge *endlicher* Abschnitte der Linearform $a(x)$, die für jene Wertsysteme beliebig große positive Werte annehmen. Dabei können wir unter n' , n'' , $\dots$ und x_p' , x_p'' , $\dots$ von vornherein solche Indizes und Systeme verstehen, daß die Zahlen $a_{n'}(x')$, $a_{n''}(x'')$, $\dots$ beliebig rasch wachsen. Indem wir von dieser Freiheit Gebrauch machen, werden wir aus den Wertsystemen x_p' , x_p'' , $\dots$ in bestimmter Weise ein einziges Wertsystem ξ_p wiederum von konvergenter Quadratsumme ≤ 1 herstellen können, für das die Abschnitte $a_{n'}(\xi)$, $a_{n''}(\xi)$, $\dots$ über jede endliche Grenze wachsen, d. h. für das die Reihe $a(\xi)$ gewiß nicht mehr konvergiert — entgegen der Voraussetzung unseres Satzes.

Zu diesem Ende bestimmen wir *erstens* den Index n' und die Werte x_1' , $\dots$, $x_{n'}'$ so, daß

$$(2') \quad a_{n'}(x') = \sum_{p=1}^{n'} a_p x_p' > \frac{1}{c'}, \quad \text{während} \quad \sum_{p=1}^{n'} x_p'^2 \leq 1.$$

Hierbei bedeutet c' die erste einer Reihe sonst beliebig bestimmter positiver Zahlen, die nur eine konvergente Quadratsumme ≤ 1 besitzen:

$$(3) \quad c'^2 + c''^2 + \dots \leq 1; \quad \text{z. B.} \quad c' = \frac{1}{2}, \quad c'' = \frac{1}{3}, \quad c''' = \frac{1}{4}, \dots$$

Wir führen nun das oben erwähnte Wertsystem ξ_p ein, indem wir setzen (die Faktoren c' , c'' , $\dots$ hier und später werden die Konvergenz der Quadratsumme der ξ_p bewirken):

$$(4') \quad \xi_1 = c' x_1', \quad \xi_2 = c' x_2', \dots, \xi_{n'} = c' x_{n'}',$$

während $\xi_{n'+1}$, $\dots$ vorläufig noch unbestimmt bleiben. Dann ist in Betracht von (3) die Quadratsumme

$$(5') \quad \sum_{p=1}^{n'} \xi_p^2 = c'^2 \sum_{p=1}^{n'} x_p'^2 \leq c'^2 \cdot 1 \leq 1,$$

und zufolge (2') wird:

$$(6') \quad a_{n'}(\xi) = \sum_{p=1}^{n'} a_p c' x'_p > 1, \quad \text{während} \quad \sum_{p=1}^{n'} \xi_p^2 \leq c'^2 \leq 1.$$

Nach diesem ersten Schritt bestimmen wir *zweitens* einen Index $n'' > n'$ und ein Wertsystem $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n''}$ so, daß

$$(2'') \quad a_{n''}(x'') = \sum_{p=1}^{n''} a_p x''_p > \frac{1+M'}{c'}, \quad \text{während} \quad \sum_{p=1}^{n''} x''_p{}^2 \leq 1.$$

Hierbei ist c'' die zweite der Größen (3), und M' bedeutet das notwendig existierende Maximum der absoluten Beträge der endlichen Linearform

$a_{n'}(x)$ unter der Nebenbedingung $\sum_{p=1}^{n'} x_p^2 \leq 1$ für ihre n' Veränderlichen:

$$(7') \quad |a_{n'}(x)| = \left| \sum_{p=1}^{n'} a_p x_p \right| \leq M' \quad \text{für} \quad \sum_{p=1}^{n'} x_p^2 \leq 1.$$

Legen wir nun, indem wir die n' Werte (4') beibehalten, weitere $n'' - n'$ Koordinaten ξ_p fest durch

$$(4'') \quad \xi_{n'+1} = c'' x''_{n'+1}, \dots, \xi_{n''} = c'' x''_{n''},$$

so bleibt auch die Quadratsumme aller n'' ξ -Koordinaten:

$$(5'') \quad \sum_{p=1}^{n''} \xi_p^2 \leq c'^2 + c''^2 \cdot \sum_{p=n'+1}^{n''} x''_p{}^2 \leq c'^2 + c''^2 \cdot 1 \leq 1.$$

Bilden wir nun

$$a_{n''}(\xi) = a_{n'}(\xi) + \sum_{p=n'+1}^{n''} a_p \xi_p,$$

so weicht der zweite Summand von dem durch (2'') gegebenen Werte

$$c'' \cdot a_{n''}(x'') = \sum_{p=1}^{n'} a_p c'' x''_p + \sum_{p=n'+1}^{n''} a_p \xi_p > 1 + M'$$

ab um den Wert der Form $a_{n'}(x)$ für die Variablenwerte $c' x'_1, \dots, c' x'_{n''}$;

da deren Quadratsumme $\sum_{p=1}^{n'} (c' x'_p)^2 \leq c'^2 \leq 1$ ist, so ist dieser Wert nach

(7') absolut kleiner als M' , und daher ist jener zweite Summand selbst sicher noch größer als $(1 + M') - M' = 1$. Da ferner der erste Summand $a_{n'}(\xi)$ in (6') abgeschätzt ist, so folgt

$$(6'') \quad a_{n''}(\xi) > 1 + 1 = 2.$$

Dieses Verfahren können wir nun *wörtlich wiederholen*: Bezeichnet M'' das Maximum der endlichen Form $a_{n''}(x)$ unter der Nebenbedingung

$\sum_{p=1}^{n''} x_p^2 \leq 1$, so bestimmen wir $n''' > n''$ und $x_1''', \dots, x_{n'''}'''$ so, daß

$$(2''') \quad a_{n'''}(x''') = \sum_{p=1}^{n'''} a_p x_p > \frac{1+M''}{c'''}, \quad \text{während} \quad \sum_{p=1}^{n'''} x_p'''^2 \leq 1.$$

Setzen wir alsdann

$$(4''') \quad \xi_{n''+1} = c''' x_{n''+1}''', \dots, \xi_{n'''} = c''' x_{n'''}''',$$

so folgt geradeso wie zuvor:

$$(5''') \quad \sum_{p=1}^{n'''} \xi_p^2 \leq c'^2 + c''^2 + c'''^2 \cdot \sum_{p=n''+1}^{n'''} x_p'''^2 \leq c'^2 + c''^2 + c'''^2 \cdot 1 \leq 1,$$

$$(6''') \quad a_{n'''}(\xi) > 3.$$

Durch immer wiederholte Fortsetzung dieser Betrachtung erhalten wir also schließlich ein bestimmtes unendliches Wertsystem $\xi_1, \xi_2, \dots$ von der Quadratsumme

$$(5) \quad \sum_{(p)} \xi_p^2 \leq c'^2 + c''^2 + \dots \leq 1,$$

für das die Reihe $\sum_{(p)} a_p \xi_p$ sicher nicht mehr konvergiert, da für unendlich-viele Abschnitte

$$(6) \quad a_{n(\alpha)}(\xi) > \alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots)$$

gilt. Damit ist der gewünschte Widerspruch hergeleitet.

§ 10.

Gleichmäßige Endlichkeit bilinearer und quadratischer Formen.

Satz von der gleichmäßigen Endlichkeit bilinearer Formen unendlichvieler Veränderlicher. Konvergiert die mit den Elementen einer reellen Matrix als Koeffizienten gebildete Doppelreihe

$$A(x, y) = \sum_{(p)} \left(\sum_{(q)} a_{pq} x_p y_q \right)$$

im Sinne zeilenweiser Konvergenz für je zwei Wertsysteme $x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots$ der unendlichvielen Veränderlichen, deren Quadratsummen $\sum_{(p)} x_p^2$, $\sum_{(p)} y_p^2$ konvergieren und ≤ 1 bleiben, so gibt es eine reelle positive Zahl M

derart, daß für alle jene Wertsysteme der Wert der Reihe, absolut genommen, unterhalb M liegt:

$$(1) \quad |A(x, y)| = \left| \sum_{(p)} \left(\sum_{(q)} a_{pq} x_p y_q \right) \right| \leq M \quad \text{für} \quad \sum_{(p)} x_p^2 \leq 1, \quad \sum_{(q)} y_q^2 \leq 1.$$

Mit anderen Worten: Eine für jedes einzelne Punktepaar der Einheitskugel $\sum_{(p)} x_p^2 \leq 1$ endliche bilineare Form bleibt innerhalb dieser gleichmäßig endlich und ist demnach eine beschränkte Bilinearform.*)

Zunächst sei bemerkt, daß aus der Behauptung (1) tatsächlich unmittelbar folgt, daß A im früher (§ 2) definierten Sinne beschränkt ist; denn indem man alle Variablen x_p und y_q von der $(n+1)^{\text{ten}}$ an gleich Null setzt, folgt $|A_n(x, y)| \leq M$, und nach Satz III des § 2 ist der Wert $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x, y)$ der bilinearen Form tatsächlich der zeilenweise summierten Reihe $A(x, y)$ gleich.

Den Beweis von (1) führen wir nun indirekt genau gemäß dem Gedankengange des vorigen Paragraphen. Ist (1) nicht erfüllt, so können wir genau wie dort die Existenz einer Folge unendlichvieler Wertsysteme

$$\begin{aligned} x'_1, x'_2, \dots; y'_1, y'_2, \dots, \\ x''_1, x''_2, \dots; y''_1, y''_2, \dots, \\ \dots \end{aligned}$$

behaupten, für die $A(x, y)$ beliebig rasch wachsende, sogar durchweg positive Werte annimmt; das gilt auch, wenn wir anstatt der äußeren unendlichen Summation jedesmal nur eine bis zu einem hinreichend hohen Index $n', n'', \dots$ erstreckte Partialsumme

$$\sum_{p=1}^{n'} \left(\sum_{(q)} a_{pq} x'_p y'_q \right), \quad \sum_{p=1}^{n''} \left(\sum_{(q)} a_{pq} x''_p y''_q \right), \quad \dots$$

verwenden.

Wir beginnen nun *erstens* wieder mit der danach gewiß möglichen

*) In unserer vorläufigen Note in den Göttinger Nachrichten ist dieser Satz nur unter der Voraussetzung absoluter Konvergenz der Reihe $\sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q$ ausgesprochen.

Unseren Beweis für diesen speziellen Satz teilten wir Herrn E. Landau mit, der ihn darauf wesentlich vereinfachte. Unter Benutzung seines vereinfachenden Gedankens gelang uns dann der Beweis des allgemeinen, oben ausgesprochenen Satzes (mit nicht absoluter Konvergenz). Dieser Satz und dieser Beweis ist es, den Herr E. Schmidt (Rend. del Circ. mat. di Pal., 25, S. 54) erwähnt. Er stimmt nicht mit dem im Text gegebenen Beweise überein, welcher uns für die Zwecke der Darstellung geeigneter erschien. — Für den Fall absoluter Konvergenz teilte uns übrigens später Herr F. Riesz einen anderen, einfachen Beweis mündlich mit.

Bestimmung eines Index n' und eines Wertsystemes $x_1', x_2', \dots, x_{m'}'$; $y_1', y_2', \dots$, für das

$$(2') \quad A_{n'}(x', y') = \sum_{p=1}^{n'} \left(\sum_{(q)} a_{pq} x_p y_q \right) > \frac{2}{c'^2},$$

während

$$\sum_{p=1}^{n'} x_p'^2 \leq 1, \quad \sum_{(q)} y_q'^2 \leq 1.$$

Hierbei bedeutet c' die erste der oben bereits benutzten, der Bedingung

$$(3) \quad c'^2 + c''^2 + \dots \leq 1$$

genügenden Zahlen. Setzen wir nunmehr

$$(4') \quad \begin{cases} \xi_1 = c' x_1', \xi_2 = c' x_2', \dots, \xi_{n'} = c' x_{n'}'; \\ \eta_1' = c' y_1', \eta_2' = c' y_2', \dots \text{ (in infin.)}, \end{cases}$$

so wird ganz analog wie früher wegen (3)

$$(5') \quad \sum_{p=1}^{n'} \xi_p^2 \leq c'^2 \sum_{p=1}^{n'} x_p'^2 \leq c'^2 \leq 1; \quad \sum_{(p)} \eta_p'^2 \leq c'^2 \sum_{(p)} y_p'^2 \leq c'^2 \leq 1,$$

und ferner wegen (2')

$$(6') \quad A_{n'}(\xi, \eta') = \sum_{p=1}^{n'} \left(\sum_{(q)} a_{pq} \xi_p \eta_q' \right) = c'^2 A_{n'}(x', y') > 2.$$

In dieser Summe treten zwar nur endlichviele ξ_p , aber möglicherweise *alle* η_q' auf, wir müssen daher noch eine ergänzende Betrachtung einschleiben, wenn wir den früheren Beweisgang durchführen wollen, der nun die Möglichkeit der Abänderung auch eines Teiles der η_q' verlangt.

Dazu bemerken wir, daß nach der Voraussetzung auch jede einzelne der inneren Reihen $\sum_{(q)} a_{pq} x_p y_q$ stets konvergieren muß, d. h. jede Linearform $\sum_{(q)} a_{pq} y_q$ konvergiert in der ganzen Einheitskugel und ist daher nach dem Satze des vorigen Paragraphen eine beschränkte Linearform; insbesondere konvergiert daher jede der Quadratsummen $\sum_{(q)} a_{pq}^2$ ($p=1, 2, \dots$). Nunmehr spalten wir von $A_{n'}(x, y)$ den gesamten, die $m' > n'$ ersten Veränderlichen $y_1, \dots, y_m$ enthaltenden Teil ab:

$$A_{n'}(x, y) = \sum_{p=1}^{n'} \sum_{q=1}^{m'} a_{pq} x_p y_q + \sum_{p=1}^{n'} \left(\sum_{q=m'+1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q \right);$$

für den zweiten Summanden erhalten wir durch zweimalige Anwendung der Schwarzschen Ungleichung

$$\left\{ \sum_{p=1}^{n'} \left(\sum_{q=m'+1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q \right) \right\}^2 \leq \sum_{p=1}^{n'} \sum_{q=m'+1}^{\infty} a_{pq}^2 \cdot \sum_{p=1}^{n'} x_p^2 \cdot \sum_{q=m'+1}^{\infty} y_q^2.$$

Da nun jede der n' Reihen $\sum_{(q)} a_{pq}^2$ konvergiert, können wir m' so groß wählen, daß der erste Faktor rechts beliebig klein wird, und daß damit auch die in Rede stehende Teilform für *alle* den Bedingungen $\sum_{(p)} x_p^2 \leq 1$,

$\sum_{(q)} y_q^2 \leq 1$ genügenden Wertsysteme beliebig klein wird. Für den Wert der Form $A_{n'}(x, y)$ sind dann also von den y_q nur die ersten m' Koordinaten $y'_1, \dots, y'_{m'}$ entscheidend, und speziell können wir im Hinblick auf (6')

aussagen, daß bei hinreichend großem m' (für das nur $\sum_{p=1}^{n'} \sum_{q=m'+1}^{\infty} a_{pq}^2 < 1$) jedenfalls

$$(7') \quad A_{n'}(\xi, \eta) > 1$$

ist für das in (4') definierte Wertsystem ξ (von dem ja $\xi_{n'+1}, \dots$ ohnehin noch unbestimmt sind) und für jedes sonst beliebige Wertsystem η , das nur in den ersten m' Koordinaten mit dem in (4') definierten Wertsystem übereinstimmt und eine Quadratsumme ≤ 1 hat:

$$(8') \quad \eta_1 = y'_1 = c' \eta'_1, \dots, \eta_{m'} = \eta'_{m'} = c' y'_{m'}, \quad \text{und} \quad \sum_{(p)} \eta_p^2 \leq 1.$$

Nunmehr beginnen wir den *zweiten* Schritt, der einen weiteren Teil der schließlich die Divergenz von A bewirkenden Werte ξ_p, η_q festlegen wird. Wir bestimmen $n'' > n'$ und $x''_1, x''_2, \dots, x''_{n''}; y''_1, y''_2, \dots$, sodaß

$$(2'') \quad A_{n''}(x'', y'') = \sum_{p=1}^{n''} \left(\sum_{(q)} a_{pq} x_p y_q \right) > \frac{2 + M' + 2m'}{c''^2},$$

während

$$\sum_{p=1}^{n''} x_p^2 \leq 1, \quad \sum_{(q)} y_q^2 \leq 1.$$

Hierbei ist c'' die zweite der Größen (3), und es bedeuten M' und m' die absoluten Maxima der notwendig beschränkten Formen

$$A_{n'}(x, y) = \sum_{p=1}^{n''} \left(\sum_{(q)} a_{pq} x_p y_q \right) \quad \text{und} \quad \sum_{p=n'+1}^{\infty} \left(\sum_{q=1}^{m'} a_{pq} x_p y_q \right)$$

unter den üblichen Nebenbedingungen — beschränkt darum, weil sie als Summen von endlichvielen (n' bzw. m') beschränkten Linearformen

$$x_p \cdot \sum_{(q)} a_{pq} y_q \quad \text{bzw.} \quad y_q \cdot \sum_{p=n'+1}^{\infty} a_{pq} x_p$$

darstellbar sind:

$$(9') \left\{ \begin{array}{l} |A_{n'}(x, y)| = \left| \sum_{p=1}^{n'} \left(\sum_{(q)} a_{pq} x_p y_q \right) \right| \leq M' \\ \left| \sum_{p=n'+1}^{\infty} \left(\sum_{q=1}^{m'} a_{pq} x_p y_q \right) \right| \leq m' \end{array} \right\} \text{ für } \sum_{(p)} x_p^2 \leq 1, \sum_{(q)} y_q^2 \leq 1.$$

Die Einführung dieser Größen in die Ungleichung (2'') wird uns nämlich jetzt die Abschätzung des Wertes von $A_{n''}$ für folgende Wertsysteme ξ, η'' gestatten, bei denen die ersten n' Werte ξ_p und die ersten m' Werte η''_p aus (4') bzw. (8') übernommen sind:

$$(4'') \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1, \dots, \xi_{n'}, \quad \xi_{n'+1} = c'' x''_{n'+1}, \dots, \xi_{n''} = c'' x''_{n''} \\ \eta''_1 = \eta_1, \dots, \eta''_{m'} = \eta_{m'}, \eta''_{m'+1} = c'' y''_{m'+1}, \dots \text{ (in infin.)} \end{array} \right.$$

für sie ist zunächst gemäß (5') und (3)

$$(5'') \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=1}^{n''} \xi_p^2 \leq c'^2 + c''^2 \cdot \sum_{p=n'+1}^{n''} x''_p{}^2 \leq c'^2 + c''^2 \leq 1 \\ \sum_{(p)} \eta''_p{}^2 \leq c'^2 + c''^2 \cdot \sum_{p=n'+1}^{\infty} y''_p{}^2 \leq c'^2 + c''^2 \leq 1. \end{array} \right.$$

Bilden wir nun

$$A_{n''}(\xi, \eta'') = A_{n'}(\xi, \eta'') + \sum_{p=n'+1}^{n''} \left(\sum_{(q)} a_{pq} \xi_p \eta''_q \right),$$

so können wir den zweiten Summanden wegen (4'') umschreiben in:

$$\begin{aligned} & c''^2 \sum_{p=n'+1}^{n''} \left(\sum_{(q)} a_{pq} x''_p y''_q \right) + \sum_{p=n'+1}^{n''} \sum_{q=1}^{m'} a_{pq} \xi_p (\eta''_q - c'' y''_q) \\ &= c''^2 A_{n''}(x'', y'') - A_{n'}(c'' x'', c'' y'') + \sum_{p=n'+1}^{n''} \sum_{q=1}^{m'} a_{pq} \xi_p (\eta''_q - c'' y''_q); \end{aligned}$$

er unterscheidet sich also von dem in (2'') abgeschätzten Werte $c''^2 A_{n''}(x'', y'')$ nur um Werte der beiden in (9') aufgestellten Formen (die für Wertsysteme $c'' x'', c'' y''; \xi, \eta''; \xi, c'' y''$ sämtlich von einer Quadratsumme ≤ 1 gebildet sind), und ist daher auch im ungünstigsten Falle noch größer als

$$(2 + M' + 2m') - M' - 2m' = 2.$$

Berücksichtigen wir ferner, daß nach (4'') die Wertsysteme ξ, η'' die für die Gültigkeit von (7') erforderlichen Bedingungen erfüllen, also $A_{n''}(\xi, \eta'') > 1$ ist, so folgt

$$(6'') \quad A_{n''}(\xi, \eta'') > 1 + 2 = 3.$$

Nunmehr können wir endlich, genau wie oben für A_n , eine Zahl m'' bestimmen, so daß auch für jedes andere Wertsystem η , für das nur

$$(8'') \quad \eta_1 = \eta_1'', \eta_2 = \eta_2'', \dots, \eta_m = \eta_m'', \text{ und } \sum_{(p)} \eta_p^2 \leq 1$$

ist, auch

$$(7'') \quad A_{n''}(\xi, \eta) > 2$$

gilt.

Jetzt wird das soeben ausführlich beschriebene Verfahren genau wiederholt: es werden dadurch eine neue Anzahl von Veränderlichen $\xi_{n''+1}, \dots, \xi_{n''''}$ und $\eta_{m''+1}, \dots, \eta_{m''''}$ zu den bisher bereits festgelegten n'' bzw. m'' Koordinaten hinzu bestimmt, sodaß für sonst beliebige $\eta_{m''''+1}, \dots$

$$(7''') \quad A_{n''''}(\xi, \eta) > 3$$

wird, während

$$\sum_{(p)} \xi_p^2 \leq 1, \quad \sum_{(p)} \eta_p^2 \leq 1.$$

So fortgehend erhält man schließlich zwei wohlbestimmte Wertsysteme $\xi_1, \xi_2, \dots; \eta_1, \eta_2, \dots$ von der Quadratsumme ≤ 1 , für welche die Reihe $A(\xi, \eta)$ gewiß nicht mehr konvergiert, da für unendlichviele Partialsummen mit den Indizes $n', n'', \dots, n^{(\alpha)}, \dots$

$$A_{n^{(\alpha)}}(\xi, \eta) = \sum_{p=1}^{n^{(\alpha)}} \left(\sum_{(q)} a_{pq} \xi_p \eta_q \right) > \alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots)$$

gilt. Damit ist aber die der Behauptung widersprechende Annahme widerlegt und der Beweis beendet.

Es sei hier noch die *Bemerkung* angeschlossen (die im folgenden jedoch nicht gebraucht werden wird), daß man die Beschränktheit der Form $A(x, y)$ auch unter der Voraussetzung *abschnittsweiser* Konvergenz der Reihe $\sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q$ für jedes einzelne Wertsystem x, y von konvergenter Quadratsumme erweisen kann; der Beweis verläuft ganz genau wie der soeben gegebene, er vereinfacht sich sogar ihm gegenüber noch dadurch, daß in den Grenzwerten $\sum_{p,q=1}^{n^{(\alpha)}} a_{pq} \xi_p \eta_q$, deren beliebig starkes Anwachsen gezeigt wird, genau wie bei den Linearformen jedesmal nur endlichviele der Koordinaten ξ_p, η_q auftreten.

Als leichte Folge endlich gilt noch der

Satz von der gleichmäßigen Endlichkeit quadratischer Formen unendlichvieler Veränderlicher. Konvergiert die mit den Elementen einer reellen symmetrischen Matrix als Koeffizienten gebildete Doppelreihe

$$A(x, x) = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p x_q \quad (a_{pq} = a_{qp})$$

bei zeilenweiser oder abschnittsweiser Summation für jedes Wertsystem $x_1, x_2, \dots$ mit konvergenter Quadratsumme ≤ 1 , so gibt es eine reelle positive Zahl M derart, daß für alle diese Wertsysteme der Wert der Reihe, absolut genommen, unterhalb M liegt:

$$|A(x, x)| = \left| \sum_{(p, q)} a_{pq} x_p x_q \right| \leq M \quad \text{für} \quad \sum_{(p)} x_p^2 \leq 1.$$

Mit anderen Worten: Eine für jeden einzelnen Punkt der Einheitskugel endliche quadratische Form bleibt innerhalb dieser gleichmäßig endlich und ist demnach eine beschränkte Form.

Zum Beweise braucht man nur zu bedenken, daß für je zwei Wertsysteme x, y von konvergenter Quadratsumme aus der Voraussetzung die Konvergenz der Reihe $A(x + y, x + y) = \sum_{(p, q)} a_{pq} (x_p + y_p)(x_q + y_q)$, und mithin auch die Konvergenz der Reihe $\sum_{(p, q)} a_{pq} x_p y_q$ folgt, wodurch der Satz über Bilinearformen anwendbar wird und zum Ziele führt.

§ 11.

Die Vollständigkeit des Systems der beschränkten Matrizen.

Die beiden vorangehenden Paragraphen enthalten die wesentlichen Hilfsmittel, um folgendes Theorem zu beweisen:

Vollständigkeitstheorem für das System der beschränkten Matrizen. Man kann das System der beschränkten Matrizen nicht derart erweitern, daß das erweiterte System noch die folgenden Forderungen befriedigt:

- 1) die Summe zweier Matrizen des Systems gehört selbst dem System an,
- 2) das Produkt zweier Matrizen $(a_{pq}), (b_{pq})$ des Systems existiert (d. h. $\sum_{(a)} a_{pa} b_{aq}$ konvergiert für jedes einzelne Wertepaar p, q) und gehört selbst dem System an.*)

Beweis. Es ist unschwer zu überlegen, daß eine Matrix Y stets beschränkt ist, wenn in ihrer ersten Kolonne eine Größenreihe $y_1, y_2, \dots$ von konvergenter Quadratsumme steht, in allen übrigen Kolonnen überall Nullen:

*) Die Voranzeige in den Göttinger Nachrichten enthält ein von dem hier gegebenen Theorem etwas abweichendes, insofern es sich nicht auf beschränkte, sondern auf absolut-beschränkte Formen bezieht. Dieses Resultat scheint uns jetzt neben dem anderen, hier gegebenen kein selbständiges Interesse mehr zu besitzen, seitdem wir den für uns damals noch ungeklärten Unterschied zwischen absoluter Beschränktheit und Beschränktheit schlechthin kennen (vgl. § 5, vierte Bemerkung).

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & 0 & \cdot \\ y_2 & 0 & 0 & \cdot \\ y_3 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Sei jetzt $A = (a_{pq})$ irgendeine Matrix eines Systems, das den Forderungen 1) und 2) genügt und das System der beschränkten Matrizen als Teilsystem enthält, so wird wegen 2) das Produkt von (a_{pq}) mit jeder beschränkten Matrix der eben beschriebenen besonderen Art existieren müssen; faßt man lediglich die Kompositionen der ersten Zeile von (a_{pq}) mit der ersten Kolonne $y_1, y_2, \dots$ ins Auge, so besagt dies, daß $\sum_{(q)} a_{1q} y_q$ konvergiert für jede Größenreihe $y_1, y_2, \dots$ von konvergenter Quadratsumme. Nach dem Satz von der gleichmäßigen Endlichkeit der Linearformen (§ 9) ergibt sich daraus, daß die Quadratsumme der ersten und ähnlich die jeder Zeile (und ebenso jeder Kolonne) von (a_{pq}) konvergiert.

Multipliziert man jetzt die Produktmatrix AY vorn mit einer Matrix X , deren erste Zeile eine Größenreihe $x_1, x_2, \dots$ von konvergenter Quadratsumme enthält, während in allen übrigen Zeilen nur Nullen stehen, so folgt weiter aus 2), daß $\sum_{(p)} \left(\sum_{(q)} a_{pq} y_q \right) x_p$ für alle x_p von konvergenter Quadratsumme konvergiert, mit anderen Worten, daß die Doppelreihe $\sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q$ zeilenweise konvergiert für alle x_p, y_q von konvergenten Quadratsummen. Nach dem Satz von der gleichmäßigen Endlichkeit der Bilinearformen (§ 10) ist mithin (a_{pq}) beschränkt. Also ist jede Matrix des betrachteten Systems beschränkt, und dieses ist keine Erweiterung des Systems der beschränkten Matrizen, sondern mit ihm identisch.

§ 12.

Die isomorphen Systeme und ihre Unsymmetrie.

Betrachtet man das System aller Matrizen $\left(a_{pq} \frac{p}{q}\right)$, wo a_{pq} die Koeffizienten aller möglichen beschränkten Matrizes bedeuten, so genügt auch dieses System den Forderungen 1) und 2). Um nur von 2) zu reden, so konvergiert die Summe

$$\sum_{(\alpha)} \left(a_{p\alpha} \frac{p}{\alpha}\right) \left(b_{\alpha q} \frac{\alpha}{q}\right) = \sum_{(\alpha)} \left(a_{p\alpha} b_{\alpha q} \frac{p}{q}\right) = \left(\sum_{(\alpha)} a_{p\alpha} b_{\alpha q}\right) \frac{p}{q} = c_{pq} \frac{p}{q},$$

und stellt das Element einer Matrix derselben Art dar. Jedoch enthält dieses System Matrizen, welche nicht beschränkt sind. Setzt man nämlich in die erste Kolonne von A die Größen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$, deren Quadrat-

summe konvergiert, in alle übrigen Zeilen Nullen, so ist A beschränkt, dagegen besteht in $\left(a_{pq} \frac{p}{q}\right)$ die erste Kolonne aus den Größen $1, 1, 1, \dots$, deren Quadratsumme nicht konvergiert; nach Satz 1 von § 2 ist diese Matrix also nicht beschränkt.

Es gibt also Systeme von Matrizen, die den Forderungen 1) und 2) genügen, aber weder selbst Teilsysteme des Systems der beschränkten Matrizen sind noch dieses enthalten.

Man kann das Prinzip, nach welchem dieses neue System gebildet war, etwas allgemeiner beschreiben, wenn man die beiden Matrizen

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

(von denen U offenbar nicht beschränkt ist) betrachtet, und bemerkt, daß die Matrizen des neuen Systemes durch UAU^{-1} dargestellt sind, wenn A sämtliche beschränkten Matrizen durchläuft. Das neue System ist danach demjenigen der beschränkten Matrizen in einfacher Weise isomorph.

Man kann natürlich sofort unendlichviele andere solche im allgemeinen voneinander und von dem System der beschränkten Matrizen verschiedene isomorphe Systeme erhalten, wenn man an Stelle jener speziellen Matrix U irgend eine andere nicht beschränkte Matrix U verwendet, für die nur eine Reziproke U^{-1} existiert ($UU^{-1} = U^{-1}U = E$) und für die ferner für alle beschränkten Matrizen A die Produkte $UA, AU^{-1}, U(AU^{-1}) = (UA)U^{-1}$ existieren und der Gleichung

$$(UAU^{-1})(UBU^{-1}) = U(AB)U^{-1}$$

genügen. Indessen kann man leicht zeigen, daß unter allen diesen Systemen dasjenige der beschränkten Matrizen durch eine einfache Forderung eindeutig charakterisiert ist:

Symmetrietheorem für das System der beschränkten Matrizen. Unter allen denjenigen zum Systeme der beschränkten Matrizen isomorphen, den Forderungen 1), 2) genügenden Systemen von Matrizen, die durch die Matrizen (im soeben definierten Sinne)

$$\mathfrak{A} = UAU^{-1}$$

gebildet werden, wo A bei festem U die Gesamtheit der beschränkten Matrizen durchläuft), ist das System der beschränkten Matrizen das einzige symmetrische, d. h. das einzige der folgenden Forderung genügende:*

*) Analog der Definition der beschränkten Matrizen genügt jedes solche System der Forderung: der n^{te} Abschnitt $\mathfrak{A}_n = \sum_{p,q=1}^n a_{pq} x_p y_q$ bleibe absolut unterhalb

3) Mit jeder Matrix $\mathfrak{A}$ gehört auch die transponierte $\mathfrak{A}'$ dem Systeme an. Zum Beweise setzen wir

$$U = (u_{pq}), \quad U^{-1} = V = (v_{pq}),$$

und verwenden für A diejenige schon in § 11 benutzte spezielle beschränkte Matrix Y , die in der ersten Kolonne beliebige Größen $y_1, y_2, \dots$ von konvergenter Quadratsumme enthält, während in allen übrigen Kolonnen Nullen stehen. Dann ist das allgemeine Glied der zugehörigen Matrix $\mathfrak{Y} = UYU^{-1}$ aus dem System der $\mathfrak{A}$:

$$y_{pq} = \sum_{(\alpha)} u_{p\alpha} y_{\alpha} v_{1q} = v_{1q} \cdot \sum_{(\alpha)} u_{p\alpha} y_{\alpha},$$

und nach Voraussetzung müssen die u_{pq} so beschaffen sein, daß die hier auftretenden Reihen für jedes Wertsystem der y mit konvergenter Quadratsumme konvergieren; denn wegen $VU = E$ ist $\sum_{(q)} v_{1q} u_{q1} = 1$ und daher können nicht alle v_{1q} verschwinden. Soll nun auch Forderung 3) erfüllt sein, so muß auch $\mathfrak{Y}' = (y'_{qp})$ dem Systeme angehören, also auch das Produkt $\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}$ existieren, und insbesondere müssen die seine Diagonalelemente darstellenden Summen

$$\sum_{(p)} y_{pq}^2 = v_{1q}^2 \cdot \sum_{(p)} \left(\sum_{(\alpha)} u_{p\alpha} y_{\alpha} \right)^2$$

konvergieren. Ist nun weiterhin $x_1, x_2, \dots$ irgendein zweites Wertsystem von konvergenter Quadratsumme, so konvergiert nach der Schwarzschen Ungleichung auch

$$\left| \sum_{(p)} x_p \sum_{(\alpha)} u_{p\alpha} y_{\alpha} \right| \leq \sqrt{\sum_{(p)} x_p^2 \sum_{(p)} \left(\sum_{(\alpha)} u_{p\alpha} y_{\alpha} \right)^2}$$

— und dies gilt für jedes Wertsystem x, y von konvergenter Quadratsumme. Der Satz von der gleichmäßigen Endlichkeit der Bilinearformen (§ 10) ergibt also, daß U eine beschränkte Bilinearform ist; genau ebenso kann man, von einer Form X mit nur einer nicht mit Nullen besetzten Zeile ausgehend, die Beschränktheit von V erweisen. Also sind auch alle Matrizen $\mathfrak{A} = UAU$ beschränkt, und damit ist der Beweis erbracht.)*

einer festen endlichen Grenze M für jedes Wertsystem $x_1, \dots, x_n$, für das $\sum_{(\alpha)} \left(\sum_{p=1}^n u_{p\alpha} x_p \right)^2$, und $y_1, \dots, y_n$, für das $\sum_{(\beta)} \left(\sum_{q=1}^n v_{\beta q} y_q \right)^2$ konvergiert und unterhalb 1 bleibt; an Stelle der Einheitsform in der Definition der beschränkten Formen treten hier also die definiten Formen UU' und $V'V = U'^{-1}U^{-1}$.

*) Außer diesen isomorphen Systemen gibt es noch andere (z. B. die Systeme $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ unserer Voranzeige, die wir jetzt zeilenfinit [kolonnenfinit] bzw. finit nennen), die die Forderungen 1), 2) bzw. 1), 2) und 3) befriedigen, ohne den bis hierher betrachteten isomorph zu sein. Von diesen und weiteren derartigen Systemen soll eine Fortsetzung der vorliegenden Arbeit handeln.