Zur Theorie der windschiefen Flächen.

Von A. Voss in Göttingen.

Seit dem Erscheinen von Plücker's „Neuer Geometrie des Raumes“ ist bekanntlich neben die bisher ausgebildeten analytisch geometrischen Untersuchungen, deren Schwerpunkt in der Dualität zwischen Punkt und Ebene liegt, eine neue Disciplin getreten, die *Liniengeometrie*. So interessant und reichhaltig diejenigen Untersuchungen sind, welche sich rein mit der Theorie der Liniencomplexe und Liniencongruenzen beschäftigen, so wird man doch immer geneigt sein, denjenigen Betrachtungen einen besonderen Werth beizumessen, durch welche auf Fragen, die wir im Sinne der gewöhnlichen geometrischen Anschauungsweise aufwerfen, vermöge der Liniengeometrie ein neues Licht geworfen wird. Gerade nach dieser Richtung hin scheint sich für dieselbe noch ein weites Feld zu eröffnen*). Die volle Fruchtbarkeit der liniengeometrischen Untersuchungen wird aber erst dann hervortreten, wenn man gelernt hat dieselben ganz gleichmässig im Zusammenhang mit der Punkt- und Ebenengeometrie zu verwerthen. — In den bisherigen Bestrebungen aber, welche sich auf diese *dreitheilige Ausbildung der geometrischen Speculation beziehen*, in der Punkt, Ebene und Gerade völlig gleichwerthige Gebilde darstellen, haben sich erst zu wenig die analytischen Schwierigkeiten überwinden lassen, welche bei der gleichzeitigen Anwendung von Punkt-, Ebenen- und Linienkoordinaten auftreten. Es erscheint daher zweckmässig, die Liniengeometrie zunächst als eine besondere Disciplin zu behandeln, und, von der ihr eigenthümlichen Auffassungsweise ausgehend, zur Punkt- und Ebenengeometrie hinüberzuleiten. Erst von in diesem Sinne angestellten liniengeometrischen Untersuchungen dürfte jener weitere Fortschritt der modernen Geometrie, den wir bezeichneten, abhängen.

*) Wir erinnern hier insbesondere an die Untersuchungen von Herrn Klein über die Kummer'sche Fläche, ferner an die Arbeit des Herrn Sturm „das Problem der räumlichen Projectivität“ (diese Annalen Bd. VI, S. 543), sowie die neuerdings erschienene des Herrn Lindemann „Projectivische Behandlung der Mechanik starrer Körper“ (diese Annalen Bd. VII, S. 56).

Es ist daher zunächst Zweck der vorliegenden Arbeit, zu zeigen, wie sich die geometrischen Untersuchungen, die sich auf Fragen der gewöhnlichen projectivischen Auffassung beziehen, vom rein liniengeometrischen Standpunkte aus gestalten. In dieser Absicht habe ich in dem ersten Paragraphen die hauptsächlichsten Gesichtspunkte, sowie einzelne Beispiele für die rein liniengeometrische Methode in der Kürze erläutert. Sodann gehe ich dazu über, die genannte Methode auf die Theorie derjenigen windschiefen Flächen anzuwenden, welche vollständiger Schnitt dreier allgemeiner Complexe von den Graden m , n , p sind. Diese Flächen sind bereits von Herrn Lüroth *) nach einigen wesentlichen Richtungen hin behandelt worden, doch bietet die hier zu Grunde gelegte Auffassung wesentlich verschiedene, zum Theil für die Theorie der windschiefen Flächen überhaupt, wie ich glaube, neue Gesichtspunkte. Dahin rechne ich insbesondere die Betrachtung der vierpunktigen Tangenten der Linienflächen, die bisher nicht in den Kreis der Untersuchungen gezogen ist. Ein besonderes Gewicht ist dabei überall auf die vollständige algebraische Behandlung der Probleme gelegt worden. — Daran knüpfe ich eine Betrachtung der windschiefen Flächen vom Geschlechte Null, deren Erzeugende sich also als rationale Functionen eines Parameters auffassen lassen, welche schliesslich zur Untersuchung solcher Flächen vom zweiten, dritten und vierten Grade verwerthet wird.

In einer demnächstigen Arbeit werde ich die liniengeometrischen Methoden auf die Untersuchung der Complexe, ihrer Singularitäten, sowie die der singulären Elemente von Congruenzen und ihren Brennflächen anwenden. Eine kurze Mittheilung einiger Resultate derselben wurde bereits in den Göttinger Nachrichten gegeben*).

I.

Allgemeines. Methode der liniengeometrischen Untersuchung.

Im Anschluss an die Arbeiten von Herrn Klein***) bediene ich mich zur analytischen Repräsentation der Geraden der von demselben eingeführten Liniencoordinaten. *Es sind dies lineare Combinationen $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ der sechs homogenen Plücker-Cayley'schen Coordinaten p_{ik} , für welche die zwischen den letzteren bestehende Identität*

*) Lüroth, Zur Theorie der windschiefen Flächen, Crelle's Journ. Bd. 67, S. 130.

**) Götting. Nachr. 1873, Juni, Juli, S. 544, 611.

***) Es sei hier namentlich auf die folgenden Aufsätze desselben hingewiesen, auf die im Folgenden häufig Bezug genommen werden wird: Zur Theorie der Liniencomplexe ersten und zweiten Grades (Math. Ann. Bd. II, S. 198), Allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten (daselbst p. 366), Ueber gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen (Math. Ann. Bd. V, S. 287).

$$\begin{aligned}
 & p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0 \\
 \text{in} \quad & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0, \\
 & \text{oder, wie zur Abkürzung geschrieben werden soll,} \\
 & (x^2) = 0
 \end{aligned}$$

übergeht. Die Voraussetzung derselben in dieser kanonischen Form ist übrigens für das Folgende durchaus unwesentlich. Es würde nur einer einfachen Modification der im Folgenden entwickelten Ausdrücke bedürfen, wenn jene Identität in Gestalt einer allgemeinen quadratischen Form

$$\sum c_{ik} x_i x_k = 0$$

angenommen wird. Die Determinante der Form (x^2) ist 1, dieselbe ist im Folgenden häufig durch Ω bezeichnet, um anzudeuten, dass bei Anwendung der allgemeinen Form $\sum c_{ik} x_i x_k$ an Stelle von Ω einfach deren Determinante

$$\Sigma \pm (c_{11} c_{22} c_{33} c_{44} c_{55} c_{66})$$

einzuführen ist.

Unter Zugrundelegung der Coordinaten x ist es durchaus unzweckmässig, zu den Punkt- oder Ebenencoordinaten der Raumgeometrie, aus denen die x gebildet sind, wirklich zurückzugehen, wie man dies bei Anwendung der Coordinaten $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ oft gethan hat. Es erwächst damit die Forderung einer eigenen Liniengeometrie, als deren ausschliesslich in die analytisch-geometrischen Untersuchungen direct tretendes Gebilde (Raumelement) die Gerade zu betrachten ist. Bei dieser Auffassung, die auch Herrn Klein's Arbeiten über Liniengeometrie zu Grunde liegt*), wird die Gerade vorgestellt durch einen speciellen Complex ersten Grades, eine Fläche ist der Inbegriff ihrer Tangenten, eine Curve der ihrer sämtlichen Treffgeraden. Curven und Flächen werden durch eine Gleichung in Liniencoordinaten, d. h. durch Complexe vorgestellt, weil sie immer durch dreifach unendlich viele Linien erzeugt werden. Diese Gleichung muss aber im ersten Falle so beschaffen sein, dass jede von den in einer Ebene liegenden Geraden gebildete Complexcurve in so viel ebene Strahlbüschel zerfällt, als der Grad der darzustellenden Curve beträgt (der Complex die fragliche Curve zur Ausnahmecurve hat), während im zweiten Falle das Bestehen einer partiellen Differentialgleichung für alle Complexlinien erforderlich ist**). Der Punkt erscheint als Inbegriff aller Geraden, die durch ihn gehen (Strahlenbündel), die Ebene als Gesamtheit derjenigen Geraden, die in ihr liegen (Strahlennetz). Beide Gebilde enthalten nur zweifach unendlich viele Gerade, erfordern also in ihrer

*) Vgl. besonders Bd. V dieser Annalen.

**) Klein, Math. Ann. V, 287.

Darstellung zwei Gleichungen in Liniencoordinaten. Analytisch können wir beide Gebilde gleichzeitig darstellen als Schnitt zweier specieller linearer Complexe, deren Axen sich schneiden, d. h. durch eine zerfallende Congruenz. Es giebt aber unendlich viele specielle lineare Complexe, denen dieselbe zerfallende Congruenz angehört, ihre Axen bilden ein ebenes Strahlbüschel. Wir werden dadurch veranlasst, die Gesamtheit dieser Axen als Ausdruck für die zerfallende Congruenz anzusehen. — Mit dieser Auffassung kommt es nun völlig überein, wenn wir im Folgenden Punkt und Ebene gleichzeitig durch ein ebenes Strahlbüschel repräsentiren. In der That bestimmt dasselbe auf eine völlig dualistische Weise sowohl einen Punkt, das Centrum des Büschels, als eine Ebene, die Ebene desselben. Das ebene Strahlbüschel ist daher das Mittel, durch welches die liniengeometrischen Vorstellungen in Verbindung mit denen der Punkt- und Ebenengeometrie zu bringen sind, und spielt daher eine fundamentale Rolle in denselben*).

Eine Gerade, deren Coordinaten $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ sind, werden wir im Folgenden symbolisch durch x bezeichnen. Zwei Gerade x, y schneiden sich, wenn die Bedingung

$$\Sigma x_i y_i = 0$$

erfüllt ist, an deren Stelle wir abkürzend

$$(xy) = 0$$

schreiben. Ueberhaupt werden wir analog gebildete Ausdrücke wie $\Sigma A_i B_i$ immer durch (AB) bezeichnen. Der Ausdruck

$$x + \lambda y$$

wird nur dann wieder eine Gerade vorstellen, wenn $(x + \lambda y)^2 = 0$, d. h. $(xy) = 0$, dann aber gleich unendlich viele, deren Gesamtheit das ebene Strahlbüschel bildet, welches durch die sich schneidenden Geraden xy bestimmt ist. Punkt und Ebene desselben bezeichnen wir durch (xy) . Das Doppelverhältniss von vier Strahlen des Büschels (xy)

$$x + \lambda_1 y, \quad x + \lambda_2 y, \quad x + \lambda_3 y, \quad x + \lambda_4 y$$

hat dann den Werth

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3} : \frac{\lambda_4 - \lambda_2}{\lambda_4 - \lambda_3}.$$

Drei Gerade xyz , für welche die Beziehungen

$$(xy) = 0, \quad (yz) = 0, \quad (xz) = 0$$

stattfinden, werden sich gegenseitig schneiden. Sie liegen dann ent-

*) In den erwähnten Mittheilungen (Gött. Nachr. a. a. O.) habe ich bereits gezeigt, wie die principielle Verwendung dieses Gebildes dazu dienen kann, die Singularitäten der Brenn- und singulären Flächen von Complexen (Rückkehr-, Doppel-, algebraische Haupttangenten-, vierpunktige Berührungscurven) nach Ordnung und Classe zu bestimmen.

weder in einer Ebene oder gehen durch einen Punkt. Welches von beiden stattfindet, würde sich allerdings vermöge des von Herrn Klein*) für den einen oder anderen Fall aufgestellten Determinanten-Kennzeichens entscheiden lassen. Es bietet aber gewisse Vortheile, beide Fälle gleichzeitig zu betrachten. Jede Untersuchung, in welcher wir drei sich gegenseitig schneidende Gerade ohne weitere Nebenbedingung einführen, wird also einen *dualistischen Charakter tragen*, sich zum Theil auf drei Linien durch einen Punkt, zum Theil auf drei Linien in einer Ebene beziehen. Bei einem nicht in sich dualistischen Liniengebilde werden also Abzählungen immer nur die Summe der Anzahlen der Fälle liefern, die dem einen oder anderen Verhalten entsprechen. *Ist aber das ganze Gebilde, auf welches sich die Untersuchung bezieht, ein in sich duales, so muss der eine Fall ebenso oft auftreten als der andere. Die Anwendung eines besonderen Kennzeichens wird dann überflüssig.* Dieser Umstand gestattet die liniengeometrischen Untersuchungen oft überraschend einfach. *Er findet insbesondere statt in den folgenden Untersuchungen, insofern jedes vollständige Liniengebilde, welches durch allgemeine Complexe erzeugt wird, die geforderte Dualität besitzen muss.*

Wir behandeln nach diesen allgemeinen Erörterungen zunächst einige der einfachsten Aufgaben, welche sich in der Liniengeometrie darbieten, theils weil wir der Resultate derselben in der Folge öfters benöthigt sein werden, theils um zu zeigen, wie sich auf rein liniengeometrischem Wege die Behandlung derselben gestaltet.

1) *Bestimmung des Doppelverhältnisses zweier linearen Complexe.* Zwei lineare Complexe geben zu einem Büschel linearer Complexe Veranlassung. Bezeichnet man durch a, b die Directricen desselben, so sind zwei beliebige Complexe desselben dargestellt durch

$$(1) \quad a_x + \lambda b_x = 0,$$

$$(2) \quad a_x + \mu b_x = 0.$$

Eine beliebige Ebene schneidet die Directricen in zwei Punkten A, B und enthält zwei Centra $c_1 c_2$ von Strahlbüscheln, die den Complexen (1), (2) angehören. Die vier Punkte $ABc_1 c_2$ liegen in gerader Linie und haben ein unveränderliches Doppelverhältniss, welches nach Herrn Klein als Doppelverhältniss der beiden Complexe (1), (2) bezeichnet wird. Um den Werth desselben zu bestimmen, legen wir zwei Gerade y, z , welche bezüglich die Directricen a, b und sich unter einander schneiden, so dass

$$(ay) = 0, \quad (bz) = 0, \quad (zy) = 0.$$

Ihre Ebene stellt die schneidende Ebene dar, y, z bilden mit den beiden Strahlen $y + \varrho_1 z, y + \varrho_2 z$, welche respective (1), (2) angehören,

**) Math. Ann. Bd. II, S. 200, 206.

vier Strahlen, deren Doppelverhältniss $\frac{q_1}{q_2}$ das gesuchte ist. Zur Bestimmung von $\frac{q_1}{q_2}$ hat man die beiden Gleichungen, welche ausdrücken, dass $y + q_1 z$, $y + q_2 z$ Strahlen der Complexe (1), (2) sind, nämlich

$$(ay) + \lambda(by) + q_1((az) + \lambda(bz)) = 0,$$

$$(ay) + \mu(by) + q_2((az) + \mu(bz)) = 0,$$

aus denen folgt:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Wir stellen dazu noch die folgende Betrachtung. Es seien $z_1 z_2 z_3$ drei Gerade, welche die beiden Directricen schneiden. Jeder Complex des Büschels enthält zwei Strahlen x, y , welche $z_1 z_2 z_3$ gleichzeitig schneiden, d. h. Erzeugende des durch $z_1 z_2 z_3$ bestimmten Hyperboloides sind. Die vier Geraden $abxy$ bestimmen dann auf jeder der Geraden z harmonisch liegende Punkte.

Wir beweisen dies folgendermassen. Der Complex des Büschels sei

$$a_x + \lambda b_x = 0.$$

Eine Gerade ε schneide

$$a, b, z_1,$$

so dass

$$(3) \quad \begin{cases} (\varepsilon a) = 0, & (\varepsilon b) = 0, & (\varepsilon z_1) = 0, \\ (z_1 a) = 0, & (z_2 a) = 0, & (z_3 a) = 0, \\ (z_1 b) = 0, & (z_2 b) = 0, & (z_3 b) = 0, \end{cases}$$

Wir suchen nun die Strahlen $a + q\varepsilon$ des Büschels ($a\varepsilon$), welche die z_1 in den Punkten treffen, in welchen sie selbst von einer Complexgeraden x geschnitten wird, welche $z_1 z_2 z_3$ gleichzeitig schneidet. Man hat dann:

$$(4) \quad \begin{cases} (xz_1) = 0, & (xz_2) = 0, & (xz_3) = 0, \\ a_x + \lambda b_x = 0, \\ (ax) + q(\varepsilon x) = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man aus den 5 letzten Gleichungen und der Identität $(x^2) = 0$ die x , so erhält man nach einer leichten Umformung mit Berücksichtigung der Gleichungen (3), (4) die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & (z_1 z_2) & (z_1 z_3) & 0 & q(\varepsilon z_1) \\ (z_1 z_2) & 0 & (z_2 z_3) & 0 & q(\varepsilon z_2) \\ (z_1 z_3) & (z_2 z_3) & 0 & 0 & q(\varepsilon z_3) \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda(ab) & \lambda(ab) \\ q(\varepsilon z_1) & q(\varepsilon z_2) & q(\varepsilon z_3) & \lambda(ab) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieser Ausdruck ist von der Form

$$\alpha - \beta q^2 = 0.$$

Wir erhalten daher zwei Strahlen mit den Parametern

$$\varrho_1 = + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad \varrho_2 = - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}},$$

welche mit $a\infty$ harmonisch liegen.

Da die Directricen ab conjugirte Polaren in Bezug auf den Complex $a_x + \lambda b_x = 0$ sind, so kann man den folgenden Satz aussprechen:

Jede Erzeugende zweiter Art eines Hyperboloids, von welchem zwei Erzeugende erster Art conjugirte Polaren in Bezug auf einen linearen Complex sind, wird von den beiden Complexgeraden, welche selbst Erzeugende erster Art des Hyperboloides sind, in zwei Punkten getroffen, welche harmonisch liegen zu ihren Schnittpunkten mit den beiden conjugirten Polaren.

2) *Betrachtung von vier windschiefen Linien $abcd$.* Es giebt bekanntlich zwei Gerade, welche die vier gegebenen schneiden. Die Coordinaten derselben sind gegeben durch die Gleichungen

$$(ax) = 0, \quad (bx) = 0, \quad (cx) = 0, \quad (dx) = 0, \\ (x^2) = 0.$$

Man erhält das Product der Gleichungen der beiden speciellen linearen Complexe, welche die beiden Geraden x vertreten, wenn man denselben noch die Bedingung

$$(zx) = 0$$

hinzufügt und dann die x eliminirt in Gestalt der Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & (ab) & (ac) & (ad) & (az) \\ (ab) & 0 & (bc) & (bd) & (bz) \\ (ac) & (bc) & 0 & (cd) & (cz) \\ (ad) & (bd) & (dc) & 0 & (dz) \\ (az) & (bz) & (cz) & (dz) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die beiden Geraden x coincidiren, wenn der Kern dieser Determinante verschwindet, d. h. wenn

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 0 & (ab) & (ac) & (ad) \\ (ab) & 0 & (bc) & (bd) \\ (ac) & (bc) & 0 & (cd) \\ (ad) & (bd) & (cd) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Wir bestimmen jetzt das Doppelverhältniss der vier Punkte, in denen die beiden Geraden x von $abcd$ geschnitten werden, auf folgende Weise. Es sei y eine Gerade, welche adx schneidet. Wir suchen dann die Strahlen

$$y + \lambda_1 a, \quad y + \lambda_2 a$$

des Büschels (ya) , welche respective b, c schneiden. Für dieselben ist

$$(yb) + \lambda_1(ab) = 0,$$

$$(yc) + \lambda_2(ac) = 0.$$

Das gesuchte Doppelverhältniss ist daher:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{(yb)}{(yc)} : \frac{(ab)}{(ac)}.$$

Aus den Gleichungen

$$(yx) = 0, \quad (ax) = 0, \quad (bx) = 0, \quad (cx) = 0, \quad (dx) = 0, \quad (x^2) = 0, \\ (dy) = 0, \quad (ay) = 0$$

erhält man aber

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & (yb) & (yc) & 0 \\ 0 & 0 & (ab) & (ac) & (ad) \\ (yb) & (ba) & 0 & (bc) & (bd) \\ (yc) & (ac) & (bc) & 0 & (cd) \\ 0 & (ad) & (bd) & (cd) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

und damit die beiden Werthe $\frac{(yb)}{(yc)}$, welche den fraglichen Doppelverhältnissen auf den beiden Geraden x entsprechen.

Für vier Gerade mit verschwindender Determinante (5) hat $\left(\frac{yb}{yc}\right)$ einen sehr einfachen Werth. Es existiren dann vier Zahlen $\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4$, welche den Gleichungen:

$$(6) \quad \begin{cases} \mu_2(ab) + \mu_3(ac) + \mu_4(ad) = 0, \\ \mu_1(ab) + \mu_3(bc) + \mu_4(bd) = 0, \\ \mu_1(ac) + \mu_2(bc) + \mu_4(cd) = 0, \\ \mu_1(ad) + \mu_2(bd) + \mu_3(cd) = 0 \end{cases}$$

genügen. Alsdann ist

$$\mu_2(yb) + \mu_3(yc) = 0.$$

Bestimmt man μ_2 und μ_3 , so ergiebt sich

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{(bd)(ac) - (cd)(ab) + (ad)(bc)}{(bd)(ac) - (cd)(ab) - (ad)(bc)}.$$

Das Quadrat dieses Ausdrucks hat aber, vermöge der verschwindenden Determinante der Gleichungen (6), den Werth

$$\frac{(ac)}{(ab)} : \frac{(dc)}{(db)},$$

so dass der absolute Werth des Doppelverhältnisses

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{(ac)}{(ab)} : \frac{(dc)}{(db)}}$$

ist*).

*) Es ist dies eine Verallgemeinerung eines Theorems, welches nach einer Bemerkung des Herrn Lindemann (diese Annalen Bd. VII, S. 66, Anmerk.) für Gerade, die einem Hyperboloid angehören, bereits von Herrn Stolz ausgesprochen worden ist.

3) Gleichung des Complexes, dessen Gerade vier feste Ebenen, die ein Tetraeder mit den Kanten a, b, c, d bilden, in constantem Doppelverhältniss δ schneiden. Wir setzen a und d , b und c als Paare gegenüberliegender Kanten voraus. Es bestehen dann die Bedingungen:

$$\begin{aligned}(a^2) &= 0, & (b^2) &= 0, & (c^2) &= 0, & (d^2) &= 0, \\ (ab) &= 0, & (ac) &= 0, & (bd) &= 0, & (dc) &= 0.\end{aligned}$$

Eine Gerade x des Complexes möge die vier Seitenflächen des Tetraeders in Punkten schneiden, durch welche die Strahlen

- 1) $a + \lambda c$,
- 2) $b + \mu d$,
- 3) $a + \nu b$,
- 4) $c + \kappa d$

gehen. Da

$(ax) + \lambda(bx) = 0$, $(bx) + \mu(dx) = 0$, $(ax) + \nu(bx) = 0$, $(cx) + \kappa(dx) = 0$,
so besteht zwischen den Parametern die Identität:

$$\mu\nu = \kappa\lambda.$$

Um das Doppelverhältniss der vier Punkte auszudrücken, wählen wir zwei sich schneidende Strahlen y, z , welche x und beziehungsweise 1), 2) schneiden, so dass:

$$\begin{aligned}(yz) &= 0, \\ (ay) + \lambda(cy) &= 0, \\ (bz) + \mu(dz) &= 0.\end{aligned}$$

Der Strahl $y + \varrho_1 z$ schneide 3), $y + \varrho_2 z$ dagegen 4), so ist ferner:

$$\begin{aligned}(ay) + \nu(by) + \varrho_1[(az) + \nu(bz)] &= 0, \\ (cy) + \kappa(dy) + \varrho_2[(cz) + \kappa(dz)] &= 0\end{aligned}$$

und

$$\delta = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}.$$

Nimmt man für y den Strahl $a + \lambda c$, so ist:

$$(ay) = 0, \quad (by) = 0, \quad (cy) = 0, \quad (dy) = (ad), \quad (yx) = 0, \quad (bz) + \mu(dz) = 0.$$

Vermöge dieser Ausdrücke ergibt sich sofort:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = -\frac{\nu}{\kappa} \frac{(bc)}{(ad)}$$

Man erhält daher etwa aus 3), 4) die Gleichung des Complexes in der Form

$$a_x d_x (bc) + \delta (ad) c_x b_x = 0.$$

Insbesondere ist also die Gleichung des harmonischen Complexes

$$a_x d_x (bc) - (ad) c_x d_x = 0.$$

Der Complex $a_x d_x (bc) + (ad) c_x d_x = 0$ ist dagegen ein specieller, alle

seine Linien sind singulär. Er stellt alle Geraden vor, welche durch die beiden übrigen Kanten des Tetraeders hindurchgehen. Nennen wir dieselben $\gamma' \gamma''$, so muss sich die letztere Gleichung auf

$$\gamma_x' \gamma_x'' = 0$$

reduciren. Man kann dies in der That auf folgende Weise zeigen. Die beiden Kanten $\gamma' \gamma''$ sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$(\gamma a) = 0, \quad (\gamma b) = 0, \quad (\gamma c) = 0, \quad (\gamma d) = 0, \quad (\gamma^2) = 0.$$

Bezeichnet man, wie dies im Folgenden immer geschehen soll, die Determinante

$$\Sigma \pm (A_1 B_2 C_3 D_4 E_5 F_6)$$

durch $(A B C D E F)$, und wird demgemäss

$$(a b c d \gamma' \gamma'') = \Delta,$$

$$(a b c d x \gamma') = \Delta',$$

$$(a b c d x \gamma'') = \Delta''$$

gesetzt, so ist

$$\Delta^2 = (\gamma' \gamma'')^2 (a d)^2 (b c)^2,$$

$$\Delta' \Delta = (\gamma' \gamma'') (\gamma' x) (a d)^2 (b c)^2,$$

$$\Delta'' \Delta = (\gamma' \gamma'') (\gamma'' x) (a d)^2 (b c)^2,$$

also

$$\Delta = (\gamma' \gamma'') (a d) (b c),$$

$$\Delta' = (\gamma' x) (a d) (b c),$$

$$\Delta'' = (\gamma'' x) (a d) (b c).$$

Endlich hat man, durch Multiplication der Determinanten $\Delta' \Delta''$

$\Delta' \Delta'' = -(\gamma'' x) (\gamma' x) \{ (a d) (b c)^2 - 2 (a d) (b c) [a_x d_x (b c) + (a d) b_x c_x] \}$
eine Gleichung, welche nach den zuvor bestimmten Werthen von Δ' und Δ'' die Identität

$$a_x d_x (b c) + (a d) b_x c_x = -\gamma_x' \gamma_x'' (a d) (b c)$$

aussagt*).

II.

Ueber die Umformung verschiedener homogener Differentialausdrücke in Liniencoordinaten.

Für unendlich nahe Gerade

$$x, \quad x + dx, \quad x + 2 dx + d^2 x, \quad x + 3 dx + 3 d^2 x + d^3 x$$

gelten die folgenden Gleichungen, welche sich durch Differentiation der Identität $(x^2) = 0$ ergeben:

*) In ähnlicher Weise lässt sich z. B. auch das Problem behandeln, denjenigen Complex zu bestimmen, dessen Gerade von sechs festen Ebenen in einer Involution geschnitten werden.

$$\begin{aligned}
 (x^2) &= 0, \\
 (x dx) &= 0, \\
 (x d^2 x) + (d^2 x) &= 0, \\
 (x d^3 x) + 3 (dx d^2 x) &= 0 \text{ u. s. w.}
 \end{aligned}$$

Die Gleichung $(x dx) = 0$ sagt daher nicht aus, dass zwei unendlich nahe Gerade sich schneiden. Dies tritt in der That erst dann ein, wie Herr Klein bereits gezeigt hat*), wenn auch die Gleichung

$$-(x d^2 x) = (d^2 x) = 0$$

erfüllt ist.

Wir betrachten nun die Geraden, welche drei Complexen $F \Phi \Psi$ bez. von den Graden $m n p$ angehören. Dabei setzen wir wie üblich

$$\begin{aligned}
 f_i &= \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial x_i}, \\
 f_{ik} &= \frac{1}{m(m-1)} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k},
 \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned}
 \sum x_i f_i &= F, \\
 \sum x_i f_{ik} &= f_k.
 \end{aligned}$$

Dabei werden wir im Folgenden das Summenzeichen fortlassen, also statt der angeführten Ausdrücke einfach schreiben $x_i f_i = F$, $x_i f_{ik} = f_k$ u. s. w. Ferner sollen Ausdrücke, wie $\Sigma (f_i)^2$, $\Sigma f_i \varphi_i$, $\Sigma f_i \psi_i$ und analog gebildete durch f^2 , $f\varphi$, $f\psi$ bezeichnet werden.

Für eine den drei Complexen angehörige Gerade x ist nun

$$(1) \quad F = 0, \quad \Phi = 0, \quad \Psi = 0.$$

Für eine unendlich nahe (consecutive) gelten die Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} (f dx) = 0, \\ (\varphi dx) = 0, \\ (\psi dx) = 0, \\ (x dx) = 0, \\ (k dx) = 0. \end{cases}$$

In ihnen bedeuten die k_i beliebige Coefficienten, welche die homogenen Differentiale verbinden. Die Gleichungen (2) bestimmen die Verhältnisse der dx_i als Unterdeterminanten, so dass, wenn

$$\Pi = (f \varphi \psi x k \alpha)$$

gesetzt wird

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 : dx_4 : dx_5 : dx_6 = \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_1} : \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_2} : \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_3} : \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_4} : \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_5} : \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_6}.$$

Sie geben zu verschiedenen Formeln Veranlassung, von welchen

*) Klein, Math. Ann. Bd. V, S. 293.

in der Liniengeometrie ein sehr vielfältiger Gebrauch zu machen ist und deren wichtigste wir im Folgenden darlegen werden.

Wir setzen:

$$(3) \quad (dx f \varphi \psi x k) = (dx^2) = \Delta.$$

Quadriert man Δ , so ergibt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (2), (1).

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} (dx^2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f^2 & f\varphi & f\psi & 0 & fk \\ 0 & f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi & 0 & \varphi k \\ 0 & f\psi & \varphi\psi & \psi^2 & 0 & \psi k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & kx \\ 0 & fk & \varphi k & \psi k & kx & k^2 \end{vmatrix} = -(kx^2) (dx^2) V,$$

wo zur Abkürzung

$$(4) \quad V = \begin{vmatrix} f^3 & f\varphi & f\psi \\ f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi \\ f\psi & \varphi\psi & \psi^2 \end{vmatrix}$$

gesetzt ist. Es ist daher

$$(5) \quad \Delta = -(kx^2) V.$$

Setzt man ferner

$$\Delta' = (f \varphi \psi x dx \underline{dx^2}),$$

so ergibt sich sofort

$$\Delta \Delta' = (dx^2) (dx^2) (kx) V,$$

also

$$(6) \quad \Delta' = -(kx^3) V^2.$$

Bedeutend die $c_i b_i$ willkürliche Grössen, und wird die Determinante

$$(f \varphi \psi x c b) = K$$

gesetzt, so ist

$$K \Delta' = -(dx^2) V \begin{vmatrix} cx & c_{dx} \\ bx & b_{dx} \end{vmatrix},$$

so dass

$$(7) \quad \begin{vmatrix} cx & c_{dx} \\ bx & b_{dx} \end{vmatrix} = -(kx) (f \varphi \psi x c b) = -(kx) K.$$

Endlich hat man als Werth der Determinante, welcher entsteht, wenn man die Determinante der quadratischen Form (x^2) mit $f_i \varphi_i \psi_i x_i c_i$ horizontal und mit $f_i \varphi_i \psi_i x_i b_i$ vertical rändert, eine Operation, die wir durch

$$\left(\Omega : f_i \varphi_i \psi_i x_i \begin{smallmatrix} c_i \\ b_i \end{smallmatrix} \right)$$

bezeichnen,

$$(8) \quad \left(\Omega : f_i \varphi_i \psi_i x_i \begin{smallmatrix} c_i \\ b_i \end{smallmatrix} \right) = -c_x b_x V.$$

Die consecutive Gerade von $x + dx$, $x + 2dx + d^2x$ ist bestimmt durch die Gleichungen:

$$(9) \quad \begin{cases} k_i d^2 x_i = 0, \\ x_i d^2 x_i + (d x_i^2) = 0, \\ f_i d^2 x_i + (m-1) f_{ik} d x_i d x_k = 0, \\ \varphi_i d^2 x_i + (n-1) \varphi_{ik} d x_i d x_k = 0, \\ \psi_i d^2 x_i + (p-1) \psi_{ik} d x_i d x_k = 0. \end{cases}$$

Trägt man an Stelle der $d x_i d x_k$ ihre Werthe aus (2) ein, so entsteht:

$$f_i d^2 x_i = - (n-1) \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} & f_1 & \varphi_1 & \psi_1 & x_1 & k_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} & f_2 & \varphi_2 & \psi_2 & x_2 & k_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & f_{35} & f_{36} & f_3 & \varphi_3 & \psi_3 & x_3 & k_3 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} & f_4 & \varphi_4 & \psi_4 & x_4 & k_4 \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55} & f_{56} & f_5 & \varphi_5 & \psi_5 & x_5 & k_5 \\ f_{61} & f_{62} & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} & f_6 & \varphi_6 & \psi_6 & x_6 & k_6 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & \varphi_5 & \varphi_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 & \psi_5 & \psi_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Man reducirt diese Determinante, indem man die sechs ersten Horizontal- oder Vertikalreihen mit den x multiplicirt und von der siebenten abzieht. Es ergibt sich so:

$$(10) \quad \begin{cases} f_i d^2 x_i = (m-1) U_1 (k x)^2, \\ \varphi_i d^2 x_i = (n-1) U_2 (k x)^2, \\ \psi_i d^2 x_i = (p-1) U_3 (k x)^2. \end{cases}$$

Es bedeutet in den Gleichungen (10) U_1 — und dem analog U_2, U_3 — die mit $\varphi_i \psi_i x_i$ geränderte Determinante der Coefficienten der quadratischen Form

$$X_i X_k f_{ik},$$

welche letztere mit der Hesse'schen Determinante von F identisch ist.

Die Darstellung des Ausdrucks $d x_i d^2 x_i = -\frac{1}{3} (x_i d^3 x_i)$ erhält man durch Differentiation der Gleichung (5), nämlich:

$$(11) \quad -2 (d x d^2 x) = (k x)^2 \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} d x_i \right).$$

Andererseits hat man:

$$d x d^2 x = (d^2 x f \varphi \psi x k) = \Delta'''.$$

Daraus ergibt sich:

$$(\Delta''')^2 = \begin{vmatrix} (d^2 x^2) & (m-1)(kx)^2 U_1 & (n-1)(kx)^2 U_2 & (p-1)(kx)^2 U_3 & (kx)^2 V & 0 \\ (m-1)(kx)^2 U_1 & f^2 & f\varphi & f\psi & 0 & fk \\ (n-1)(kx)^2 U_2 & f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi & 0 & \varphi k \\ (p-1)(kx)^2 U_3 & f\psi & \varphi\psi & \psi^2 & 0 & \psi k \\ (kx)^2 V & 0 & 0 & 0 & 0 & (kx)^2 \\ 0 & fk & \varphi k & \psi k & (kx)^2 & k^2 \end{vmatrix}$$

Aus diesem Ausdrucke lassen sich die willkürlichen Grössen k ohne weiteres nicht entfernen. Wenn aber $V=0$, so erhält man:

$$(12) \quad (\Delta''')^2 = (kx)^6 \begin{vmatrix} 0 & (m-1)U_1 & (n-1)U_2 & (p-1)U_3 \\ (m-1)U_1 & f^2 & f\varphi & f\psi \\ (n-1)U_2 & f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi \\ (p-1)U_3 & f\psi & \varphi\psi & \psi^2 \end{vmatrix}.$$

Der Ausdruck rechter Hand lässt sich, von der Gleichung (11) ausgehend, wenn man die Differentialquotienten von V mit v_i bezeichnet, auch in folgender Form

$$(16) \quad \frac{1}{4} (kx)^6 \begin{vmatrix} 0 & vf & v\varphi & v\psi \\ vf & f^2 & f\varphi & f\psi \\ v\varphi & f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi \\ v\psi & f\psi & \varphi\psi & \psi^2 \end{vmatrix}$$

darstellen.

III.

Die Ordnung und der Rang der windschiefen Fläche, welche vollständiger Schnitt der drei Complexe $F \Phi \Psi$ ist.

Die Ordnung N der windschiefen Fläche ergibt sich gleich $2mnp$. Eine willkürliche Gerade y wird nämlich von so viel Erzeugenden x der Fläche getroffen als das System der Gleichungen

$$(yx) = 0, \quad F = 0, \quad \Phi = 0, \quad \Psi = 0, \quad (x^2) = 0$$

Lösungen für x zulässt.

Die Gleichungen II. (2) zeigen ferner, dass die consecutive Erzeugende einer beliebigen x vollkommen bestimmt ist. Eine Unbestimmtheit tritt nur dann ein, wenn Gleichungen von der Form

$$(1) \quad \mu_1 f_i + \mu_2 \varphi_i + \mu_3 \psi_i = x_i \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

bestehen. Die consecutive Erzeugende ist dann aus den Gleichungen:

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} (x \, dx) = 0, \\ (f \, dx) = 0, \\ (\varphi \, dx) = 0, \\ (\psi \, dx) = 0, \\ (k \, dx) = 0, \\ (\mu_1(m-1)f_{ik} + \mu_2(n-1)\varphi_{ik} + \mu_3(p-1)\psi_{ik}) \, dx_i \, dx_k = T_{ik} \, dx_i \, dx_k \end{array} \right.$$

zu bestimmen. Darnach ergeben sich zwei Werthsysteme für die Differentiale. Die Fläche hat also eine Doppelerzeugende, wenn die Gleichungen (1) erfüllt sind. Fügt man den Gleichungen (2) noch die folgenden

$$(z \, x) = 0, \quad (z \, dx) = 0$$

hinzu und eliminirt die Differentiale, so erhält man das Product der beiden Gleichungen zweier linearer Complexe, denen die Doppelerzeugende angehört, und deren Ebenen längs derselben Tangentenebenen der Fläche sind. Dieses Product lässt sich, wenn durch Π die Determinante der quadratischen Form $T_{ik}x_i x_k$ bezeichnet wird, darstellen durch

$$(\Pi : f_i \varphi_i z_i) = 0.$$

Die Doppelerzeugende wird daher zur Rückkehrerzeugenden, wenn der Kern dieser Determinante verschwindet, d. h. wenn

$$(\Pi : f_i \varphi_i) = 0.$$

Höhere Singularitäten der Fläche entstehen, wenn von den Gleichungen

$$f_i = \varrho_1 x_i, \quad \varphi_i = \varrho_2 x_i, \quad \psi_i = \varrho_3 x_i$$

zwei oder drei für eine Erzeugende x bestehen. Besteht nur die Gleichung $f_i = \varrho_1 x_i$, so hat der erzeugende Complex F selbst x zur Doppellinie*), die dann Doppel- oder Rückkehrerzeugende der Fläche wird. Finden dagegen zwei oder drei zugleich statt, so hat die Fläche die Gerade x zur vier-, respective achtfachen Generatrix.

Die Gleichungen (1) repräsentiren eine Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten der drei Complexe. Für den Fall

$$\begin{aligned} F &= \Sigma a_{ik} x_i x_k, \\ \Phi &= \gamma' x, \\ \Psi &= \gamma'' x \end{aligned}$$

kann man dieselbe dahin aussprechen, dass die Discriminante nach μ der Determinante:

*) Plücker, Neue Geometrie des Raumes S. 296.

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} - \mu & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & \gamma_1' & \gamma_1'' \\
 a_{12} & a_{22} - \mu & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & \gamma_2' & \gamma_2'' \\
 a_{13} & a_{23} & a_{33} - \mu & a_{34} & a_{35} & a_{36} & \gamma_3' & \gamma_3'' \\
 a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} - \mu & a_{45} & a_{46} & \gamma_4' & \gamma_4'' \\
 a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} - \mu & a_{56} & \gamma_5' & \gamma_5'' \\
 a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} - \mu & \gamma_6' & \gamma_6'' \\
 \gamma_1' & \gamma_2' & \gamma_3' & \gamma_4' & \gamma_5' & \gamma_6' & 0 & 0 \\
 \gamma_1'' & \gamma_2'' & \gamma_3'' & \gamma_4'' & \gamma_5'' & \gamma_6'' & 0 & 0
 \end{vmatrix} = 0$$

verschwinden muss.

Unter dem Range einer Fläche verstehen wir überhaupt den Grad desjenigen speciellen Complexes, welcher die sämtlichen Tangenten derselben repräsentirt, oder den Grad der Gleichung der Fläche in Liniencoordinaten. Der Rang ist daher auch gleich dem Grade ihres Tangentenkegels oder gleich der Classe ihrer ebenen Schnittcurve.

Die Gleichung der windschiefen Fläche erhält man auf folgende Weise ausgedrückt in Liniencoordinaten. Soll die Gerade y Tangente der Fläche sein, so muss sie zwei consecutive Erzeugende derselben schneiden. Daher ist

$$(3) \quad \begin{cases} (yx) = 0, \\ (ydx) = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man aus den Gleichungen II. (2) und der letzteren die Differentiale, so erhält man

$$(4) \quad (f \varphi \psi x k y) = 0.$$

Das Quadrat des letzteren Ausdruckes ist gleich $(kx)^2$, multiplicirt in die mit $fy \varphi y \psi y$ geränderte Determinante V . Es lässt sich also aus (4) der Factor (kx) stets durch Division aussondern, wenngleich dies, wie es scheint, nicht so ausgeführt werden kann, dass die Determinantenform dabei beibehalten wird. Die Gleichung (4) ist daher vom ersten Grade in y , vom $m + n + p - 3^{\text{ten}}$ in x . Eliminirt man x aus (4) und den Gleichungen

$$(yx) = 0, \quad (x^2) = 0, \quad F = 0, \quad \Phi = 0, \quad \Psi = 0,$$

so entsteht eine Gleichung vom Grade

$$(5) \quad R = 2 m n p (m + n + p - 2)$$

in den y , welche die Fläche in Liniencoordinaten y darstellt. Für jede Doppelerzeugende x_0 der Fläche enthält dieselbe quadratisch den Factor $(x_0 y)$.

Wir zeigen, wie eine solche Elimination in den einfacheren Fällen sich wirklich ausführen lässt.

1) *Linienfläche* (1, 1, 1) (nach Plücker's Bezeichnung*), welche durch drei lineare Complexe $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$ erzeugt wird.

Man hat hier ohne weiteres:

$$(a \ b \ c \ x \ k \ y)^2 = (kx)^2 \begin{vmatrix} a^2 & ab & ac & ay \\ ab & b^2 & bc & by \\ ac & bc & c^2 & cy \\ ay & by & cy & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Das Quadrat des Ausdruckes (4) von dem Factor (kx) befreit, stellt also einen von den x völlig freien Ausdruck, d. h. das Eliminationsresultat oder die Gleichung des von den drei linearen Complexen erzeugten Hyperboloides in Liniencoordinaten vor.

2) *Linienfläche* (2, 1, 1), welche durch den Schnitt dreier Complexe $a_x = 0$, $b_x = 0$; $\psi = \Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ erzeugt wird. Die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & a\psi & ay \\ ab & b^2 & b\psi & by \\ a\psi & b\psi & \psi^2 & \psi y \\ ay & by & \psi y & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ist homogen vom zweiten Grade in y und x . Multiplicirt man die Gleichungen $(yx) = 0$, $(ax) = 0$, $(bx) = 0$ mit $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ und nimmt $(x^2) = 0$, $\psi = 0$ hinzu, so hat man 21 Gleichungen, in welchen die 21 unbekannten Grössen $x_i x_k$ linear und homogen auftreten. Die Determinante dieser 21 Gleichungen, gleich Null gesetzt, stellt die Gleichung der Fläche in Liniencoordinaten vor, da sie die y nur im achten Grade enthält. Man vermeidet das Auftreten einer so vielreihigen Determinante, wenn man zuvor die Gleichung (4) durch Division von dem Factor (kx) befreit. Man hat alsdann aus zwei Gleichungen zweiten und vier Gleichungen ersten Grades die x zu eliminiren, was ohne Schwierigkeit geschehen kann**), weshalb wir nicht weiter darauf eingehen.

Wir wenden uns jetzt wieder zu der allgemeinen Betrachtung zurück. Bezeichnet man mit d die Zahl der Doppelerzeugenden der Fläche, so ist nach (5) der Rang der Fläche gegeben durch die Gleichung

$$R = 2 mnp(m + n + p - 2) - 2d.$$

Man kann die Zahl R auch durch directe Bestimmung der Classe der ebenen Schnittcurve oder der Ordnung des Tangentenkegels er-

*) Plücker, Sur les surfaces réglées leur construction et classification, Ann. di Mat. 1870.

**) Vgl. Clebsch, Crelle's Journ. Bd. 59, S. 1, oder auch: Ueber eine Classe von Eliminationsproblemen Bd. 58 desselben Journals.

halten. Soll eine Gerade $a + \lambda b$ des ebenen Büschels (a, b) Tangente der Fläche sein, so ist nach (3):

$$\begin{aligned} a_x + \lambda b_x &= 0, \\ (a_{dx}) + \lambda (b_{dx}) &= 0, \end{aligned}$$

daher

$$a_x(b_{dx}) - b_x(a_{dx}) = 0.$$

Werden jetzt die Differentiale eliminirt, so ist

$$(6) \quad (f \varphi \psi x k \ a_x b - b_x a) = 0$$

eine Gleichung, welche einen Complex $m + n + p - 2^{\text{ten}}$ Grades vorstellt, welcher die erzeugenden Complexe in $2mnp(m + n + p - 2)$ Geraden schneidet. Derselbe geht ersichtlich durch jede Doppelerzeugende der Fläche einmal hindurch, da der Ausdruck (6) verschwindet, wenn die Gleichungen (1) gelten. Die Classe des ebenen Schnittes, sowie der Grad des Tangentenkegels ist daher durch die Zahl R gegeben*).

Bezeichnet man den Grad der *Doppelcurve* der Fläche durch D , so ist nach den Formeln von Plücker

$$N(N-1) - 2D - 2d = R,$$

also, wenn für N $2mnp$, für R die Zahl $2mnp(m + n + p - 2) - 2d$ gesetzt wird:

$$(7) \quad D = mnp[2mnp - (m + n + p) + 1].$$

Man erhält hieraus endlich das Geschlecht P der windschiefen Fläche

$$\begin{aligned} (8) \quad P &= \frac{1}{2}(N-1)(N-2) - D - d \\ &= (2mnp - 1)(mnp - 1) - D - d \\ &= mnp(m + n + p - 4) + 1 - d. \end{aligned}$$

Das Auftreten von Doppelerzeugenden modificirt daher den Grad der Doppelcurve nicht, sondern nur das Geschlecht der Fläche. Die Linienflächen $(2, 1, 1)$ sind im Allgemeinen vierten Grades vom Geschlechte eins, mit einer Doppelcurve zweiten Grades, welche erhalten bleibt, wenn die Fläche eine Doppelerzeugende erhält, also das Geschlecht Null wird.

Wir verificiren die Formeln (7), (8) in einigen Fällen durch directe Betrachtung.

1) *Linienfläche* $(p, 1, 1)$. Zwei lineare Complexe $a_x = 0$, $b_x = 0$ und $\psi = 0$ erzeugen eine windschiefe Fläche $(p, 1, 1)$ vom Grade $2p$, deren Rang $2p^2$ ist. Man kann die Classe des ebenen Schnittes aber auch auf folgende Weise finden. Die Fläche enthält nämlich zwei

*) Auf eine hiervon nicht wesentlich verschiedene Weise hat bereits Herr Lüroth die Zahl R bestimmt. Crelle's Journ. Bd. 67, S. 135.

p -fache Leitlinien, die Directricen des den beiden Complexen a_x, b_x zugehörigen Büschels und ausser ihnen offenbar keine Doppelcurve. Daher ist der ebene Schnitt eine Curve $2p^{\text{ter}}$ Ordnung mit zwei p -fachen Punkten, seine Classe also wie vorhin:

$$2p(2p-1) - 2p(p-1) = 2p^2.$$

2) *Linienfläche* $(p, 2, 1)$, welche von einem speciellen linearen, einem Complexe zweiten Grades, dem die Axe a des speciellen angehört, und $\psi = 0$ erzeugt wird. Die Singularitäten der Fläche sind folgende: Die Axe a ist $2p$ -fache Leitlinie derselben. Durch dieselbe gehen ferner nach den Untersuchungen Plücker's*) vier ausgezeichnete Ebenen $e_1 e_2 e_3 e_4$, für welche die in ihnen liegende Complexcurve des Complexes zweiter Ordnung in zwei Strahlbüschel degenerirt, deren Centra beziehungsweise $\omega_1 \omega_1 \omega_2 \omega_2 \omega_3 \omega_3 \omega_4 \omega_4$ seien. Von denselben liegen $\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4$ auf der Axe a selbst. Die Doppelcurve hat daher diese Punkte zu vielfachen Punkten, welche, wie man leicht sieht, als $\frac{p(p-1)}{2}$ -fache zu zählen sind, weil von ihnen so viel Zweige der Curve auslaufen. In einer beliebig durch die Axe gelegten Ebene liegen ferner $2p$ Erzeugende der Fläche — die gemeinsamen Tangenten des Complexkegelschnittes und der Complexcurve von $\psi=0$ — also $(2p-1)p$ Punkte der Doppelcurve. Daher ist der Grad der letzteren

$$2p(p-1) + p(2p-1) = 4p^2 - 3p;$$

der Totalgrad der Doppelcurven ist also, wenn man die $2p$ -fache Leitlinie noch hinzurechnet:

$$6p^2 - 4p,$$

eine Zahl, welche sich übereinstimmend auch aus (7) ergibt. Die Doppelcurve hat übrigens auch die vier Punkte $\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4$ zu $\frac{p(p-1)}{2}$ -fachen Punkten, während die $\frac{p(p-1)}{2}$ Zweige derselben, welche von einem der Punkte ω_i auslaufen, von der zugehörigen Ebene e_i in demselben berührt werden. Beispielsweise ist für $p=3$ die krumme Doppelcurve der Fläche zwölfter Ordnung von der 27^{ten} Ordnung mit 8 wirklichen dreifachen Punkten.

Die Formel (7) nimmt eine etwas andere Gestalt an, wenn die Doppelerzeugende zugleich einen Theil der Doppelcurve der Fläche ausmacht. Um diesen Fall zu erläutern, betrachten wir die windschiefe Fläche, welche von einem speciellen linearen Complexe γ_x , dessen Axe γ den beiden Complexen Φ, Ψ angehört, gebildet wird. Die Gleichungen III. (2), welche die consecutive Erzeugende $x+dx$ bestimmen, werden unbestimmt für $x=\gamma$; sie sind dann zu ersetzen durch das System:

*) Plücker, N. Geom. d. R. S. 177.

$$(\gamma dx) = 0,$$

$$(\varphi dx) = 0,$$

$$(\psi dx) = 0,$$

$$(k dx) = 0,$$

$$(dx^2) = 0.$$

Aus denselben ergibt sich, dass γ Doppelerzeugende der Fläche ist und zugleich von ihren beiden consecutiven Erzeugenden geschnitten wird. Ausserdem ist aber γ eine $np-1$ -fache Leitgerade der Fläche. Der Rang derselben ist nach wie vor durch die Gleichung (6)

$$P = ((a_x b - b_x a) \varphi \psi \gamma x k) = 0$$

bestimmt. P verschwindet für $x = \gamma$, während $\frac{\partial P}{\partial x_i}$ einen bestimmten

Werth behält. Da auch $\sum \frac{\partial P}{\partial x_i} dx_i$ nicht verschwindet, findet für den Rang der Fläche keine weitere Erniedrigung statt; er ist demnach:

$$2np(n+p-1) - 2.$$

Der Grad der krummen Doppelcurve D ist daher durch die Gleichung

$$D = \frac{np}{2} (3np - 1) - np(n+p) + 1$$

gegeben. Das Geschlecht der Fläche bestimmt sich noch immer nach (8)

$$P = np(n+p-3).$$

IV.

Die singulären Erzeugenden der windschiefen Fläche.

Zwei consecutive Erzeugende der Fläche schneiden sich im Allgemeinen nicht. Damit x von $x + dx$ getroffen werde, muss nach II. die Bedingung

$$(dx^2) = - (kx)^2 V = 0$$

erfüllt sein. $V=0$ stellt einen Complex vom Grade $2(m+n+p-3)$ vor, welcher mit den erzeugenden Complexen $4mnp(m+n+p-3)$ singuläre Erzeugende der Fläche bestimmt*). Der Durchschnittspunkt von x und $x + dx$ liegt dabei auf der Doppelcurve; wir bezeichnen ihn wie üblich als *Cuspidalpunkt* der Fläche**).

*) Vgl. Lüroth a. a. O.; Klein, Math. Ann. Bd. V, S. 292.

**) Aus der Zahl $4mnp(m+n+p-3)$ der Cuspidalpunkte erhält man leicht die Bestimmung mehrerer anderer, für die Theorie der Liniengebilde wichtiger Zahlen

1) *Ordnung und Classe der Brennfläche von zwei Complexen* $\Phi = 0$, $\Psi = 0$. Eine solche Fläche ist in sich dualistisch; sie entsteht, als Punktgebilde betrachtet.

Befinden sich unter den Complexen zwei lineare a_x, b_x , so gehört die Linienfläche einem ganzen Büschel linearer Complexes $a_x + \lambda b_x = 0$ an. In dem Letzteren befinden sich im Allgemeinen zwei specielle; die Fläche hat die Axen α, β derselben zu p -fachen Leitlinien, auf denen je $2p(p-1)$ Cuspidalpunkte liegen.

Inshesondere aber können die beiden Axen α, β zusammenfallen. Die Fläche gehört dann einer speciellen Congruenz an, man kann sie erzeugen durch den Complex Ψ , den speciellen linearen α_x und einen anderen linearen, der die Axe α in sich enthält. Sie hat dann zwei

durch die Schnitte unendlich naher Geraden der Congruenz $\Phi = 0, \Psi = 0$, als Ebenegebilde durch die Ebenen dieser Geraden, wobei aber im Allgemeinen die betreffende Ebene ihren Tangentialpunkt nicht im Schnittpunkte der beiden Geraden hat. Vgl. Pasch, Habilitationsschrift, Giessen 1870.

Die Zahl der singulären Erzeugenden der Linienfläche, welche von Φ, Ψ und einem speciellen linearen Complex gebildet wird, ist nun gleich der Summe der Zahl der Punkte der Brennfläche, welche auf der Axe des letzteren liegen, und der Ebenen der Brennfläche, welche durch die Axe gehen, d. h. gleich der Summe von Ordnung und Classe der Brennfläche. *Da beide Zahlen gleich sein müssen, so hat man*

$$2np(n+p-2)$$

als Ordnungs- und Classenzahl der Brennfläche zweier Complexes n ten und p ten Grades (eines Strahlensystems $[np]$).

2) *Ordnung und Classe der singulären Fläche eines Complexes $F=0$.* Einem Complex $F=0$ vom n ten Grade ist zugeordnet der Complex $\Phi = \Sigma f_i^2 = 0$ vom $2(n-1)$ ten Grade, welcher mit ihm die Congruenz der singulären Linien des Complexes bestimmt. Damit wird zugleich jeder singulären Linie x eine andere Linie mit den Coordinaten $y_i = f_i$ zugeordnet. Beide schneiden sich im singulären Punkte von x , welcher ein Punkt der singulären Fläche des Complexes ist, während (xy) die Tangentialebene dieses Punktes, die singuläre Ebene vorstellt. Für die Linienfläche, welche von F, Φ und dem linearen speciellen $\Psi=0$ mit der Axe a erzeugt wird, ist nun:

$$V = (fa) [2(f\varphi)(\varphi a) - \varphi^2 \cdot (fa)].$$

Der Factor (fa) gleich Null gesetzt, bestimmt mit den gegebenen Complexen $4 \cdot n(n-1)^2$ singuläre Erzeugende der Linienfläche. Für dieselben schneiden sowohl x als y die Axe a . Es liegt also entweder der singuläre Punkt von x auf der Axe, oder die singuläre Ebene xy geht durch dieselbe. $4n(n-1)^2$ ist daher die Summe von Ordnung und Classe der singulären Fläche des Complexes. Man hat daher den Satz:

Ordnung und Classe der singulären Fläche eines Complexes vom n ten Grade ist

$$2n(n-1)^2.$$

Die nämliche Zahl ist auf ganz anderem Wege von Clebsch gefunden worden. (Vgl. dessen Aufsatz (diese Annalen Bd. V) Ueber die Plücker'schen Complex und die Singularitätenflächen derselben.)

Der andere Factor von V bezieht sich auf Ordnung und Classe einer zweiten Fläche, welche mit der besprochenen die vollständige Brennfläche der Congruenz $F\Phi$ ausmacht.

Ordnung und Classe dieser Fläche ist daher

$$2n(n-1)(5n-7).$$

unendlich nahe p -fache Leitlinien. Dem entsprechend geht die Determinante V in ein Quadrat über; es giebt also nur $2p(p-1)$ — in gewissem Sinne doppeltzählende — singuläre Linien oder Cuspidalpunkte. Diese Bemerkung ist übrigens nur ein specieller Fall eines allgemeineren Theorems, welches Herr Klein*) bereits erwähnt hat.

Die Zahl der singulären Ebenen verringert sich, wenn die Fläche eine der in § III. betrachteten Singularitäten besitzt.

Für eine Doppelerzeugende findet, wie wir sahen, die Beziehung:

$$(1) \quad \mu_1 f_i + \mu_2 \varphi_i + \mu_3 \psi_i = x_i$$

statt. Multiplicirt man die sechs Gleichungen (1) der Reihe nach mit f_i, φ_i, ψ_i und summirt jedesmal nach i , so ergeben sich die Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} \mu_1 f^2 + \mu_2 f\varphi + \mu_3 f\psi = 0, \\ \mu_1 f\varphi + \mu_2 \varphi^2 + \mu_3 \varphi\psi = 0, \\ \mu_1 f\psi + \mu_2 \varphi\psi + \mu_3 \psi^2 = 0. \end{cases}$$

Die Determinante derselben ist $V = 0$. Der Complex V verschwindet daher für jede Doppelerzeugende der Fläche. Eine weitere Singularität besitzt derselbe im Allgemeinen nicht. Multiplicirt man nämlich die Gleichungen (1) mit $f_{ik}, \varphi_{ik}, \psi_{ik}$ und summirt wieder nach i , so ergibt sich:

$$(3) \quad \begin{cases} \mu_1 f_i f_{ik} + \mu_2 \varphi_i f_{ik} + \mu_3 \psi_i f_{ik} = f_k, \\ \mu_1 f_i \varphi_{ik} + \mu_2 \varphi_i \varphi_{ik} + \mu_3 \psi_i \varphi_{ik} = \varphi_k, \\ \mu_1 f_i \psi_{ik} + \mu_2 \varphi_i \psi_{ik} + \mu_3 \psi_i \psi_{ik} = \psi_k. \end{cases}$$

Werden jetzt die Gleichungen (3) der Reihe nach mit

$$2 \mu_1 (m-1), \quad 2 \mu_2 (n-1), \quad 2 \mu_3 (p-1)$$

multiplicirt und addirt, so entsteht:

$$(4) \quad R = \mu_1^2 \frac{\partial f^2}{\partial x_k} + \mu_2^2 \frac{\partial \varphi^2}{\partial x_k} + \mu_3^2 \frac{\partial \psi^2}{\partial x_k} + 2\mu_1 \mu_2 \frac{\partial f\varphi}{\partial x_k} + 2\mu_1 \mu_3 \frac{\partial f\psi}{\partial x_k} + 2\mu_2 \mu_3 \frac{\partial \varphi\psi}{\partial x_k} \\ = 2[\mu_1(m-1)f_k + \mu_2(n-1)\varphi_k + \mu_3(p-1)\psi_k].$$

Andererseits zeigt die Differentiation von V , dass

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} = R \begin{vmatrix} f^2 & f\varphi \\ f\varphi & \varphi^2 \end{vmatrix}.$$

Der Complex V hat die Doppelerzeugende also im Allgemeinen zur einfachen Linie, da $\frac{\partial V}{\partial x_k}$ weder verschwindet, noch proportional mit x_i ausfällt. Der Werth von R zeigt aber, dass

$$\sum \frac{\partial V}{\partial x_k} dx_k = 0.$$

*) Math. Ann. Bd. V, S. 292.

Demnach enthält V die beiden consecutiven Erzeugenden der Linienfläche. Die Zahl der singulären Erzeugenden wird daher durch das Auftreten einer Doppelerzeugenden um vier vermindert.

Sind dagegen $F \Phi \Psi$ von gleichem Grade m , so ist $R=2(m-1)x_k$, also $\frac{\partial V}{\partial x_k} \equiv x_k$. Die Doppelerzeugende x ist dann selbst Doppellinie des Complexes V , welche von den consecutiven Erzeugenden keine in sich enthält*). Die Verminderung der Zahl der singulären Erzeugenden bleibt daher die nämliche. Dasselbe gilt auch in dem Falle, wenn einer der Complexes selbst eine Doppellinie besitzt**).

Wenn zwei oder drei der erzeugenden Complexes die Gerade x zur Doppellinie haben, so wird diese zugleich vier-, respective sechsfache Linie des Complexes V . Die Verminderung der Zahl der singulären Erzeugenden beträgt daher mindestens 16, resp. 48, doch scheinen ausserdem noch specielle Beziehungen des Complexes V zu der windschiefen Fläche stattzufinden, deren algebraische Bestimmung schwierig sein dürfte.

In speciellen Fällen können zwei singuläre Erzeugende consecutiv sein. Dazu ist erforderlich, dass mit V zugleich

$$(dx \, d^2x)$$

verschwinde. Dazu ist eine Bedingung zwischen den Coefficienten von $F \Phi \Psi$ hinreichend, welche für den Fall $F = a_x$, $\Phi = b_x$ das Resultat der Elimination der x aus den vier Gleichungen zweiten Grades:

$$U_3 = 0, \quad V = 0, \quad (x^2) = 0, \quad \Psi = 0$$

und den linearen Gleichungen

$$a_x = 0, \quad b_x = 0$$

sein würde.

Die Fläche wird dagegen developpabel, wenn der Complex V alle den drei Erzeugenden gemeinschaftlichen Geraden in sich enthält. Wir gehen jedoch auf die Betrachtung dieses Falles nicht weiter ein, da er sich besser an die Theorie der Brennflächen anschliesst.

*) In diesem Falle kann man die erzeugenden Complexes durch irgend drei lineare Combinationen derselben ersetzen. Man erkennt daraus ohne weiteres, wovon man sich übrigens auch direct überzeugen kann, dass die Determinante V eine Combinante der drei Formen $F \Phi \Psi$ ist.

**) Die am Schluss des § III. betrachtete Fläche γ, Φ, Ψ besitzt allerdings nur $4np(n+p-2) - 6$ singuläre Erzeugende. Von diesen haben $2np(n+p-2)$ ihre Cuspidalpunkte auf der $np+1$ -fachen Leitlinie der Fläche. Die Erniedrigung um sechs (anstatt vier) ist eine Folge davon, dass unter den singulären Erzeugenden sich zwei ausgezeichnete befinden, welche doppelt zu zählen sind.

V.

Die Haupttangente der windschiefen Fläche.

Die Haupttangente bilden in Folge der dualistischen Erzeugung der Fläche ein Strahlensystem gleicher Ordnung und Classe. Die Classe desselben ist durch die Zahl der Inflectionen des ebenen Schnittes gegeben, bestimmt sich also nach den Formeln von Plücker durch

$$3N(N-2) - 6D = 6mnp[m+n+p-2].$$

Man kann diese Zahl auf folgende Weise auch direct bestimmen. Eine Gerade y , welche Haupttangente der Fläche ist, muss drei consecutive Erzeugende derselben schneiden, also den Bedingungen

$$(1) \quad (yx) = 0, \quad (ydx) = 0, \quad (yd^2x) = 0, \quad (y^2) = 0$$

genügen. Wir fragen nach der Zahl der Haupttangente, welche zwei willkürliche Gerade a, b schneiden, fügen also den Gleichungen (1) die beiden

$$(2) \quad a_y = 0, \quad b_y = 0$$

hinzu.

Die Elimination der y liefert die Determinante

$$(3) \quad (\Omega : x dx d^2x a b) = 0.$$

Man eliminirt aus derselben die Differentiale durch zweimalige Multiplication mit $\Delta = (dx^2)$, wobei sich der Factor Δ^2 ohne weiteres wieder absondert und erhält so die Gleichung:

$$(4) \quad \begin{vmatrix} f^2 & f\varphi & f\psi & 0 & (m-1)U_1 & af & bf \\ f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi & 0 & (n-1)U_2 & a\varphi & b\varphi \\ f\psi & \varphi\psi & \psi^2 & 0 & (p-1)U_3 & a\psi & b\psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V & a_x & b_x \\ (m-1)U_1 & (n-1)U_2 & (p-1)U_3 & V & 0 & 0 & 0 \\ af & a\varphi & a\psi & a_x & 0 & 0 & 0 \\ bf & b\varphi & b\psi & b_x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dasselbe stellt einen Complex $6(m+n+p-3)^{\text{ten}}$ Grades vor, welcher mit den erzeugenden Complexen $F\Phi\Psi$ $12mnp(m+n+p-3)$ Erzeugende der Linienfläche bestimmt, für welche jedesmal eine der ihnen zugehörigen Haupttangente a und b schneidet. Man kann dies Resultat auch so aussprechen:

Der Grad der windschiefen Fläche, welche von den Haupttangente gebildet wird, die einem linearen Complexe angehören, ist

$$12mnp(m+n+p-3).$$

Wenn a und b sich schneiden, so repräsentiren die

$$12mnp(m+n+p-3)$$

Erzeugenden solche Haupttangente, die entweder in der Ebene ab liegen oder durch den Punkt ab gehen, wonach man wieder die vorhin angeführte Zahl für Classe und Ordnung des Strahlensystems der Haupttangente erhält.

Die Determinante (4) nimmt eine sehr einfache Gestalt an, wenn einer der Complexe, etwa F , linear ist. Alsdann ist $U_1 = 0$. Setzt man noch voraus, dass a b irgend zwei Gerade sind, welche F angehören, so ist

$$af = 0, \quad bf = 0,$$

womit sich (4) reducirt auf:

$$(5) \quad f^2 \begin{vmatrix} (m-1)U_2 & a_p & b_p \\ (p-1)U_3 & a_p & b_p \\ V & a_x & b_x \end{vmatrix}.$$

Jede Schnittlinie der vier Complexe $F \Phi \Psi$ und (5) zählt also doppelt. In der That wird, wenn y eine in der Ebene ab liegende Haupttangente der Erzeugenden x ist, die conjugirte Polare von y in Bezug auf den linearen Complex F ebenfalls Haupttangente von x sein, aber durch den Punkt ab gehen. Es gehören mithin zu jeder Geraden x zwei Haupttangente.

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der *Haupttangenteurven* auf windschiefen Flächen. Wir gehen dabei aus von dem Satze, den Herr Lie zuerst in folgender Form ausgedrückt hat*):

Wenn eine Fläche ihre eigene reciproke Polare hinsichtlich eines linearen Complexes ist, so enthält dieselbe eine Haupttangenteurve, deren Tangente dem Complexe angehören.

Im Anschluss an das Vorige drücken wir diesen Satz so aus: *Gehört eine Linienfläche einem linearen Complexe an, so ist die Linienfläche der Haupttangente, welche ebenfalls Gerade des Complexes sind, developpabel und bildet mit ihrer Rückkehrcurve eine Haupttangenteurve der ersten Fläche.*

Einen liniengeometrischen Beweis dieses Satzes kann man in der folgenden Form geben:

Sind $x, x + dx, x + 2dx + d^2x, x + 3dx + 3d^2x + d^3x$ vier consecutive Erzeugende der windschiefen Fläche, welche dem Complexe $F = \gamma_x$ angehört, so ist:

$$(\gamma x) = 0, \quad (\gamma dx) = 0, \quad (\gamma d^2x) = 0, \quad (\gamma d^3x) = 0.$$

Eine Haupttangente y der Fläche, welche γ ebenfalls angehört, genügt den Bedingungen (1), während ausserdem

*) Lie, Partielle Differentialgleichungen und Complexe, Math. Ann. Bd. V, S. 179. Einen geometrischen Beweis des Lie'schen Satzes gab Herr Klein (Math. Ann. Bd. V, S. 274).

$$(\gamma y) = 0$$

ist. Die consecutive Haupttangente $y + dy$ ist dann bestimmt durch
 $(x dy) = 0$, $(y dx) = 0$, $(dy d^2 x) + (y d^3 x) = 0$, $(\gamma dy) = 0$,
 $(y dy) = 0$, $(R dy) = 0$.

Bildet man jetzt den Ausdruck (dy^2) , dessen Verschwinden anzeigt, dass y von $y + dy$ geschnitten wird, so ergibt sich:

$$(dy^2) = (\Omega : x dx \gamma k y) \equiv (\Omega : dx \gamma y) = \begin{vmatrix} (dx^2) & 0 & 0 \\ 0 & (\gamma^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

(dy^2) verschwindet also in der That, womit der Satz bewiesen ist. Aus dem Lie'schen Satze folgt nun unmittelbar unter Berücksichtigung von (4):

Der Rang der algebraischen Haupttangencurve der Fläche, welche dem linearen Complex $F = \gamma x$ angehört, ist gleich:

$$12 pn (p + n - 2).$$

Es ist nun leicht, auch Ordnung und Classe dieser Curve zu bestimmen. Da alle Tangenten der Haupttangencurve dem linearen Complex angehören, so ist diese eine Complexcurve desselben. *Sie ist daher von gleicher Ordnung und Classe.* In der That ist es eine Eigenschaft aller Curven, deren Tangenten Gerade eines linearen Complexes sind, gleiche Ordnung und Classe zu besitzen. Es sei nämlich N die Ordnung der Complexcurve. In einer willkürlichen Ebene e liegen dann N Curvenpunkte. Die Schmiegungsebenen derselben sind aber Ebenen des linearen Complexes, gehen daher durch einen in e gelegenen Punkt, nämlich denjenigen, welcher durch den linearen Complex der Ebene e zugeordnet ist.

Betrachtet man jetzt die Haupttangencurve als von den Centren solcher Büschel gebildet, deren Strahlen zugleich Tangenten der Fläche und Linien des Complexes γ sind, so ergibt sich:

In jeder Ebene liegen so viel Punkte der Haupttangencurve als Tangenten der Fläche vorhanden sind, die dem linearen Complex angehören und einen Punkt der Haupttangencurve enthalten. Die Zahl dieser Punkte ist daher im Allgemeinen gleich der Classe des ebenen Schnittes der Fläche*), Ordnung und Classe der Haupttangencurve ist daher im Allgemeinen durch den Rang der Fläche gegeben, d. h. gleich

$$2 np (n + p - 1).$$

*) Es ist dabei zu beachten, dass die Zahl der Tangenten an die Schnittcurve von einem nicht willkürlich zu wählenden Punkte aus zu bestimmen ist. In besonderen Fällen kann daher die Ordnung der Haupttangencurve auch kleiner sein als die Classe des ebenen Schnittes.

Eine Complexcurve kann ferner im Allgemeinen keine stationären Ebenen enthalten. Denn es müssen dann drei consecutive Tangenten derselben in einer Ebene liegen, was vermöge der Erzeugung der Curve nur dann möglich ist, wenn sie zugleich durch einen Punkt gehen. Aus dem dualistischen Charakter der Complexcurve folgt dann, dass sie auch keine Spitzen enthält.

Insbesondere für den vorliegenden Fall kann man sich von der der letzteren Behauptung auf folgende Weise überzeugen. Auf jeder Erzeugenden x liegen zwei Punkte der Haupttangentialcurve, die Schnittpunkte von x mit den beiden Geraden y , welche durch die Gleichungen (1) und $\gamma y = 0$ bestimmt sind. Für eine Spitze der Haupttangentialcurve müssten jedenfalls diese beiden Punkte coincidiren, d. h. die Gleichungen eine Doppelwurzel y besitzen. Die letztere Bedingung führt auf

$$(\Omega : x \, dx \, d^2 x \, \gamma) = 0,$$

d. h. auf die singulären Erzeugenden der Fläche.

Wir weisen jetzt nach, dass die Haupttangentialcurve in den Cuspidalpunkten der Fläche stationäre Tangenten besitzt.

Dazu betrachten wir zunächst die Zahl der Punkte, welche die Haupttangentialcurve mit einer durch die Generatrix a gehenden Ebene e gemein hat. Bezeichnet ν den Grad der Fläche, d ihre Doppelcurve, so ist die in der Ebene e liegende Schnittcurve eine Curve $\nu - 1^{\text{er}}$ Ordnung mit $d - (n - 2)$ Doppelpunkten. Die Zahl der Tangenten, welche sich von dem auf a liegenden Centrum des in e befindlichen Strahlbüschels ziehen lassen, ist:

$$(\nu - 1)(\nu - 2) - 2d + 2(n - 2).$$

Rechnet man die beiden auf a liegenden Punkte der Haupttangentialcurve hinzu, so ist die Anzahl der Punkte derselben in der Ebene e

$$n(n - 1) - 2d,$$

wie es sein muss. Es sei jetzt a eine singuläre Erzeugende; die Schnittcurve berührt dieselbe im Cuspidalpunkte der Fläche. Es existiren daher in der Ebene e

$$(n - 1)(n - 2) - 2d + 2(n - 2) - 1 = n(n - 1) - 2d - 3$$

nicht auf a gelegene Punkte der Haupttangentialcurve.

Daher liegen auf a im Cuspidalpunkte drei zusammenfallende weitere Punkte derselben, d. h. die singuläre Erzeugende ist stationäre Tangente im Cuspidalpunkte.

Fällt endlich die schneidende Ebene e mit der parabolischen Ebene der Fläche zusammen, so ist die Schnittcurve vom $n - 2^{\text{ten}}$ Grade mit $d - 2(n - 2)$ Doppelpunkten, und berührt a im Cuspidalpunkte. Da ferner das Centrum des Strahlbüschels in der Ebene e mit dem letzteren zusammenfällt, so ist die Zahl der Tangenten an die Curve:

$$(n-2)(n-3) - 2d + 4(n-2) - 2 = n(n-1) - 2d - 4.$$

Die parabolische Ebene enthält daher vier zusammenfallende Punkte der Haupttangentencurve, sie ist Schmiegungsebene derselben.

Man kann diesen Betrachtungen noch die Bemerkung hinzufügen, dass auf einer Doppelerzeugenden 4 Punkte der Haupttangentencurve liegen. Für eine Rückkehrgeneratrix rücken dieselben paarweise zusammen, dieselbe ist Doppeltangente der fraglichen Curve.

Aus den angestellten Betrachtungen ergibt sich nun:

Die Haupttangentencurve besitzt $4np(n+p-2)$ stationäre Tangenten, welche mit den singulären Erzeugenden der Fläche zusammenfallen. Wir werden weiterhin zeigen, dass ausserdem noch andere stationäre Tangenten vorhanden sind.

Wir weisen jetzt nach, wie man die Ordnung und Classe der Haupttangentencurve auf analytischem Wege bestimmen kann.

Es sei x eine Erzeugende der Fläche, y eine ihr zugeordnete Haupttangente, für welche die Gleichungen (1) bestehen. Die Ebene xy ist dann zugleich die Schmiegungsebene der Haupttangentencurve, deren Tangente y ist. Ein willkürlicher Strahl des Büschels xy ist ferner $x + \lambda y$. Damit derselbe zwei willkürliche Gerade $a b$ schneide, müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_x + \lambda a_y &= 0, \\ b_x + \lambda b_y &= 0 \end{aligned}$$

bestehen. Aus denselben folgt:

$$(6) \quad a_x b_y - b_x a_y = 0.$$

Soll ausserdem y dem linearen Complexe $F = \gamma x$ angehören, so ist

$$(7) \quad \gamma y = 0.$$

Die Elimination der y aus den Gleichungen (1), (6), (7) liefert

$$(8) \quad (\Omega : x dx d^2x \gamma \quad a_x b - b_x a) = 0.$$

Zieht man von der siebenten Horizontal- oder Vertikalreihe der Determinante (8) die Summe der mit $x_1 x_2 \dots x_6$ multiplicirten ersten sechs analogen Reihen ab, so sondert sich aus (8) der Factor $(dx^2)(dx^2)$ aus, welcher den Forderungen des Problems fremd ist. Darnach geht (8) über in:

$$(9) \quad (\Omega : dx \gamma \quad a_x b - b_x a) = 0.$$

Man entfernt aus (9) endlich die Differentiale durch Multiplication mit Δ^2

$$\Delta = (dx \gamma \varphi \psi x k)$$

und erhält so:

der Determinante (4) ergibt sich durch Substitution der gehörigen Grössen unmittelbar zur Bestimmung des Ranges derjenigen Haupttangentencurve, welche dem Complexe $\alpha_x + \lambda \beta_x = 0$ angehört:

$$(12) \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha\psi & 0 & 0 & 0 & b\alpha \\ 0 & \beta^2 & \beta\psi & 0 & 0 & \lambda\beta^2 & b\beta \\ \alpha\psi & \beta\psi & \psi^2 & 0 & (p-1)U_3 & \Theta & b\psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V & 0 & b\alpha \\ 0 & 0 & (p-1)U_3 & V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\beta^2 & \Theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b\alpha & b\beta & b\psi & b\alpha & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dabei ist $\Theta = \alpha\psi + \lambda\beta\psi$ gesetzt. Wir schreiben (12) in der Form:

$$(13) \quad A_{11} U_3^2 (p-1)^2 + 2(p-1) U_3 V A_{12} + A_{22} V^2 = 0.$$

Man sieht nun sofort, dass $A_{11} = 0$, während

$$A_{12} \equiv (b\alpha) \lambda^2 (\beta^2) (\beta^2) (\alpha\psi) b\alpha.$$

Da auch $V \equiv (\alpha\psi)^2 (\beta^2)$, so sondert sich aus der Gleichung (13) der Factor $(\alpha\psi)^3$ aus, welcher sich auf die singulären Linien bezieht und der Frage fremd ist. *Der Rang der algebraischen Haupttangenten-curven ist daher:*

$$6p(p-1).$$

Um die Ordnung, respective Classe derselben zu bestimmen, sind in (10) die gehörigen Werthe zu substituiren. Es entsteht dann:

$$(14) \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha\psi & 0 & p_1 \\ 0 & \beta^2 & \beta\psi & \lambda\beta^2 & p_2 \\ \alpha\psi & \beta\psi & \psi^2 & \Theta & p_3 \\ 0 & \lambda\beta^2 & \Theta & 0 & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Aber aus dieser Gleichung sondert sich der lineare Factor p_1 ab. *Daher ist die Ordnung und Classe der Haupttangenten-curven gleich*

$$p(2p-1).$$

Man kann dies letztere Resultat auch geometrisch wie folgt begründen. Die ebene Schnittcurve der Fläche ist eine Curve 2^{ter} Ordnung mit zwei unendlich nahen p -fachen Punkten, also von der Classe $2p^2$. Eine Gerade des Strahlbüschels, mit dem Centrum O , welches der Complex $\alpha_x + \lambda\beta_x = 0$ in der Ebene der Schnittcurve bestimmt, berührt aber diese Curve in dem $p(+p)$ -fachen Punkte, es giebt also noch*)

*) Vgl. Cayley, Second Memoir on skew surfaces, otherwise scrolls Phil. Trans. 1864, p. 559. Ueber die Bezeichnung $p(+q)$ -facher Punkt vergl. daselbst p. 564, sowie Cremona, Theorie der Oberflächen S. 59.

$$2p^2 - p = p(2p - 1)$$

weitere Tangenten, welche von O auslaufen, auf denen je ein Punkt der durch $\alpha_x + \lambda\beta_x = 0$ bestimmten Haupttangenteurve liegt.

Wir fügen endlich noch die Bemerkung hinzu, dass die Haupttangenteurven dieser speciellen windschiefen Flächen in den Cuspidalpunkten derselben keine stationären Tangenten haben. Die Schmiegungebenen der Haupttangenteurve nämlich, welche durch einen auf α gelegenen Punkt A hindurchgehen, erhält man durch die Schnittpunkte der durch A gehenden durch den betreffenden Complex zugeordneten Ebene, welche den Strahl α in sich enthält. Die $2p(p-1)$ auf α liegenden Cuspidalpunkte der Fläche, durch welche jede Haupttangenteurve hindurchgeht, müssen also als Punkte zählen, in denen dieselbe wirkliche Schmiegungebenen besitzt.

Die Zahl der anderweitigen stationären Tangenten der Haupttangenteurve werden wir im folgenden § bestimmen.

Wir schliessen hieran die folgende Betrachtung. Wenn eine windschiefe Fläche einem linearen Complex nicht angehört, so besitzt sie nur $2mnp$ discrete Tangentenebenen, welche einem willkürlichen linearen Complex angehören, d. h. für welche jede durch den Berührungspunkt gezogene Flächentangente zugleich Complexgerade ist. Ein Büschel linearer Complex giebt erst wieder zu einer Curve auf der Fläche Veranlassung, deren Punkte die Berührungspunkte solcher Ebenen sind, die Complexen derselben in dem eben bezeichneten Sinne angehören. Es ist leicht, die Ordnung einer derartigen Curve zu bestimmen.

Es sei das Büschel linearer Complex

$$(15) \quad \alpha_x + \lambda\beta_x = 0.$$

Damit die Erzeugende x und die ihr zugehörige Haupttangente y Geraden eines der Complex (15) seien, muss

$$\begin{aligned} \alpha_x + \lambda\beta_x &= 0, \\ \alpha_y + \lambda\beta_y &= 0 \end{aligned}$$

sein. Daraus folgt wieder Gleichung (6). Damit ferner ein willkürlicher Strahl des Büschels (xy) die beiden beliebigen Geraden a, β schneide, ist

$$(16) \quad \alpha_x\beta_y - \alpha_y\beta_x = 0$$

zu setzen. Die Elimination der y aus (1), (6), (16) liefert die Relation:

$$(\Omega : x \, dx \, d^2x \, b_x a - a_x b \, \beta \, \alpha - \alpha_x \beta) = 0,$$

oder

$$(\Omega : dx \, b_x a - a_x b \, \beta \, \alpha - \alpha \, \beta) = 0,$$

oder endlich durch Multiplication mit Δ^2 :

$$(17) \quad \begin{vmatrix} f^2 & f\varphi & f\psi & p_1 & q_1 \\ f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi & p_2 & q_2 \\ f\psi & \varphi\psi & \psi^2 & p_3 & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 \\ q_1 & q_2 & q_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

wo

$$(18) \quad \begin{cases} p_1 = b_x a_f - a_x b_f, & q_1 = \beta_x \alpha_f - \alpha_x \beta_f, \\ p_2 = b_x a_\varphi - a_x b_\varphi, & q_2 = \beta_x \alpha_\varphi - \alpha_x \beta_\varphi, \\ p_3 = b_x a_\psi - a_x b_\psi, & q_3 = \beta_x \alpha_\psi - \alpha_x \beta_\psi. \end{cases}$$

Die Determinante (17) ist daher vom Grade 2 ($m + n + p - 1$) und liefert als Grad der fraglichen Curve

$$2 m n p (m + n + p - 1).$$

VI.

Die Curve vierpunktiger Berührung auf den windschiefen Flächen.

Eine jede windschiefe Fläche besitzt eine Curve vierpunktiger Berührung, welche, soviel mir bekannt, bisher nicht Gegenstand der Untersuchung gewesen ist. Je vier consecutive Erzeugende bestimmen zwei Gerade, welche sie schneiden, d. h. zwei im Allgemeinen discrete vierpunktige Tangenten, und damit zwei Punkte der Curve. Wenn dieselben coincidiren, so berührt die Curve die betreffende Erzeugende. Wir werden im Folgenden den Grad derselben, sowie die Zahl ihrer Berührungen mit den Erzeugenden bestimmen und dabei diejenigen Eliminationen vollständig durchführen, zu denen dieses Problem Veranlassung giebt.

Eine Gerade y , welche vier consecutive Erzeugende

$$x, \quad x + dx, \quad x + 2 dx + d^2 x, \quad x + 3 dx + 3 d^2 x + d^3 x$$

schneidet, erfüllt die Bedingungen:

$$0 = \langle yx \rangle, \quad 0 = \langle ydx \rangle, \quad 0 = \langle yd^2 x \rangle, \quad 0 = \langle yd^3 x \rangle, \quad 0 = \langle y^2 \rangle.$$

Sie bestimmt mit x zwei ebene Strahlbüschel $y + \lambda x$. Verlangt man, dass ein Strahl derselben zwei willkürliche Gerade schneide, welche wir b, a nennen, so ist

$$(a_y b_x - b_x a_y) = 0.$$

Die Elimination der y liefert die Gleichung:

$$(\Omega : x dx d^2 x d^3 x \quad a_x b - b_x a) = 0.$$

Aus derselben sind die Differentiale zu eliminiren. Es gelingt dies für die ersten und zweiten Differentiale $dx, d^2 x$ sofort durch Multiplikation mit Δ^2 , wobei sich wie oben Δ^2 wieder als Factor aussondert.

-Zugleich wird dabei der unwesentliche Factor $(kx)^4$ entfernt, dessen Coefficienten k die homogenen Differentiale verbinden, so dass

$$\begin{aligned} k dx &= 0, \\ k d^2 x &= 0, \\ k d^3 x &= 0. \end{aligned}$$

Man erhält so in Rücksicht auf II. (10):

$$(1) \quad \begin{vmatrix} f^2 & f\varphi & f\psi & 0 & (m-1)U_1 & f d^3 x & p_1 \\ f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi & 0 & (n-1)U_2 & \varphi d^3 x & p_2 \\ f\psi & \varphi\psi & \psi^2 & 0 & (p-1)U_3 & \psi d^3 x & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V & x d^3 x & 0 \\ (m-1)U_1 & (n-1)U_2 & (p-1)U_3 & V & 0 & 0 & 0 \\ f d^3 x & \varphi d^3 x & \psi d^3 x & x d^3 x & 0 & 0 & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die p_1, p_2, p_3 haben dabei die in I. (18) angegebene Bedeutung. Um nun aus (1) noch die dritten Differentiale zu entfernen, verfahren wir folgendermassen. Zunächst ergibt sich durch Differentiation der Gleichungen II. (10):

$$(2) \quad \begin{cases} f_i d^3 x_i + (m-1) f_{ik} dx_k d^2 x_i = (m-1) (kx)^2 \frac{\partial U_1}{\partial x_i} dx_i, \\ \varphi_i d^3 x_i + (n-1) \varphi_{ik} dx_k d^2 x_i = (n-1) (kx)^2 \frac{\partial U_2}{\partial x_i} dx_i, \\ \psi_i d^3 x_i + (p-1) \psi_{ik} dx_k d^2 x_i = (p-1) (kx)^2 \frac{\partial U_3}{\partial x_i} dx_i. \end{cases}$$

Ferner ist

$$(3) \quad \begin{cases} (x d^3 x) = -3 (dx d^2 x), \\ 2 (dx d^2 x) = - (kx)^2 \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i. \end{cases}$$

Um aus (2) noch die zweiten Differentiale zu entfernen, setzen wir:

$$(4) \quad \begin{cases} f_{ik} dx_k dx_i^2 = \Pi_1, \\ f_i d^2 x_i = (m-1) U_1 (kx)^2, \\ \varphi_i d^2 x_i = (n-1) U_2 (kx)^2, \\ \psi_i d^2 x_i = (p-1) U_3 (kx)^2, \\ x_i d^2 x_i = (kx)^2 V, \\ k_i d^2 x_i = 0, \\ dx_i d^2 x_i = \Sigma. \end{cases}$$

Die Determinante der sieben Gleichungen (4) muss verschwinden. Wir schreiben sie in der Gestalt:

$$(5) \quad -\Pi_1 A_1 - A_2 (kx)^2 - (kx)^2 V A_3 - \Sigma A_4 = 0.$$

Die Grössen A haben in (5) die folgenden Werthe. Die Unterdeterminante A_1 ist offenbar gleich $-(dx^2) = (kx)^2 V$. Der Werth von A_2 ist gegeben durch:

$$A_2 = \begin{vmatrix} f_{ik} dx_k & 0 \\ f_i & (m-1) U_1 \\ \varphi_i & (n-1) U_2 \\ \psi_i & (p-1) U_3 \\ x_i & 0 \\ k_i & 0 \\ dx_i & 0 \end{vmatrix}.$$

In der Determinante rechts ist dabei von den sechs ersten nur die Vertikalreihe mit dem Index i hingeschrieben. Man erhält nun sofort:

$$\Delta A_2 = \begin{vmatrix} -U_1 (kx)^2 & f_{ik} dx_k & \varphi_i f_{ik} dx_k & \psi_i f_{ik} dx_k & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & f^2 & f\varphi & f\psi & 0 & fk & (m-1) U_1 \\ 0 & f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi & 0 & \varphi k & (n-1) U_2 \\ 0 & f\psi & \varphi\psi & \psi^2 & 0 & \psi k & (p-1) U_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & kx & 0 \\ 0 & kf & k\varphi & k\psi & kx & k^2 & 0 \\ (dx)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$a_1 = f_{ik} dx_k k_k.$$

Darnach ist:

$$A_2 \Delta = -\Delta (kx)^2 \begin{vmatrix} f_{ik} dx_k & \varphi_i f_{ik} dx_k & \psi_i f_{ik} dx_k & 0 \\ f^2 & f\varphi & f\psi & (m-1) U_1 \\ f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi & (n-1) U_2 \\ f\psi & \varphi\psi & \psi^2 & (p-1) U_3 \end{vmatrix}.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$(6) \quad A_2 = -(kx)^2 \Omega'_k dx_k,$$

so besteht, wie man sofort aus der Betrachtung von $\Omega'_k dx_k$ ersieht, die Beziehung:

$$(7) \quad \Omega'_k x_k = (m-1) U_1 V.$$

Es ist ferner:

$$(8) \quad A_4 = f_{ik} dx_i dx_k = -(kx)^2 U_1.$$

Endlich hat man:

$$A_3 = (kx)^2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} & \varphi_1 & \psi_1 & x_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} & \varphi_2 & \psi_2 & x_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & f_{35} & f_{36} & \varphi_3 & \psi_3 & x_3 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} & \varphi_4 & \psi_4 & x_4 \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55} & f_{56} & \varphi_5 & \psi_5 & x_5 \\ f_{61} & f_{62} & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} & \varphi_6 & \psi_6 & x_6 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & \varphi_5 & \varphi_6 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 & \psi_5 & \psi_6 & 0 & 0 & 0 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 & dx_5 & dx_6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Setzt man daher:

$$(9) \quad A_3 = (kx)^2 \Theta'_i dx_i,$$

so ist

$$(10) \quad U_1 = \Theta'_i x_i.$$

Aus der Gleichung (5), welche jetzt die folgende Gestalt angenommen hat:

$$\Pi' V = \Sigma U_1 - (kx)^2 V (\Theta'_i dx_i) + (kx)^2 (\Omega'_k dx_k),$$

hat man nun für die erste der Gleichungen (2) den folgenden Ausdruck:

$$(11) \quad \frac{V}{(m-1)} f_i d^3 x_i = - \Sigma U_1 + (kx)^2 V (\Theta'_i dx_i) - (kx)^2 (\Omega'_k dx_k) + (kx)^2 V \frac{\partial U_1}{\partial x_i} dx_i,$$

und dem analog:

$$\frac{V}{(n-1)} \varphi_i d^3 x_i = - \Sigma U_2 + (kx)^2 (\Theta''_i dx_i) V - (kx)^2 (\Omega''_k dx_k) + (kx)^2 V \frac{\partial U_2}{\partial x_i} dx_i,$$

$$\frac{V}{(p-1)} \psi_i d^3 x_i = - \Sigma U_3 + (kx)^2 (\Theta'''_i dx_i) V - (kx)^2 (\Omega'''_k dx_k) + (kx)^2 V \frac{\partial U_3}{\partial x_i} dx_i.$$

Dabei bedeuten Θ'' , Θ''' , Ω'' , Ω''' diejenigen Ausdrücke, in welche Θ' , Ω' durch Vertauschung von f mit φ , respective ψ übergehen.

Man hat daher ferner:

$$\frac{V}{(kx)^2} \left(\frac{U_2}{m-1} f_i d^3 x_i - \frac{U_1}{n-1} \varphi_i d^3 x_i \right) = - V \left| \begin{array}{c} U_1 \Theta'_i dx_i \\ U_2 \Theta''_i dx_i \end{array} \right| - \left| \begin{array}{c} U_1 (V \frac{\partial U_1}{\partial x_i} - \Omega'_i) dx_i \\ U_2 (V \frac{\partial U_2}{\partial x_i} - \Omega''_i) dx_i \end{array} \right|$$

In dieser Gleichung ist nach II. (7) und VI. (10):

$$\left| \begin{array}{c} U_1, \Theta'_i dx_i \\ U_2, \Theta''_i dx_i \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \Theta'_i x_i, \Theta'_i dx_i \\ \Theta''_i x_i, \Theta''_i dx_i \end{array} \right| = - (kx) (f \varphi \psi x \Theta' \Theta'').$$

Es ist ferner:

$$[2(m+n+p) - 7] U_1 V = V \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} x_i \right) - (m-1) U_1 V.$$

Sonach mit Berücksichtigung von II. (7) und VI. (7):

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{c} U_1 \left(V \frac{\partial U_1}{\partial x_i} - \Omega'_i \right) dx_i \\ U_2 \left(V \frac{\partial U_2}{\partial x_i} - \Omega''_i \right) dx_i \end{array} \right| &= \frac{1}{2(m+n+p)-7} \frac{1}{V} \left| \begin{array}{c} \left(V \frac{\partial U_1}{\partial x_i} - \Omega'_i \right) x_i \left(V \frac{\partial U_1}{\partial x_i} - \Omega'_i \right) dx_i \\ \left(V \frac{\partial U_2}{\partial x_i} - \Omega''_i \right) x_i \left(V \frac{\partial U_2}{\partial x_i} - \Omega''_i \right) dx_i \end{array} \right| \\ &= \frac{-(kx)}{V(2(m+n+p)-7)} \left(f \varphi \psi x V \frac{\partial U_1}{\partial x} - \Omega' V \frac{\partial U_2}{\partial x} - \Omega'' \right). \end{aligned}$$

Wir haben demnach endlich die folgenden Gleichungen:

$$(12) \left\{ \begin{aligned} & \frac{(n-1) U_2 f_i d^3 x_i - (m-1) U_1 \varphi_i d^3 x_i}{(n-1)(m-1)(kx)^3} \\ &= (f, \varphi, \psi, x, \Theta', \Theta'') + \frac{1}{V^2} \frac{1}{2(m+n+p)-7} \left(f, \varphi, \psi, x, V \frac{\partial U_1}{\partial x} - \Omega', V \frac{\partial U_2}{\partial x} - \Omega'' \right), \\ & \frac{(m-1) U_1 \psi_i d^3 x_i - (p-1) U_3 f_i d^3 x_i}{(m-1)(p-1)(kx)^3} \\ &= (f, \varphi, \psi, x, \Theta''', \Theta') + \frac{1}{V^2} \frac{1}{2(m+n+p)-7} \left(f, \varphi, \psi, x, V \frac{\partial U_3}{\partial x} - \Omega''', V \frac{\partial U_1}{\partial x} - \Omega' \right), \\ & \frac{(p-1) U_3 \varphi_i d^3 x_i - (n-1) U_2 \psi_i d^3 x_i}{(p-1)(n-1)(kx)^3} \\ &= (f, \varphi, \psi, x, \Theta'', \Theta''') + \frac{1}{V^2} \frac{1}{2(m+n+p)-7} \left(f, \varphi, \psi, x, V \frac{\partial U_2}{\partial x} - \Omega'', V \frac{\partial U_3}{\partial x} - \Omega''' \right). \end{aligned} \right.$$

Stellt man dagegen zu der Gleichung (11) noch den folgenden Ausdruck:

$$(13) \quad x_i d^3 x_i = -\Sigma + \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i,$$

so ist

$$\begin{aligned} \frac{V f_i d^3 x_i - (m-1) U_1 (x_i d^3 x_i)}{(kx)^2 (n-1)} &= \left(V \Theta'_i - \Omega'_i + V \frac{\partial U_1}{\partial x_i} \right) dx_i - dx_i \frac{\partial V}{\partial x_i} U_1 \\ &= \left| \begin{array}{c} V \quad \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i \\ U_1 \left(\Theta'_i + \frac{\partial U_1}{\partial x_i} - \frac{\Omega'_i}{V} \right) dx_i \end{array} \right|. \end{aligned}$$

Schreibt man die letzte Determinante endlich in der Gestalt:

$$\frac{1}{2(m+n+p)-3} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial V}{\partial x_i} x_i & \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i \\ \left(\Theta'_i + \frac{\partial U_1}{\partial x_i} - \frac{\Omega'_i}{V} \right) x_i & \left(\Theta'_i + \frac{\partial U_1}{\partial x_i} - \frac{\Omega'_i}{V} \right) dx_i \end{array} \right|,$$

so ergibt sich:

$$14) \left\{ \begin{aligned} & \frac{V f_i d^3 x_i - m - 1 U_1(x_i d^3 x_i)}{(kx)^3 (m-1)} \\ & \quad = \frac{-1}{2(m+n+p)-3} \left(f \varphi \psi x \frac{\partial V}{\partial x_i}, \Theta'_i + \frac{\partial U_1}{\partial x_i} - \frac{\Omega'_i}{V} \right), \\ & \frac{V \varphi_i d^3 x_i - n - 1 U_2(x_i d^3 x_i)}{(kx)^3 (n-1)} \\ & \quad = \frac{-1}{2(m+n+p)-3} \left(f \varphi \psi x \frac{\partial V}{\partial x_i}, \Theta''_i + \frac{\partial U_2}{\partial x_i} - \frac{\Omega''_i}{V} \right), \\ & \frac{V \psi_i d^3 x_i - p - 1 U_3(x_i d^3 x_i)}{(kx)^3 (p-1)} \\ & \quad = \frac{-1}{2(m+n+p)-3} \left(f \varphi \psi x \frac{\partial V}{\partial x_i}, \Theta'''_i + \frac{\partial U_3}{\partial x_i} - \frac{\Omega'''_i}{V} \right). \end{aligned} \right.$$

Die Ausdrücke rechterhand in den Gleichungen (14) enthalten, wie noch bemerkt werden mag, nur scheinbar den Nenner V . Denn die Determinante

$$(f \varphi \psi x \Omega'_i \frac{\partial V}{\partial x_i})$$

enthält selbst als Factor V , wie sich z. B. sofort zeigt, wenn man sie aufs Quadrat erhebt.

Die Gleichungen (14), (12) stellen alle Unterdeterminanten, welche aus den Gliedern der beiden vorletzten Reihen von (1) gebildet werden können, vollständig von den Differentialen und unwesentlichen Factoren (kx) befreit vor. In der Determinantengleichung (1) kommen übrigens nur die einfacheren Verbindungen, welche durch (14) ausgedrückt sind, vor.

Die Determinante (1) stellt demnach einen Complex vom Grade

$$2 [6(m+n+p) - 19]$$

vor, welcher die windschiefe Fläche in

$$4 m n p (6(m+n+p) - 19)$$

Erzeugenden trifft. Nach unseren früheren Erörterungen ist die Hälfte dieser Zahl der Grad der Curve der vierpunktigen Berührung.

Man erhält dagegen die Zahl der vierpunktig berührenden Tangenten, welche eine willkürliche Gerade z schneiden, wenn man in der Determinante (1) die letzte Horizontal- und Verticalreihe durch $z f \ z \varphi \ z \psi \ z x$ ersetzt. Daraus entnehmen wir den Satz:

Der Grad der von den vierpunktigen Tangenten gebildeten Linienfläche ist gleich

$$4 m n p (6(m+n+p) - 19).$$

Dieselbe hat mit der ursprünglichen Fläche die Curve der vierpunktigen Berührung gemein, welche als Durchschnittcurve vierfach zu zählen ist. Beide Flächen schneiden sich im Allgemeinen in einer zweiten Curve.

Ersetzt man in der Determinante (1) die letzte Horizontal- und Verticalreihe durch $zf\ z\varphi\ z\psi\ zx$, so stellt dieselbe nach II. zugleich das Product der Gleichungen $y'z = 0$, $y''z = 0$ der beiden speciellen linearen Complexe vor, deren Axen die beiden vierpunktigen Tangenten y' , y'' sind. Diese Linien werden daher coincidiren, wenn der Kern der Determinante (1) verschwindet. Derselbe stellt einen Complex vom Grade

$$4 [3 (m + n + p) - 10]$$

vor. Die Curve vierpunktiger Berührung besitzt also

$$8\ mnp [3 (m + n + p) - 10]$$

Punkte, in denen sie von einer Erzeugenden der Fläche berührt wird,

Es kann übrigens Linienflächen geben, für welche jede Erzeugende zwei zusammenfallende vierpunktige Tangenten besitzt. Solche Flächen genügen einer partiellen Differentialgleichung, zu deren vollständiger Darstellung die Gleichungen (14) ausreichen. Dieselbe ist nämlich, wenn die Ausdrücke rechterhand in (14) mit R_1 , R_2 , R_3 , die Unterdeterminanten der Determinante V mit A_{ik} bezeichnet werden:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} \varphi^2 & \varphi\psi \\ \varphi\psi & \psi^2 \end{vmatrix} \text{ u. s. w.}$$

$$(15) \quad \Sigma R_i R_k A_{ik} \equiv 0.$$

Das Geschlecht der Curve vierpunktiger Berührung ist in diesem Falle gleich dem der Fläche.

Wir zeigen jetzt, wie sich mit Hülfe der gewonnenen Zahlen die Zahl der stationären Tangenten einer algebraischen Haupttangenten-curve der Fläche vollständig bestimmen lässt.

Wenn nämlich die Fläche einem linearen Complexe Ψ angehört, so kann man nach denjenigen Erzeugenden fragen, für welche eine der vierpunktigen Tangenten Gerade desselben ist. Je zwei Tangenten dieser Art sind aber conjugirte Polaren in Bezug auf den linearen Complex, sie coincidiren daher in dem Falle, wo eine von ihnen zur Complexgeraden wird. In den $8\ m\ n\ (3\ (m + n) - 7)$ Berührungspunkten der Curve vierpunktiger Berührung mit den Erzeugenden der Fläche gehören demnach die vierpunktigen Tangenten dem linearen Complexe an. Aber diese vierpunktigen Tangenten sind dann zugleich Elemente der algebraischen Haupttangenten-curve, welche durch den linearen Complex bestimmt ist, d. h. stationäre Tangenten derselben. Bezeichnet man daher durch R , M , N , Ω Rang, Ordnung, Classe, Zahl der stationären Tangenten der Curve, so gelten die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned}
 R &= 12 mn (m + n - 2), \\
 M &= N = 2 mn (m + n - 1), \\
 \Omega &= 8 mn (3 (m + n) - 7) + 4 mn (m + n - 2) \\
 &= 9 mn (7 (m + n) - 16).
 \end{aligned}$$

Die Haupttangencurve schneidet dabei, wie sich sofort aus dem unter I. (1) entwickelten Satze ergibt, jede Erzeugende in zwei Punkten, welche harmonisch liegen zu den beiden auf der letzteren befindlichen Punkten der Curve vierpunktiger Berührung. Aus den von Zeuthen und Cayley entwickelten Formeln*):

$$\begin{aligned}
 R &= M(M - 1) - 2h, \\
 M &= R(R - 1) - 2y - 3N - 3\Omega, \\
 N + \Omega &= 3(R - M), \\
 R &= N(N - 1) - 2g, \\
 N &= R(R - 1) - 2x - 3M - 3\Omega
 \end{aligned}$$

für die Singularitäten einer Raumcurve erhält man mit Benutzung der gegebenen Werthe die Zahlen h, y, g, x . Die dritte Formel ist übrigens eine Identität, eine Bemerkung, die als Controle der vorhergehenden Betrachtungen dienen kann. Insbesondere ist das Geschlecht der Haupttangencurve

$$\begin{aligned}
 P &= 2 mn [2(m + n) - 5] + 1 \\
 &= 4 P' + 2 mn.
 \end{aligned}$$

wo P' das Geschlecht der Fläche.

Wenn eine Fläche, für welche die partielle Differentialgleichung (15) besteht, einem linearen Complex angehört, so sind alle vierpunktigen Tangenten Geraden des letzteren. Aber sie bilden zugleich stationäre Tangenten einer Haupttangencurve. Die Curve vierpunktiger Berührung reducirt sich dann auf eine gerade Linie, während ausserdem noch eine krumme algebraische Haupttangencurve vorhanden ist.

VII.

Ueber die vierpunktigen Tangenten specieller windschiefer Flächen.

Wenn die Fläche einem speciellen Complex $F = \gamma x$ angehört, so besitzt sie eine np -fache Leitlinie. Von den Cuspidalpunkten der Fläche liegen $2np(n + p - 2)$ auf dieser Leitlinie, während die $2np(n + p - 2)$ anderen der krummen Doppelcurve angehören, welche

*) Vgl. Bulletin des Sc. Math. 1870, p. 150; Cremona, Theorie der Oberflächen S. 10 ff.

die Fläche besitzt. Den Grad der letzteren erhält man, wenn man von dem Totalgrad der Doppelcurven

$$np [2 np - (n + p)]$$

die für $\frac{np(np-1)}{2}$ Doppelgerade zählende Leitlinie abzieht. Der Grad der eigentlichen Doppelcurve ist daher

$$\frac{np}{2} [3 np - 2 (n + p) + 1].$$

Da in einer beliebigen, durch die Leitlinie γ gelegten Ebene nur $\frac{np}{2}(np-1)$ nicht auf der ersteren gelegene Punkte dieser Curve vorhanden sind, so erhält man als Zahl der Punkte, welche die Doppelcurve mit der Leitlinie gemein hat,

$$np [np - (n + p) + 1].$$

Die Leitlinie zählt zugleich np -fach als Curve vierpunktiger Berührung. Den Beweis dafür kann man aus dem Umstande entnehmen, dass die Determinante VI. (1), für $f = \gamma x$, $(\gamma^2) = 0$ den Factor $a_x b_\gamma - b_x a_\gamma = p$ absondert, welcher sich auf die Leitlinie bezieht. Hiernach ergibt sich als Grad der eigentlichen Curve vierpunktiger Berührung

$$3 np [4 (n + p) - 9].$$

Wir bestimmen endlich noch die Zahl der Punkte, in denen diese Curve der Leitlinie begegnet. Da in jeder durch die Leitlinie gelegten Ebene np Erzeugenden also auch np Punkte der Curve liegen, die nicht auf der Axe gelegen sind, so muss die Curve mit der letzteren $4 np (3(p+n) - 7)$ Punkte gemein haben. Man überzeugt sich davon auch auf folgende Weise. Die Punkte, in denen die Curve der Leitlinie begegnet, sind offenbar auf solchen Erzeugenden gelegen, für welche die beiden vierpunktigen Tangenten coincidiren. Die Bedingung dieser Coincidenz ist aber das Verschwinden des Kerns der Determinante (1), welcher nach einfacher Reduction die Form

$$\begin{vmatrix} \gamma\varphi & \gamma\psi & 0 \\ (m-1)U_2 & (p-1)U_3 & V \\ \varphi d^3x & \psi d^3x & x d^3x \end{vmatrix} = 0$$

annimmt. Dieser Ausdruck repräsentirt einen Complex vom Grade $6(n+p) - 14$, welcher mit den drei erzeugenden Complexen $4np(3(n+p) - 7)$ Erzeugende der Fläche bestimmt, für welche ein Punkt der eigentlichen Curve vierpunktiger Berührung auf der Leitlinie liegt.

Wir betrachten jetzt den Fall, wo unter den erzeugenden Complexen sich zwei specielle lineare $\alpha_x \beta_x$ befinden, deren Axen sich nicht schneiden. Alsdann kann offenbar ausser den beiden p -fach zählenden Leitlinien α, β , welche die Fläche besitzt, keine eigentliche Curve vier-

punktiger Berührung vorhanden sein. Dies ergibt sich auch aus der Betrachtung der Determinante VI. (1), welche sich auf

$$\begin{vmatrix} \psi d^2 x & \psi d^3 x \\ x d^2 x & x d^3 x \end{vmatrix}^2 (\alpha \beta) (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha) (a_x b_\beta - b_x a_\beta) = 0$$

reducirt, weil U_1 , U_2 , $f d^3 x$, $\varphi d^3 x$ sämmtlich verschwinden. Die beiden Factoren

$$\begin{aligned} a_x b_\alpha - b_x a_\alpha &= 0, \\ a_x b_\beta - b_x a_\beta &= 0 \end{aligned}$$

beziehen sich auf die beiden Leitlinien, welche als Curven vierpunktiger Berührung ebenfalls p -fach zählen.

Der Factor

$$\begin{vmatrix} \psi d^2 x & \psi d^3 x \\ x d^2 x & x d^3 x \end{vmatrix}$$

gleich Null gesetzt, führt dagegen auf eine sehr merkwürdige Singularität dieser Classe von windschiefen Flächen. Da er nämlich die willkürlichen Grössen b , a gar nicht enthält, so liefert er eine Zahl besonderer Erzeugenden, welche unendlich viele vierpunktige Tangenten besitzen, deren drei consecutive Erzeugende also so gelegen sind, wie die Erzeugenden ein und derselben Art eines Hyperboloides. Solche Erzeugende mögen in Ermangelung einer passenderen Benennung als *hyperbolische Erzeugende* bezeichnet werden. Die Gleichungen (14) liefern dann die vollständige Darstellung dieses Factors in der Form:

$$(\alpha \beta \psi x \frac{\partial V}{\partial x} \Theta^3 + \frac{\partial U_3}{\partial x} - \frac{\Omega^3}{V}) = 0.$$

Derselbe stellt einen Complex vom Grade $2(3p-4)$ vor. Die Anzahl der hyperbolischen Erzeugenden der Linienfläche mit zwei discreten windschiefen p -fachen Leitlinien ist daher

$$4p(3p-4).$$

Die Singularitäten der algebraischen Haupttangentialcurven der Fläche ergeben sich ohne weiteres aus den am Schlusse von § VI. angegebenen Formeln, wenn in denselben etwa $n=p$, $m=1$ gesetzt wird. Jede Haupttangentialcurve hat zwei stationäre Tangenten in den beiden (zu den Leitlinien harmonisch liegenden) Punkten, in denen sie einer hyperbolischen Erzeugenden begegnet.

Wir haben endlich noch den Fall zu berücksichtigen, dass die windschiefe Fläche einem speciellen linearen α_x und dem linearen Complexe β_x angehört, während $(\beta\alpha)=0$ ist. Der Complex, welcher die hyperbolischen Erzeugenden bestimmt, enthält dann den unwesentlichen Factor $(\alpha\psi)$. Die Zahl der hyperbolischen Erzeugenden ist daher

$$2p(5p-7).$$

Da ferner jede der algebraischen Haupttangenten den Erzeugenden nur in einem Punkte begegnet, so hat man für die Singularitäten derselben die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} R &= 6p(p-1), \\ M &= N = p(2p-1), \\ \Omega &= 2p(5p-7), \\ R - 2P &= 2(M-1), \quad P = p^2 - 2p + 1. \end{aligned}$$

Das Geschlecht der Haupttangencurve muss mit dem Geschlechte der windschiefen Fläche identisch sein. In der That erhält man aus § III.:

$$P' = p^2 - 2p + 1 = P.$$

Diese Curven besitzen daher $\frac{1}{2}p(p-1)(4p^2-7)$ scheinbare Doppelpunkte u. s. w.

Man kann übrigens die Gleichung für die hyperbolischen Erzeugenden auch direct aufstellen. Damit überhaupt vier consecutive Erzeugende einem Hyperboloid, d. h. drei linearen Complexen angehören, müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned} cx &= 0, \\ cdx &= 0, \\ cd^2x &= 0, \\ cd^3x &= 0 \end{aligned}$$

drei wesentlich verschiedene Lösungen für die Coefficienten c zulassen. Dazu aber ist erforderlich das Bestehen der 6 Gleichungen

$$\mu_1 x_i + \mu_2 dx_i + \mu_3 d^2x_i + \mu_4 d^3x_i = 0$$

mit vier homogenen Unbekannten μ . Es müssen also zwischen den x drei wesentlich verschiedene Identitäten bestehen. Wenn nun die Fläche den Complexen $\alpha_x \beta_x$ angehört, so sind zwei derselben durch $\alpha_x = 0$, $\beta_x = 0$ selbst vertreten. Multiplicirt man endlich die sechs Gleichungen mit ψ_i und summirt jedesmal nach i , so ergibt sich

$$\mu_3 \psi d^2x + \mu_4 \psi d^3x = 0.$$

Dagegen durch Multiplication mit x_i

$$\mu_3 x d^2x + \mu_4 x d^3x = 0.$$

Die einzige erforderliche dritte Identität ist daher das Verschwinden der Determinante der letzteren beiden Gleichungen, welche mit dem obigen Ausdrücke identisch ist. Zugleich ist ersichtlich, dass diese Art von Erzeugenden im Allgemeinen nur bei den Flächen, welche zwei linearen Complexen angehören, auftritt. Für eine beliebige windschiefe Fläche, welche durch den Schnitt von $F \Phi \Psi$ gebildet wird, würde das Verschwinden der sämtlichen Partialdeterminanten des Systemes

$$\begin{vmatrix} f d^2 x & \varphi d^2 x & \psi d^2 x & x d^2 x \\ f d^3 x & \varphi d^3 x & \psi d^3 x & x d^3 x \end{vmatrix}$$

erforderlich sein. Die äquivalenten Ausdrücke für diese Unterdeterminanten sind im § VI. vollständig gegeben.

VIII.

Ueber ein Problem aus der Theorie der Raumcurven.

Die Einführung und Elimination höherer homogener Differentiale, wie wir sie im § VI. durchgeführt haben, hat man bisher, wo die letzteren den zweiten Grad überstiegen, meist zu vermeiden gesucht und an Stelle derselben andere Differentiale eingeführt, welche nur vom ersten oder zweiten Grade sind. In der letzteren Weise ist z. B. von Clebsch ein Problem behandelt worden*), welches mit dem in § VI. entwickelten eine gewisse Verwandtschaft besitzt, die Bestimmung der Gleichung derjenigen Fläche, welche die vollständige Schnittcurve zweier Flächen $F = 0$, $\Phi = 0$ vom m^{ten} und n^{ten} Grade in den Wendungspunkten dieser Curve trifft. Aber dieser Weg führt bei unserem liniengeometrischen Problem zu keinem Resultate, weil die Curve vierpunktiger Berührung nicht eindeutig auf die Erzeugenden der Fläche bezogen werden kann. Es scheint daher nöthig, die höheren Differentiale beizubehalten. Man kann nun auch die Frage nach den Wendungspunkten einer Raumcurve in einer ganz ähnlichen Weise behandeln, d. h. sich die Aufgabe stellen, aus der Determinante

$$(1) \quad \Delta = (x \, dx \, d^2 x \, d^3 x) = 0,$$

welche für einen Inflexionspunkt verschwindet, die Differentiale zu eliminiren. Das Resultat ist dann die Gleichung der gesuchten Fläche. Es mag gestattet sein, den Verlauf dieses Eliminationsprocesses zur Veranschaulichung der Rechnungen in § VI. hier noch auszuführen.

Zunächst gelten die Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} F = 0, & \Phi = 0, \\ f_i dx_i = 0, & \varphi_i dx_i = 0, \\ f_i d^2 x_i + (m-1) f_{ik} dx_i dx_k = 0, & \varphi_i d^2 x_i + (n-1) \varphi_{ik} dx_i dx_k = 0, \\ k_i dx_i = 0, & k_i d^2 x_i = 0, & k_i d^3 x_i = 0. \end{cases}$$

Wir setzen ferner

$$(3) \quad \begin{cases} (dx \, f \, \varphi \, k) = (dx^2) = \Delta'', \\ (f \, \varphi \, x \, dx) = \Delta'. \end{cases}$$

Dabei gilt dann die Beziehung

$$\Delta' \Delta'' = - (dx^2) (kx) \begin{vmatrix} f^2 & f\varphi \\ f\varphi & \varphi^2 \end{vmatrix}.$$

*) Crelle's Journal Bd. 63, S. 1.

Setzt man daher

$$V = \begin{vmatrix} f^2 & f\varphi \\ f\varphi & \varphi^2 \end{vmatrix},$$

so ist

$$\Delta' = -(kx) V.$$

Ausserdem hat man

$$(4) \quad f_{ik} dx_i dx_k = -(kx)^2 U_1, \quad \varphi_{ik} dx_i dx_k = -(kx)^2 U_2,$$

wo U_1, U_2 die Hesse'schen Determinanten von f, φ , gerändert respective mit φ_i, f_i , bedeuten.

Die Gleichung der gesuchten Fläche nimmt eine sehr einfache Gestalt an, wenn man Δ mit Δ' multiplicirt. Es ergibt sich

$$(5) \quad \Delta \Delta' = (kx) (dx^2) F = 0,$$

wo

$$(6) \quad F = (f d^2 x) (\varphi d^2 x) - (f d^2 x) (\varphi d^3 x) = 0.$$

Aus dem Ausdrucke F sind nun noch die dritten Differentiale zu entfernen, da die zweiten nach (4) unmittelbar ersetzt werden können. Dazu verfährt man folgendermassen. Durch Differentiation von (2) entsteht:

$$(7) \quad \begin{cases} f_i d^3 x_i + (m-1) f_{ik} dx_k d^2 x_i = (m-1) (kx)^2 \frac{\partial U_1}{\partial x_i} dx_i, \\ \varphi_i d^3 x_i + (n-1) \varphi_{ik} dx_k d^2 x_i = (n-1) (kx)^2 \frac{\partial U_2}{\partial x_i} dx_i. \end{cases}$$

Um aus diesen Gleichungen die zweiten Differentiale zu entfernen, setzen wir:

$$(8) \quad \begin{cases} f_{ik} dx_k d^2 x_i = \Pi_1, \\ f_i d^2 x_i = (m-1) (kx)^2 U_1, \\ \varphi_i d^2 x_i = (n-1) (kx)^2 U_2, \\ k_i d^2 x_i = 0, \\ \varphi_{ik} dx_k d^2 x_i = \Pi_2. \end{cases}$$

Hieraus entsteht durch Elimination der $d^2 x_i$:

$$(9) \quad \Pi_1 A_1 - (m-1) (kx)^2 U_1 \Omega_1 + (n-1) (kx)^2 U_2 \Omega_2 + \Pi_2 A_2 = 0.$$

Dabei ist

$$A_2 = (f_{ik} dx_k, f_i, \varphi_i, k_i) = -(kx)^2 U_1,$$

$$A_1 = (kx)^2 U_2,$$

so dass:

$$(10) \quad \Pi_1 U_2 - \Pi_2 U_1 = (m-1) U_1 \Omega_1 - (n-1) U_2 \Omega_2.$$

Aber aus (7) hat man

$$(11) \quad \frac{F}{(m-1)(n-1)} = (kx)^2 \left(U_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_i} dx_i - U_1 \frac{\partial U_2}{\partial x_i} dx_i \right) - (U_2 \Pi_1 - \Pi_2 U_1) \\ = (kx)^2 \left(U_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_i} dx_i - U_1 \frac{\partial U_2}{\partial x_i} dx_i \right) - ((m-1) U_1 \Omega_1 - (n-1) U_2 \Omega_2).$$

In den Ausdrücken Ω_1, Ω_2 lassen sich nun die ersten Differentiale, die in ihnen noch enthalten sind, durch die ihnen proportionalen Unterdeterminanten ersetzen. Man hat

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= - \sum_k \begin{vmatrix} \varphi_{1k} & \varphi_{2k} & \varphi_{3k} & \varphi_{4k} \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ f_{1k} dx_k & f_{2k} dx_k & f_{3k} dx_k & f_{4k} dx_k \end{vmatrix} dx_k \\ &= - \sum \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} & f_1 & \varphi_1 & k_1 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_{24} & f_2 & \varphi_2 & k_2 \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \varphi_{34} & f_3 & \varphi_3 & k_3 \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} & \varphi_{44} & f_4 & \varphi_4 & k_4 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & 0 & 0 & 0 \\ f_{1k} & f_{2k} & f_{3k} & f_{4k} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} dx_k \\ &= (kx)^2 \sum \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} & f_1 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_{24} & f_2 \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \varphi_{34} & f_3 \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} & \varphi_{44} & f_4 \\ f_{1k} & f_{2k} & f_{3k} & f_{4k} & 0 \end{vmatrix} dx_k.\end{aligned}$$

Setzt man daher:

$$\Omega_1 = (kx)^2 \Theta'_i dx_i,$$

$$\Omega_2 = (kx)^2 \Theta''_i dx_i,$$

so ist

$$\Theta'_i x_i = U_2, \quad \Theta''_i x_i = U_1.$$

Daher erhält man:

$$\begin{aligned}(12) \quad \frac{-F}{(kx)^2 (m-1)(n-1)} &= \begin{vmatrix} U_1 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_i} + (n-1) \Theta''_i \right) dx_i \\ U_2 \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_i} + (m-1) \Theta'_i \right) dx_i \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{3(m+n-3)} \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_i} + (n-1) \Theta''_i \right) x_i & \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_i} + n-1 \Theta''_i \right) dx_i \\ \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_i} + (m-1) \Theta'_i \right) x_i & \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_i} + m-1 \Theta'_i \right) dx_i \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Aus der rechten Seite entfernt man endlich die Differentiale vermöge der Identität

$$\Delta' (f_i \varphi_i c_i b_i) = V \begin{vmatrix} c_x & c_{dx} \\ b_x & b_{dx} \end{vmatrix},$$

welche für die willkürlichen Grössen c_i, b_i die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} c_x & c_{dx} \\ b_x & b_{dx} \end{vmatrix} = - (kx) (f_i \varphi_i c_i b_i)$$

liefert. Demnach ist

$$F \equiv \left(f_i, \varphi_i, \frac{\partial U_1}{\partial x_i} + (n-1) \Theta_i'', \frac{\partial U_2}{\partial x_i} + (m-1) \Theta_i' \right) = 0$$

die Gleichung der gesuchten Fläche und zwar in der bereits von Clebsch gegebenen Form.

IX.

Die Punkte fünfpunktiger Berührung auf der windschiefen Fläche.

Soll eine Gerade y fünf consecutive Erzeugende schneiden, so muss $(y^2)=0$, $(yx)=0$, $(ydx)=0$, $(yd^2x)=0$, $(yd^3x)=0$, $(yd^4x)=0$ sein. Die Elimination der y liefert sofort die Determinante

$$(\Omega : x \, dx \, d^2x \, d^3x \, d^4x) = 0.$$

Sie geht durch Multiplication mit Δ^2 in die Determinante VI. (1) über, wenn man die letzte Horizontal- und Vertikalreihe derselben durch:

$$f d^4x \, p d^4x \, \psi d^4x \, x d^4x \, 0 \, 0 \, 0$$

ersetzt. Berücksichtigt man die Gleichungen VI. (12), (14), so ist ersichtlich, dass an Stelle der vierten Differentiale noch ihre äquivalenten Ausdrücke einzuführen sind. Dabei müsste sich der Factor $(kx)^8$ absondern lassen, vorausgesetzt, dass die Punkte fünfpunktiger Berührung überhaupt auf Erzeugenden liegen, welche vollständiger Schnitt von vier Complexen sind. In diesem Falle würde die Zahl der fraglichen Punkte

$$20 \, mnp \, (2(m+n+p) - 7)$$

sein. Die Reduction der Determinante, selbst in dem einfacheren Falle, wo der eine der Complexen linear ist, hat mir aber nicht gelingen wollen. Wahrscheinlich ist übrigens, dass analog wie in der allgemeinen Flächentheorie, die fünfpunktigen Tangenten sich nicht durch den vollständigen Schnitt von vier Complexen darstellen lassen. Es mag noch bemerkt werden, dass im Allgemeinen die Linienflächen, welche unendlich vielen linearen Complexen angehören, keine fünfpunktigen Tangenten besitzen. Ihr Auftreten würde die Existenz von Erzeugenden bedingen, deren vier unmittelbar folgende mit ihnen demselben Hyperboloid angehören, also eine weit höhere Singularität vorstellen.

X.

Das osculirende Hyperboloid der windschiefen Flächen.

Die Erzeugenden des osculirenden Hyperboloides, welches zu der Erzeugenden x der Fläche gehört, sind die Haupttangente y der letzteren, welche den Punkten von x entsprechen. Man hat daher für die Erzeugenden des Hyperboloides die Gleichungen V. (1):

$$(1) \quad (y^2) = 0, \quad (yx) = 0, \quad (ydx) = 0, \quad (y d^2 x) = 0.$$

Wir stellen die Gleichung dieses Hyperboloides in Linienkoordinaten dar. Damit eine Gerade z zwei unendlich nahe Erzeugende y schneide, muss das System der Gleichungen (1) mit

$$(2) \quad (zy) = 0$$

eine Doppelwurzel besitzen. Es muss also die Determinante

$$(3) \quad (\Omega : x \, dx \, d^2 x \, z)$$

verschwinden. Durch Multiplication mit Δ^2 geht dieselbe über in:

$$(4) \quad \begin{vmatrix} f^2 & f\varphi & f\psi & 0 & (m-1)U_1 & fz \\ f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi & 0 & (n-1)U_2 & \varphi z \\ f\psi & \varphi\psi & \psi^2 & 0 & (p-1)U_3 & \psi z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V & xz \\ (m-1)U_1 & (n-1)U_2 & (p-1)U_3 & V & 0 & 0 \\ fz & \varphi z & \psi z & xz & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung (4) ist die Gleichung des osculirenden Hyperboloides in Linienkoordinaten. Sind die drei Complexe $F \Phi \Psi$ linear, so reducirt sie sich, da $U_1 U_2 U_3$ verschwinden, auf die Complexgleichung des von denselben erzeugten Hyperboloides, multiplicirt mit dem Factor V^2 *). Befinden sich unter den Complexen zwei lineare specielle α_x, β_x , so reducirt sich für $(z\alpha) = 0, (z\beta) = 0$ die Determinante (4) auf:

$$(4^a) \quad \begin{vmatrix} \psi z & p-1 U_3 \\ xz & V \end{vmatrix} = 0.$$

Für eine singuläre Erzeugende der Fläche reducirt sich (4) auf $(xz)^2 K$, d. h. auf den doppeltzählenden speciellen linearen Complex mit der Axe x . Das osculirende Hyperboloid wird endlich unbestimmt, wenn der Factor K verschwindet, d. h. wenn:

$$(5) \quad \begin{vmatrix} f^2 & f\varphi & f\psi & (m-1)U_1 \\ f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi & (n-1)U_2 \\ f\psi & \varphi\psi & \psi^2 & (p-1)U_3 \\ (m-1)U_1 & (n-1)U_2 & (p-1)U_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

eine Gleichung, welche aussagt, dass zwei singuläre Erzeugende zusammengedrückt sind.

Die Tangenten des osculirenden Hyperboloides, welche die Erzeugende x schneiden, sind gegeben durch die Gleichungen:

*) Vgl. § III (1).

$$(6) \quad (xz) = 0 \quad \begin{vmatrix} f^2 & f\varphi & f\psi & fz \\ f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi & \varphi z \\ f\psi & \varphi\psi & \psi^2 & \psi z \\ fz & \varphi z & \psi z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Der zweite Ausdruck ist für $(xz) = 0$ das Quadrat einer in den z linearen Function, nämlich

$$\frac{1}{(kx)} (f \varphi \psi x k z).$$

Er repräsentirt einen linearen Complex, dessen den Punkten von x zugehörige Ebenen zugleich Tangentenebenen der Fläche sind. Wenn dagegen (xz) nicht verschwindet, so stellt die zweite Gleichung (6) ein Hyperboloid vor, welches jeder Erzeugenden ebenfalls zugeordnet ist, aber von dem osculirenden verschieden ist. Während das osculirende Hyperboloid die Erzeugenden x , $x + dx$, $x + 2dx + d^2x$ zu Erzeugenden zweiter Art enthält, hat das Hyperboloid (6) im Allgemeinen nur x , $x + dx$ zu solchen. Die Erzeugende $x + 2dx + d^2x$ ist nicht einmal eine der Tangenten der letzteren, dies wird vielmehr nur für besondere Erzeugende der Fläche stattfinden, für welche die Gleichung (5) besteht, deren Anzahl mithin

$$4 m n p (3(m + n + p) - 10)$$

ist.

Ebenso gehört zu den Tangenten des osculirenden Hyperboloides im Allgemeinen nicht die Erzeugende $x + 3dx + 3d^2x + d^3x$. Es findet dies, wie eine einfache Betrachtung zeigt, nur statt für diejenigen Erzeugenden, welche von der Curve vierpunktiger Berührung berührt werden. Aus der für den Fall zweier linearer Complexe gültigen Formel (4*) erhält man insbesondere, wenn anstatt z d^3x gesetzt wird, wieder die Bedingungsgleichung für die hyperbolischen Erzeugenden, wie zu erwarten war.

XI.

Ueber windschiefe Flächen vom Geschlechte Null.

Wir gehen jetzt zu einem zweiten Theile von Untersuchungen über, die sich auf windschiefe Flächen beziehen, welcher mit dem vorigen nur insofern zusammenhängt, als dabei die nämlichen Methoden der Betrachtung zu Grunde gelegt werden. Die windschiefen Flächen vom Geschlechte Null gestatten in der That eine wesentlich andere Behandlung. Man kann eine solche Fläche auffassen als Inbegriff der Verbindungsgeraden sich eindeutig entsprechender Punkte zweier ihrer ebenen Schnittcurven*). Die Erzeugenden sind alsdann rationale

*) Indem man die windschiefen Flächen beliebigen Geschlechtes von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet, gelangt man zu einer wesentlich anderen linien-

Functionen eines Parameters λ , welche man erhält, wenn man die Ausdrücke p_{ik} aus den Coordinaten entsprechender Punkte der beiden Curven bildet und von ihnen zu den allgemeinen Liniencoordinaten x übergeht.

Wir können daher die Gleichung der Fläche in der Form

$$(1) \quad \varrho x_i = \varphi_i \lambda$$

schreiben. Es bedeuten hier die φ_i rationale Functionen n^{ten} Grades von λ , zwischen denen die Identität

$$(2) \quad (\varphi^2) = 0$$

vermöge der Coefficienten, welche in φ_i auftreten, besteht. In Folge dessen kann man durch Differentiation nach λ aus (2) eine weitere Reihe von Identitäten

$$(3) \quad \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right) + \left(\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2}\right)^2 = 0 \text{ u. s. w.}$$

ableiten. Es empfiehlt sich, die Gleichungen (1) durch Einführung eines zweiten Parameters μ homogen zu machen. Es gelten dann die bekannten Identitäten:

$$n \varphi_i = \lambda \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda} + \mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu} \text{ u. s. w.,}$$

sowie auch

$$\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right) + \left(\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu \partial \lambda}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2}\right) = 0 \dots$$

Wir bestimmen nun zunächst die Singularitäten der durch die Gleichungen (1) dargestellten Fläche.

Die Ordnung der Fläche ist n . Denn die Bedingung, unter welcher die willkürliche Gerade y eine Erzeugende x derselben schneidet, ist:

$$(y \varphi) = 0$$

eine Gleichung n^{ten} Grades für λ .

Der Rang der Fläche ist $2(n-1)$. Eine Tangente y der Fläche muss den Gleichungen

$$(y x) = 0, \quad (y dx) = 0,$$

oder

$$\left(y \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right) = 0, \quad \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right) = 0$$

genügen. Die Elimination von λ aus den beiden letzteren liefert eine Gleichung $2(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in y , welche die Fläche in Liniencoordinaten darstellt. *Die Fläche enthält daher eine Doppelcurve vom Grade $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$* , wie übrigens auch aus dem Geschlecht des ebenen Schnittes gefunden werden konnte.

geometrischen Darstellung derselben überhaupt, über die ich bei einer demnächstigen Gelegenheit handeln werde.

Man kann übrigens den Grad der Doppelcurve auch direct bestimmen, wie wir jetzt zeigen wollen. Zwei Erzeugende x, x' , denen die Parameter λ, λ_1 entsprechen, bilden einen Punkt der Doppelcurve, wenn

$$(xx') = 0$$

oder

$$(\varphi_1 \varphi) = 0.$$

Da aber $(\varphi^2), (\varphi_1^2)$ identisch verschwinden, kann an Stelle der Gleichung $(\varphi \varphi_1) = 0$ geschrieben werden:

$$(4) \quad \Sigma (\varphi_i - \varphi_i')^2 = 0.$$

In dieser Form enthält die Gleichung (4) den abzusondernden Factor $(\lambda - \lambda_1)^2$ und ist dann in Bezug auf λ und λ_1 vom $n - 2^{\text{ten}}$ Grade, In dieser reducirten Gestalt wollen wir sie durch

$$(5) \quad \Psi(\lambda \lambda_1) = 0,$$

bezeichnen. Aus (5) ersehen wir zunächst, dass jede Erzeugende von $(n - 2)$ anderen getroffen wird oder $n - 2$ Punkte der Doppelcurve enthält. Ein willkürlicher Strahl des Büschels xx' ist ferner $x \nmid \varphi x'$. Damit derselbe zwei willhürliche Geraden a, b schneide, muss:

$$(6) \quad a_x b_{x'} - b_x a_{x'} = 0$$

sein. Die letztere Gleichung, durch $\lambda - \lambda_1$ theilbar, ist in Bezug auf λ, λ_1 vom Grade $n - 1$. Eliminirt man jetzt aus (5), (6) etwa λ_1 , so entsteht eine Gleichung vom $2(n - 2)(n - 1)^{\text{ten}}$ Grade in λ . Die Hälfte dieser Zahl stellt demnach solche Punkte der Doppelcurve vor, für welche eine in der Ebene xx' — der Doppelebene der Fläche — durch den Punkt xx' gezogene Gerade die a, b schneidet. Schneiden sich also a und b , so liegt entweder ein Punkt der Doppelcurve in der Ebene ab , oder es geht eine Doppelebene durch den gleichnamigen Punkt. Da die Ordnung der Doppelcurve gleich der Classe der Doppeldeveloppabeln ist, so ist jede dieser Zahlen gleich $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Man kann auch die Discriminante der Gleichung (5) bilden. Sie sagt aus, dass eine Erzeugende x von zwei unendlich nahen Erzeugenden getroffen wird, oder dass eine Erzeugende von der Doppelcurve berührt wird. Die Zahl dieser ausgezeichneten Erzeugenden ist daher:

$$2(n - 2)(n - 3).$$

Wir bestimmen ferner die Zahl der dreifachen Tangentenebenen, sowie die ihr gleiche der dreifachen Punkte der Fläche. Eine Erzeugende mit dem Parameter λ gehört zu einer der beiden Singularitäten, wenn für irgend zwei Wurzeln

$$\lambda_i' \lambda_k'$$

der Gleichung (5) die Beziehung

$$(7) \quad \Psi(\lambda_i' \lambda_k') = 0$$

besteht. Es muss also die symmetrische Function

$$(8) \quad V = \Pi (\Psi (\lambda'_i \lambda'_k))$$

verschwinden, welche man durch Multiplication der $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ Polynome $\Psi(\lambda'_i \lambda'_k)$ bilden kann. Man übersieht leicht, dass, wenn man V als rationale Function der Coefficienten von (5) darstellt, dabei λ höchstens im Grade $(n-2)^2(n-3)$ auftreten wird. Diese Zahl, vermindert um die Zahl der Erzeugenden, welche die Doppelcurve berühren, giebt als Rest:

$$(n-2)(n-3)(n-4).$$

Derselbe bezieht sich auf die beiden dualistischen Singularitäten und zwar wieder auf jede dreifach. *Daher ist*

$$\frac{1}{6} (n-2)(n-3)(n-4)$$

die Zahl der dreifachen Punkte und Ebenen der Fläche.

Die singulären Erzeugenden der Fläche sind durch

$$\left(\frac{\partial \varphi^2}{\partial \lambda} \right) = 0$$

gegeben. Die letztere Gleichung ist in Folge der Identität $(\varphi^2) = 0$ vom Grade $2(n-2)$. Man erhält sie in dieser reducirten Gestalt, wenn man in (5) $\lambda = \lambda_1$ setzt, also:

$$\Psi(\lambda \lambda) = 0.$$

Die Zahl der singulären Erzeugenden ist daher $2(n-2)$.

Die bisher bestimmten Zahlen sind zunächst unter der Voraussetzung gewonnen, dass die Fläche keine besonderen Singularitäten, wie Doppel- oder Rückkehrerzeugende besitzt. Eine *Doppelerzeugende* wird auftreten, wenn die sechs Gleichungen

$$\varrho \varphi_i \lambda = \varphi_i \lambda'$$

für verschiedene Werthe von λ, λ' erfüllt werden können. Das Auftreten einer Doppelerzeugenden modificirt übrigens weder den Rang der Fläche noch die Zahl der singulären Erzeugenden, während die Doppelcurve sich für jede um zwei Einheiten erniedrigt.

Wenn aber die Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda} = \varrho \varphi_i$$

bestehen, so wird jede Gerade y , welche die Fläche in der Erzeugenden x schneidet, dieselbe in zwei zusammenfallenden Punkten treffen. Die Geraden y aber, welche ausserdem noch dem linearen Complexe

$$(10) \quad \left(y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} \right) = 0$$

angehören, schneiden die Fläche in je drei zusammenfallenden Punkten. Eine solche Erzeugende ist daher *Rückkehrgeneratrix* der Fläche, und die Gleichung (10) giebt die Rückkehrtangentialebenen derselben längs

der Erzeugenden x durch die Ebenen des linearen Complexes an, welche den Punkten von x zugeordnet sind. Das Vorhandensein einer Rückkehrgeneratrix aber hat zur Folge, dass bei der Bestimmung der Gleichung der Fläche in Liniencoordinaten ein linearer specieller Complex sich aussondert. Bezeichnet man daher durch d, r die Zahl der Doppel- und Rückkehrgeneratricen, durch D den Grad der krummen Doppelcurve, so ist der Rang der Fläche gegeben durch die identischen Ausdrücke

$$2(n-1) - r = n(n-1) - 2D - 2d - 3r.$$

Für eine Rückkehrgeneratrix verschwindet ferner nicht allein

$$\Psi(\lambda\lambda) = \left(\frac{\partial\varphi^2}{\partial\lambda}\right) = 0,$$

sondern auch

$$\frac{\partial\Psi\lambda\lambda}{\partial\lambda} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}\right) = \left(\varphi \frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}\right) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right) = 0.$$

Es hat also $\Psi\lambda\lambda = 0$ für jede Rückkehrgeneratrix eine Doppelwurzel. $\Psi\lambda\lambda = 0$ kann andere Doppelwurzeln haben, welche sich auf zusammengefallene singuläre Erzeugende beziehen. Die Zahl der singulären Erzeugenden ist daher:

$$2(n-2) - 2r.$$

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der Haupttangenten der Fläche. An Stelle der Gleichungen

$$(y\varphi) = 0, \quad \left(y \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right) = 0, \quad \left(y \frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}\right) = 0,$$

welche eine Haupttangente y charakterisiren, setzen wir die äquivalenten Gleichungen:

$$\left(y \frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}\right) = 0, \quad \left(y \frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda\partial\mu}\right) = 0, \quad \left(y \frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2}\right) = 0.$$

Die Zahl der Haupttangenten, welche zwei willkürliche Gerade a, b schneiden, ist daher bestimmt durch die Gleichung:

$$(\Omega : \frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda\partial\mu} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2} a b) = 0.$$

Die windschiefe Fläche, welche von Haupttangenten gebildet wird, die einem linearen Complex angehören, ist daher vom Grade

$$6(n-2),$$

Ordnung und Classe des Strahlensystems der Haupttangenten ist somit gleich $3(n-2)$, was mit der directen Abzählung übereinstimmt.

Die Linien vierpunktiger Berührung genügen den Bedingungen:

$$(11) \quad \left(y \frac{\partial^3\varphi}{\partial\lambda^3}\right) = 0, \quad \left(y \frac{\partial^3\varphi}{\partial\lambda^2\partial\mu}\right) = 0, \quad \left(y \frac{\partial^3\varphi}{\partial\lambda\partial\mu^2}\right) = 0, \quad \left(y \frac{\partial^3\varphi}{\partial\mu^3}\right) = 0, \quad (y^2) = 0,$$

Fügt man denselben $(y\varphi) = 0$ hinzu, so ergibt sich:

Die Ordnung der von den vierpunktigen Tangenten gebildeten windschiefen Fläche ist gleich $8(n-3)$. Die gleiche Zahl solcher Tangenten gehört überhaupt einem willkürlichen linearen Complex an. Wir schliessen dann weiter: Die Zahl der Punkte, in denen die Curve vierpunktiger Berührung eine Erzeugende berührt, ist gleich $8(n-3)$.

Je zwei Erzeugende der Fläche der vierpunktigen Tangenten ordnen sich rational den Erzeugenden der gegebenen Fläche zu. Die erstere Fläche ist daher von *hyperelliptischem* Charakter, ihre sämtlichen Erzeugenden lassen sich als Functionen von λ darstellen, in denen eine quadratische Irrationalität auftritt. Es ist leicht, diese Functionen selbst anzugeben. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir die Determinante

$$\left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \lambda^3} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \lambda^2 \partial \mu} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \lambda \partial \mu^2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \mu^3} y \varrho \right),$$

in welcher die Grössen ϱ willkürliche Coefficienten vorstellen, durch

$$\Omega.$$

Man hat unter dieser Voraussetzung aus den Gleichungen (11)

$$y_i = \mu \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_i},$$

oder, wenn die Unterdeterminanten von Ω nach $y_i \varrho_k$ durch Ω_{ik} bezeichnet werden:

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{1}{\mu} y_1 = & y_2 \Omega_{21} + y_3 \Omega_{31} + y_4 \Omega_{41} + y_5 \Omega_{51} + y_6 \Omega_{61}, \\ \frac{1}{\mu} y_2 = y_1 \Omega_{21} & + y_3 \Omega_{23} + y_4 \Omega_{24} + y_5 \Omega_{25} + y_6 \Omega_{26}, \\ \frac{1}{\mu} y_3 = y_1 \Omega_{31} + y_2 \Omega_{32} & + y_4 \Omega_{34} + y_5 \Omega_{35} + y_6 \Omega_{36}, \\ \frac{1}{\mu} y_4 = y_1 \Omega_{41} + y_2 \Omega_{42} + y_3 \Omega_{43} & + y_5 \Omega_{45} + y_6 \Omega_{46}, \\ \frac{1}{\mu} y_5 = y_1 \Omega_{51} + y_2 \Omega_{52} + y_3 \Omega_{53} + y_4 \Omega_{54} & + y_6 \Omega_{56}, \\ \frac{1}{\mu} y_6 = y_1 \Omega_{61} + y_2 \Omega_{62} + y_3 \Omega_{63} + y_4 \Omega_{64} + y_5 \Omega_{65}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (12) geben, wenn μ bestimmt ist, die y ausgedrückt durch rationale Functionen von λ und μ . Die Grösse μ bestimmt man auf folgende Weise. Man hat:

$$\Omega^2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & 0 & a_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & 0 & a_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & 0 & a_3 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varrho y \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \varrho y & \varrho^3 \end{vmatrix} = -(\varrho y)^2 \Delta'$$

Es bedeuten dabei die $A_{11} A_{12} \dots$ die Ausdrücke

$$\Sigma \left(\frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial \lambda^3} \right)^2 - \Sigma \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial \lambda^3} \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial \lambda^2 \partial \mu} \dots$$

Δ' die Determinante:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{32} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix},$$

welche, gleich Null gesetzt, die Berührungspunkte der Curve vierpunktiger Berührung mit den Erzeugenden repräsentirt. Man hat daher:

$$\begin{aligned} \Omega &= (qy) \sqrt{-\Delta'}, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} &= y_i \sqrt{-\Delta'} = \frac{1}{\mu} y_i, \\ \mu &= \frac{1}{\sqrt{-\Delta'}}. \end{aligned}$$

Wir schliessen hieraus:

Das Geschlecht der Fläche, welche von den vierpunktigen Tangenten gebildet wird, ist gleich:

$$P = 4n - 13.$$

Die Zahl P erniedrigt sich jedesmal um eine Einheit, wenn $\Delta' = 0$ eine Doppelwurzel hat. Für Flächen, welche einem linearen speciellen Complexe γ angehören, ist insbesondere P immer gleich Null, wie sich auch daraus ergibt, dass:

$$\Delta' = - \frac{1}{(q\gamma)^2} \left[\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \lambda^3} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \lambda^2 \partial \mu} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \lambda \partial \mu^2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \mu^3} \gamma q \right]^2.$$

Fügt man den Gleichungen (11) noch die folgende:

$$a_y b_x - a_x b_y = 0$$

hinzu, so erhält man durch Elimination der y eine Gleichung in λ , welche sich auf den Grad der Curve vierpunktiger Berührung bezieht. Wie die Abzählung lehrt, ist der Grad derselben

$$5n - 12.$$

Auch diese Curve ist im Allgemeinen hyperelliptisch, ihr Geschlecht das nämliche, wie das der Fläche der vierpunktigen Tangenten, deren Erzeugenden ihre Punkte eindeutig zugeordnet sind. Sie kann ferner im Allgemeinen keine Spitzen haben, da auf jeder Erzeugenden der gegebenen Fläche nur zwei Punkte derselben liegen. Die Singularitäten der Curve vierpunktiger Berührung lassen sich daher ohne weiteres angeben. Man erhält z. B. für den Rang derselben die Zahl

$$18n - 52 \text{ u. s. w.}$$

Die Punkte fünfpunktiger Berührung endlich sind bestimmt durch die Gleichung:

$$\left(\Omega : \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \lambda^4} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \lambda^3 \partial \mu} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \lambda^2 \partial \mu^2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \lambda \partial \mu^3} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \mu^4} \right) = 0.$$

Die Zahl der fünfpunktigen Tangenten ist daher $10(n-4)$.

Die letzthin bestimmten Singularitäten werden ersichtlich durch das Auftreten von Doppelerzeugenden nicht beeinflusst. Für eine windschiefe Fläche dritten Grades ist beispielsweise die Curve vierpunktiger Berührung vom dritten Grade, sie besteht bekanntlich aus einer doppelten und einer einfachen Leitgeraden. Für die windschiefen Flächen vierten Grades $p=0$ ist diese Curve, sowie die von den vierpunktigen Tangenten gebildete Fläche achter Ordnung. Erst die Flächen fünfter Ordnung enthalten zehn Punkte fünfpunktiger Berührung, ihre Doppelcurve einen dreifachen Punkt u. s. w.

XII.

Fortsetzung. Ueber windschiefe Flächen vom Geschlechte Null, welche linearen Complexen angehören*).

Die Coefficienten gleich hoher Potenzen von λ in den Functionen φ kann man als Coefficienten der Gleichungen von ebenso viel linearen Complexen auffassen. Wir nennen sie die *Fundamentalcomplexe der Fläche*, weil ihre Beschaffenheit charakteristisch ist für das Verhalten der letzteren. Zwischen den Invarianten und simultanen Invarianten**) der Fundamentalcomplexes finden dann diejenigen Relationen statt, welche das identische Verschwinden von $(\varphi^2)=0$ erfordert. Unter ihnen befinden sich immer zwei specielle lineare Complexes, deren Coefficienten die von λ^0 und λ^n sind, ihre Axen sind zugleich diejenigen Erzeugenden der Fläche, welche den Werthen $\lambda=0$, $\lambda=\infty$ entsprechen. Die Fläche degenerirt in eine ebene Curve n^{ter} Classe oder einen Kegel n^{ter} Ordnung (vom Geschlechte Null), wenn je zwei Erzeugende sich schneiden. Dazu ist erforderlich, dass alle Fundamentalcomplexes speciell sind und mit einander in Involution liegen, d. h. dass ihre Axen entweder in einer Ebene liegen oder durch einen gemeinschaftlichen Punkt gehen***).

Ebene Curven und Kegel beliebigen Geschlechtes lassen übrigens immer, wie wir hier noch bemerken, die folgende Darstellung in Linien-

*) Cremona, Rappresentazione di una classe di superficie gobbe sopra un piano e determinazione delle loro curve assintotiche. Ann. di Mat. Ser. II, t. 1, S. 248.

**) Klein, Math. Ann. Bd. II, S. 201.

***). Der Begriff der Involution linearer Complexes ist von Herrn Klein erörtert Math. Ann. Bd. II, S. 201.

coordinaten zu: Sind α , β , γ drei sich gegenseitig schneidende Gerade, so dass:

$$\begin{aligned}(\alpha^2) &= 0, & (\beta^2) &= 0, & (\gamma^2) &= 0, \\(\alpha\beta) &= 0, & (\beta\gamma) &= 0, & (\gamma\alpha) &= 0,\end{aligned}$$

so repräsentirt $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$ immer eine Gerade, welche $\alpha\beta\gamma$ ebenfalls schneidet. Eine homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen $\lambda\mu\nu$ bedeutet daher entweder eine Curve n^{ter} Classe oder einen Kegel n^{ter} Ordnung, dessen Erzeugende durch

$$\varrho\gamma = \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$$

vorgestellt werden.

Wenn ein linearer Complex γ_x mit allen Fundamentalcomplexen in Involution liegt, so gehören alle Erzeugenden der Fläche diesem Complexe an. Ist derselbe insbesondere speciell, so ist die Axe γ derselben eine Leitlinie der Fläche. In diesem Falle bestehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned}(\gamma\varphi) &= 0, & \left(\gamma \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right) &= 0, & \left(\gamma \frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}\right) &= 0 \dots \text{u. s. w.}, \\(\gamma^2) &= 0.\end{aligned}$$

Zieht man eine Gerade z , welche γ schneidet, so ist $\gamma + \varrho z$ ein willkürlicher Strahl des Büschels (γz) . Die Erzeugenden, welche denselben treffen, sind bestimmt durch:

$$(\gamma\varphi) + \varrho(z\varphi) = 0,$$

oder durch $(z\varphi) = 0$. Sie sind also ganz unabhängig von ϱ , d. h. k_1 derselben liegen in der Ebene (γz) , während k_2 durch den Punkt (γz) gehen, wobei die Beziehung

$$k_1 + k_2 = n$$

stattfindet. Die Gerade γ ist also k_2 -fache Leitlinie der Fläche. Ausserdem existirt noch eine krumme Doppelcurve. Bezeichnet man die Anzahl der Punkte, in denen dieselbe der Leitlinie begegnet, mit α , so ist der Grad derselben

$$\alpha + \frac{k_2(k_2 - 1)}{2}.$$

Hat die Fläche d , r Doppel- oder Rückkehrgeneratricen, so besteht die Gleichung:

$$0 = n^2 - 3n + 2 - k_2(k_2 - 1) - k_1(k_1 - 1) - 2d - 2r - 2\alpha,$$

oder:

$$n - 1 + \alpha + d + r = k_1 k_2,$$

womit die Zahl α bestimmt ist.

Wenn die Fläche zwei linearen Complexen angehört, so existiren zwei Leitlinien, von denen die eine k_1 -, die andere k_2 -fach ist und ausserdem keine Doppelcurve. Es ist daher $\alpha = 0$, und

$$n - 1 + d + r = k_1 k_2.$$

Wenn d und r gleich Null sind, so ist immer $k_1 = 1, k_2 = n - 1$.

Wir untersuchen jetzt die *Haupttangentialcurven* solcher Flächen, die zunächst einem linearen Complexe angehören. Die ausgezeichnete algebraische Haupttangentialcurve ist in diesem Falle von der Ordnung und Classe $2(n - 1) - r$. Auf jeder Erzeugenden der Fläche liegen zwei Punkte derselben. Ihre Tangenten müssen sich daher als Functionen von λ darstellen, welche eine quadratische Irrationalität enthalten. Wir haben damit den Satz:

Die algebraische Haupttangentialcurve auf einer windschiefen Fläche vom Geschlechte Null, die einem linearen Complexe angehört, ist im Allgemeinen hyperelliptisch.

Die Darstellung der sämtlichen Tangenten der Haupttangentialcurve als Functionen von λ erhält man auf demselben Wege, welcher bei der Betrachtung der Fläche der vierpunktigen Tangenten eingeschlagen wurde. Gehört die Fläche dem linearen Complexe $\gamma_x = 0$ an, so sind die Tangenten y der genannten Curve charakterisirt durch:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} \right) = 0, \\ \left(y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \mu} \right) = 0, \\ \left(y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} \right) = 0, \\ (\gamma y) = 0, \\ (y^2) = 0. \end{array} \right.$$

Um die Auflösung dieser Gleichungen zu bewerkstelligen, setzen wir

$$\Omega = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} \gamma y \varrho \right).$$

Alsdann ist wieder

$$y_i = \mu \frac{\partial \Omega}{\partial e_i}$$

und die y proportional den Unterdeterminanten aus den Coefficienten der Gleichungen XI. (12). Zur Bestimmung von μ hat man:

$$\Omega^2 = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & 0 & 0 & a_1 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & 0 & 0 & a_2 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & (\gamma^2) & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varrho y \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \varrho y & \varrho^2 \end{vmatrix} = -(\varrho y)^2 (\gamma^2) \Delta.$$

Es bedeuten hier die $B_{11} B_{12} \dots$ die Ausdrücke

$$\Sigma \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \lambda^2} \right)^2, \quad \Sigma \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \lambda \partial \mu}, \dots,$$

Δ die Determinante:

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{vmatrix}.$$

Es ist aber Δ im Wesentlichen identisch mit der dritten Potenz von $\left(\frac{\partial \varphi^2}{\partial \lambda}\right)$ oder $\Psi(\lambda \lambda)$. Denn man hat

$$\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} \gamma y \varphi\right) = \frac{1}{n(n-1)^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} \gamma y \varphi\right),$$

woraus, wenn man auf beiden Seiten zum Quadrat erhebt:

$$(\Psi \lambda \lambda)^3 = \frac{1}{n^2(n-1)^4} \Delta.$$

Es ist daher

$$\mu = \frac{1}{(\Psi \lambda \lambda) n(n-1)^2 \sqrt{-(\Psi \lambda \lambda)(\gamma^2)}}.$$

Der Ausdruck $\Psi \lambda \lambda$ ist daher entscheidend für das Geschlecht der Haupttangentialcurve. Man kann ihn die Discriminante der Fläche nennen. Bezeichnet man die Zahl der Rückkehrgeneratrices derselben durch r , die der zusammengerückten singulären Erzeugenden durch x , so ist demnach das Geschlecht der Haupttangentialcurve

$$P = n - 3 - r - x.$$

Man gewinnt daraus die folgenden Zahlen:

$$\begin{aligned} M &= N = 2(n-1) - r, \\ R &= 6(n-2) - 4r - 2x, \\ \Omega &= 10n - 8r - 6x - 28. \end{aligned}$$

Von den stationären Tangenten Ω liegen $2n - 4 - 2r$ in den Cuspidalpunkten der Fläche, die übrigen $8(n-3) - 6(r-x)$ beziehen sich auf die Berührungspunkte der Curve vierpunktiger Berührung.

Wenn die Fläche zwei linearen speciellen Complexen mit windschiefen, nicht zusammenfallenden Axen $\gamma' \gamma''$ angehört, so hat man zur Bestimmung einer beliebigen Haupttangentialcurve die drei ersten Gleichungen (1) und:

$$\begin{aligned} (y\gamma') + \varphi(\gamma''y) &= 0, & (y^2) &= 0, \\ (\gamma'^2) &= 0, & (\gamma''^2) &= 0, \end{aligned}$$

zu nehmen, in denen φ einen willkürlichen Parameter vorstellt, welcher je eine Haupttangentialcurve individualisirt. An Stelle derselben kann man, um eine einfachere Lösung als die durch die Gleichungen XI. (12) gebotene zu erhalten, das folgende System benutzen, in welchem μ wieder gleich eins zu setzen ist.

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(y \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \lambda^3} \right) = -1, \\ \left(y \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \lambda^2 \partial \mu} \right) = \lambda, \\ \left(y \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \lambda \partial \mu^2} \right) = -\lambda^2, \\ \left(y \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \lambda^3} \right) = \lambda^3, \\ (\gamma' y) = -\varrho \omega, \\ (\gamma'' y) = \omega, \\ (y^2) = 0. \end{array} \right.$$

Die Elimination der y aus diesen sieben Gleichungen liefert die folgende zur Bestimmung von ω :

$$(3) \quad \left| \begin{array}{ccccccc} 0 & -1 & \lambda & -\lambda^2 & \lambda^3 & -\varrho \omega & \omega \\ -1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & 0 & 0 \\ \lambda & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & 0 & 0 \\ -\lambda^2 & A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & 0 & 0 \\ \lambda^3 & A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & 0 & 0 \\ -\varrho \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\gamma' \gamma'') \\ \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & (\gamma' \gamma'') & 0 \end{array} \right| = 0.$$

Die A_{ik} sind Functionen $2(n-3)^{\text{ten}}$ Grades in λ . Bezeichnet man die Determinante der A_{ik} , geändert mit $-1 \ \lambda \ -\lambda^2 \ \lambda^3$ durch Δ'' , so geht (3) über in

$$\Delta'' (\gamma' \gamma'') + 2 \varrho \omega^2 \Delta' = 0.$$

Die Determinante Δ' ist nach § XI. ein vollständiges Quadrat, während die Determinante Δ'' im Wesentlichen mit Δ oder $\Psi \lambda \lambda$ identisch sein muss. In der That hat man:

$$\left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} \gamma' \gamma'' y \right) = \frac{-1}{(n-2)^3} \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial \lambda^3} & -1 & 0 \\ \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial \lambda^2 \partial \mu} & \lambda & 0 \\ \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial \lambda \partial \mu^2} & -\lambda^2 & 0 \\ \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial \mu^3} & +\lambda^3 & 0 \\ \gamma'_i & 0 & 0 \\ \gamma''_i & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right|,$$

woraus sich die Beziehung:

$$\Delta = -\frac{1}{(n-2)^6} \Delta''$$

ergiebt.

Die sechs ersten Gleichungen (2) geben dann unmittelbar die Coordinaten y , ausgedrückt durch rationale Functionen von λ und ω , wobei

$$\omega = (n-2)^3 (n-1)^2 n \Psi \lambda \lambda \sqrt{\frac{\Psi \lambda \lambda (\gamma, \gamma')}{2 \varrho \Delta'}}$$

und damit die Darstellung aller der developpablen Flächen, deren Rückkehrkanten die Haupttangenten sind, abhängig von dem willkürlichen Parameter ϱ .

Die Singularitäten der Haupttangentialcurven sind durch die obigen Zahlen für M, N, P, R, Ω gegeben. Nur beziehen sich jetzt die stationären Tangenten, welche nicht in die Cuspidalpunkte fallen, paarweise auf die hyperbolischen Erzeugenden.

Windschiefe Flächen n^{ten} Grades $p=0$, welche einem Büschel linearer Complexe mit discreten Directricen angehören, haben also $4(n-3)-3(r+x)$ hyperbolische Erzeugende.

Es ist endlich noch der Fall zu erörtern, wo die Directricen coincidiren. Die sämmtlichen Haupttangentialcurven sind dann gegeben durch die Gleichungen:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} \right) = 0, \\ \left(y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \mu} \right) = 0, \\ \left(y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} \right) = 0, \\ (y \gamma') + \varrho (\gamma'' y) = 0, \\ (y^2) = 0. \end{array} \right.$$

wo $(\gamma'^2) = 0$, $(\gamma' \gamma'') = 0$.

In Folge dessen ist für jeden Werth von λ eine der Lösungen von y

$$y_i = \gamma'_i.$$

Auf jeder Erzeugenden liegt daher nur ein Punkt der Haupttangentialcurve. Es ist damit der Satz bewiesen:

Die Haupttangentialcurven der windschiefen Flächen $p=0$ mit zusammenfallenden Leitlinien sind algebraische Curven vom Geschlechte Null).*

Dasselbe zeigt auch die Untersuchung der Discriminante. Man hat nämlich:

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} \gamma' \gamma'' \varrho \right)^2 = - (\gamma' \varrho)^2 (\gamma''^2) \Delta,$$

so dass Δ ein vollständiges Quadrat ist.

*) Cremona a. a. O.

Bezeichnet man mit k_1 die kleinere der beiden Zahlen, welche die Multiplicität der beiden unendlich nahen Leitlinien ausdrücken, so ist Ordnung und Classe der Haupttangentialcurven (Rückkehrgeneratricen nicht vorausgesetzt)

$$M = N = 2(n - 1) - k_1,$$

woraus

$$R = 2M - 2 = 4n - 6 - 2k_1,$$

$$\Omega = 4n - 10 - 2k_1.$$

Die windschiefen Flächen n^{ten} Grades $p = 0$ mit zwei unendlich nahen k_1 - und k_2 -fachen Leitlinien $k_1 \leq k_2$ haben $4n - 10 - 2k_1$ hyperbolische Erzeugende.

Man kann, wie wir zum Schluss noch bemerken wollen, ähnliche Formeln für die Singularitäten der Haupttangentialcurven auch für windschiefe Flächen beliebigen Geschlechts, die linearen Complexen angehören, aufstellen.

Die Fläche gehöre einem linearen Complex an, ihr Grad sei n , der Grad der Doppelcurve D , die Zahl der Doppel-, resp. Rückkehrgeneratricen d , r . Das Geschlecht der Fläche ist

$$2p = (n - 1)(n - 2) - 2d - 2r - 2D.$$

Für Ordnung und Classe der Haupttangentialcurve ergibt sich demnach:

$$M = N = n(n - 1) - 2d - 3r - 2D = 2p + 2n - 2 - r.$$

Den Rang der Haupttangentialcurve bestimmt man auf folgende Weise. Die sämtlichen Haupttangentialen bilden ein Strahlensystem, dessen Ordnung und Classe

$$i = 3n(n - 2) - 6d - 8r - 6D.$$

Die Haupttangentialen, welche dem linearen Complexe C angehören und eine willkürliche Gerade z schneiden, schneiden zugleich eine zweite Gerade, die conjugirte Polare von z in Bezug auf C . Es bilden aber die Haupttangentialen, welche z schneiden, eine windschiefe Fläche der Ordnung $2i$. Der Rang der Haupttangentialcurve ist daher:

$$R = 6n(n - 2) - 12d - 16r - 12D.$$

Das Geschlecht der Haupttangentialcurve bestimmt sich aus der Formel

$$R = 2P + 2(N - 1),$$

$$P = 3n(n - 2) - 6d - 8r - 6D - N + 1,$$

$$P = 4p + n - 3 - r.$$

Daraus ergibt sich die Zahl der stationären Tangenten

$$\begin{aligned}\Omega &= 3R - 4N \\ &= 28p + 10n - 8r - 28.\end{aligned}$$

Es ist aber die Zahl der singulären Erzeugenden der windschiefen Fläche ferner:

$$4p + 2n - 4 - 2r.$$

Subtrahirt man diese Zahl von Ω , so erhält man endlich als Zahl der Berührungspunkte der Curve vierpunktiger Berührung mit den Erzeugenden:

$$8(n - 3) + 6(4p - r).$$

Die entwickelten Formeln bleiben auch dann noch gültig, wenn die Fläche zwei speciellen linearen Complexen mit discreten Axen angehört. Solche Flächen besitzen daher

$$4(n - 3) + 3(4p - r)$$

hyperbolische Erzeugende.

Für Flächen mit zwei unendlich nahen, k_1 -, k_2 -fachen Leitlinien, sowie d , r Doppel- und Rückkehrgeneratrices gelten dagegen die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}P &= p = k_1 k_2 - d - r - n + 1, \\ N &= M = 2p - r + 2n - 2 - k_1, \\ \Omega &= 10(p - 1) + 4n - 2r - 2k_1,\end{aligned}$$

in welchen Ω die Zahl der hyperbolischen Erzeugenden angiebt*).

XIII.

Developpable Flächen vom Geschlechte Null.

Die windschiefe Fläche, deren Erzeugende durch die Gleichungen

$$\varphi x_i = \varphi_i$$

dargestellt sind, ist abwickelbar, wenn je zwei consecutive Erzeugende sich schneiden. Es müssen also die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}(\varphi^2) &= 0, \\ \left(\frac{\partial \varphi^2}{\partial \lambda}\right) &= 0\end{aligned}$$

Identitäten sein. In Folge dessen hat man die weiteren Gleichungen:

$$(1) \quad \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right) = 0, \quad \left(\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2}\right) = 0, \quad \left(\varphi \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \lambda^3}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2}\right) = 0 \text{ u. s. w.}$$

Bei Anwendung homogener Parameter $\lambda \mu$ kann man ihnen noch die folgenden:

) Inzwischen habe ich die Ordnung der Curve vierpunktiger Berührung u. s. w. auf einer beliebigen (windschiefen) Fläche n^{ter} Ordnung bestimmt, worauf ich bei einer anderen Gelegenheit zurückkommen werde.

$$(2) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial \varphi^2}{\partial \mu} \right) = 0, & \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) = 0, & \left(\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} \right) = 0, & \left(\varphi \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \mu^3} \right) = 0, \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} \right) = 0, & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) = 0, & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu \partial \lambda} \right) = 0, & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \mu} \right) = 0, \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} \right) = 0, & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} \right) = 0, & \left(\varphi \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \lambda^2 \partial \mu} \right) = 0, & \left(\varphi \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \lambda \partial \mu^2} \right) = 0 \end{cases}$$

hinzufügen.

Die Gleichungen (1) sagen aus, dass jede Erzeugende von $n - 4$ anderen geschnitten wird. Bezeichnet man nämlich mit λ den Parameter von x , mit $\lambda + \kappa$ den einer zweiten Erzeugenden, welche x schneidet, so ergibt die Gleichung:

$$(\varphi_{\lambda} \varphi_{\lambda+\kappa}) = 0 = (\varphi_{\lambda}^2) + \frac{\kappa}{1} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) + \frac{\kappa^2}{2!} \left(\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} \right) + \frac{\kappa^3}{3!} \left(\varphi \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \lambda^3} \right) + \dots$$

ausser den vier Wurzeln $\kappa = 0$ noch $n - 4$ andere, welche sich auf die auf x liegenden Punkte der Doppelcurve beziehen. Es giebt daher eine bestimmte Zahl von Erzeugenden, für welche nur $n - 5$ Wurzeln dieser Gleichung von Null verschieden sind. Sie sind bestimmt durch

$$\left(\varphi \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \lambda^4} \right) = 0$$

und beziehen sich auf die stationären und Wendungspunkte der Rückkehrcurve der developpabeln Fläche.

Bezeichnet man die Zahl dieser beiden Singularitäten respective durch α , β , so zeigt die letzte Gleichung, dass

$$\alpha + \beta = 2n - 8.$$

Die Zahlen α , β dürfen nicht mehr, wie in den früheren Betrachtungen einander gleich gesetzt werden, weil eine developpable Fläche im Allgemeinen kein in sich dualistisches Gebilde ist.

Bezeichnet man den Grad der Rückkehrcurve durch M , so ist der Rang der Developpabeln

$$2(n - 1) - M.$$

Diese Zahl stellt zugleich die Classe des ebenen Schnittes oder die Classe der Rückkehrcurve vor. Man hat daher:

$$M + N = 2(n - 1),$$

$$p = 0,$$

$$R = n.$$

Wir schliessen mit der folgenden Bemerkung. Der developpabeln Fläche ist eine zweite Fläche $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades

$$q y_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda}$$

eindeutig zugeordnet. Aus den Gleichungen (1) ersieht man unmittelbar, dass je drei consecutive Erzeugende derselben:

$$y, \quad y + dy, \quad y + 2 dy + d^2 y$$

von der Erzeugenden x geschnitten werden. Die Fläche y hat daher die Rückkehrcurve von x zur Haupttangentialcurve, ihre Erzeugenden schneiden die letztere und verlaufen zugleich in der jedesmaligen Schmiegungeebene derselben. Denselben Charakter besitzt aber auch jede andere Fläche, deren Erzeugende z durch die Gleichung

$$\varrho z_i = \alpha x_i + \beta \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda}$$

oder auch

$$\varrho z_i = a \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda} + b \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu}$$

definiert werden. Die Grössen a, b können dabei völlig willkürliche Functionen von λ sein. Nimmt man sie insbesondere als constant an, so hat man den Satz:

Einer jeden abwickelbaren Fläche vom Geschlechte Null n^{ten} Grades lässt sich ein „Büschel“ windschiefer Flächen $n - 1^{\text{ten}}$ Grades von gleichem Geschlechte zuordnen, welche die Rückkehrcurve der gegebenen Fläche zur gemeinschaftlichen Haupttangentialcurve haben.

XIV.

Betrachtung einiger bestimmter windschiefer Flächen.

Auf die in den vorigen beiden Paragraphen entwickelten Vorstellungen lässt sich eine Eintheilung der windschiefen Flächen $p = 0$ begründen, in welcher die Fundamentalcomplexe eine wesentliche Rolle spielen. Wir ziehen es aber vor, von der weiteren Verfolgung der allgemeinen Betrachtungen zunächst absehend, einige bestimmte Linienflächen zu untersuchen, womit denn zugleich die Richtung der liniengeometrischen Methoden überhaupt genauer bezeichnet werden wird.

A. Windschiefe Flächen zweiten Grades.

Sie sind gegeben durch die Gleichungen

$$(1) \quad \varrho x_i = a_i + b_i \lambda + c_i \lambda^2,$$

wobei

$$(a^2) = 0, \quad (ab) = 0, \quad (c^2) = 0, \quad (bc) = 0, \quad (b^2) + 2(ac) = 0.$$

Die Fläche (1) ist ein Hyperboloid, dessen Erzeugende erster Art die x sind. Die Fundamentalcomplexe

$$a_y = 0, \quad b_y = 0, \quad c_y = 0$$

bestimmen dagegen die Erzeugenden zweiter Art. Stellt man dieselben in der Form:

$$(2) \quad \varrho y_i = \alpha_i + \beta_i \mu + \gamma_i \mu^2$$

dar, so ist

$(\alpha^2) = 0$, $(\alpha\beta) = 0$, $(\gamma^2) = 0$, $(\beta\gamma) = 0$, $(\beta^2) + 2(\gamma\alpha) = 0$,
während zwischen den $\alpha\beta\gamma$, $a\ b\ c$ die Bedingungen

$$(3) \quad \begin{cases} (a\alpha) = 0, & (a\beta) = 0, & (a\gamma) = 0, \\ (b\alpha) = 0, & (b\beta) = 0, & (b\gamma) = 0, \\ (c\alpha) = 0, & (c\beta) = 0, & (c\gamma) = 0 \end{cases}$$

stattfinden.

Die Gleichungen (1), (2) vermitteln die Abbildung sämtlicher Erzeugenden der Fläche auf die ebenen Strahlbüschel $k_1 + \lambda k_2$, $k_1 + \mu k_2$. Das Doppelverhältniss von vier beliebigen Erzeugenden einer Art x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , denen die Parameter λ_1 , λ_2 , λ_3 , λ_4 entsprechen, ist daher dasselbe wie das der Strahlen

$$k_1 + \lambda_1 k_2, \quad k_1 + \lambda_2 k_2, \quad k_1 + \lambda_3 k_2, \quad k_1 + \lambda_4 k_2,$$

also gleich

$$\delta = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

Man hat andererseits zwischen zwei Erzeugenden $x_i x_k$ die Beziehung:

$$q_i q_k (x_i x_k) = (\lambda_i - \lambda_k)^2,$$

woraus, wie schon in § II. gefunden wurde:

$$\delta = \sqrt{\frac{(x_1 x_3)}{(x_2 x_3)}} : \frac{(x_1 x_4)}{(x_2 x_4)}.$$

Infolge der Gleichungen (1), (2), (3) ist ferner durch die Gleichungen

$$(4) \quad \varepsilon z'_i = x_i - q' y_i = a_i - q' \alpha_i + (b_i - q' \beta_i) \lambda + (c_i - q' \gamma_i) \lambda^2$$

ein Hyperboloid gegeben, dessen Erzeugende zweiter Art durch

$$(5) \quad \varepsilon z''_i = x_i - q'' y_i = a_i - q'' \alpha_i + (b_i - q'' \beta_i) \mu + (c_i - q'' \gamma_i) \mu^2$$

bestimmt sind, wenn zwischen den Parametern $q' q''$ die Gleichung

$$(6) \quad q' q'' = - \frac{(a c)}{(\alpha \gamma)} = - \frac{(b^2)}{(\beta^2)}$$

stattfindet.

Durch eine Gleichung zwischen λ und μ , etwa $f(\lambda\mu) = 0$, werden die Erzeugenden erster und zweiter Art auf eine gewisse Weise mit einander in Beziehung gesetzt. Ist dieselbe vom Grade m_1 in Bezug auf λ , vom Grade m_2 in Bezug auf μ , so schneiden sich die zugehörigen Erzeugenden in einer Curve $m_1 + m_2$ ter Ordnung, welche jeder Erzeugenden erster Art in m_2 , jeder von der zweiten Art in m_1 Punkten begegnet. Den Discriminanten von f in Bezug auf μ λ , welche in Bezug auf diese Grössen von den Graden $2m_1(m_2 - 1)$, $2m_1(m_2 - 1)$ sind, entsprechend, wird jede dieser Curven $2m_1(m_2 - 1)$ Erzeugenden erster, $2m_2(m_1 - 1)$ zweiter Art berühren.

Eine bilineare Beziehung zwischen λ, μ stellt daher einen auf dem

Hyperboloide gelegenen Kegelschnitt vor. Setzt man insbesondere $\lambda = \mu$, so stellen die Gleichungen (4), (5) eine einfach unendliche Schaar von Hyperboloiden vor, welche das gegebene in dem Kegelschnitte $\lambda = \mu$ berühren. Für jedes Hyperboloid hat dabei das Doppelverhältniss dieser beiden Erzeugenden, die von einem beliebigen Punkte des Kegelschnittes auslaufen, zu den entsprechenden Erzeugenden des gegebenen den constanten Werth

$$\delta = \frac{e'}{e''}.$$

Für den besonderen Werth $\varrho'^2 = -\frac{(b^2)}{(\beta^2)}$ geben die Gleichungen (4), (5) die Gleichung des Berührungskegelschnittes, sowie die des längs desselben berührenden Kegels.

B. Windschiefe Flächen dritten Grades.

Für dieselben ist

$$\begin{aligned} \varrho x_i &= a_i + \lambda \bar{b}_i + \lambda^2 c_i + \lambda^3 d_i, \\ (a^2) &= 0, \quad (ab) = 0, \quad (d^2) = 0, \quad (dc) = 0, \\ (b^2) + 2(ac) &= 0, \quad (c^2) + 2(bd) = 0, \\ (ad) + (bc) &= 0. \end{aligned}$$

Die Fläche hat zwei singuläre Erzeugende, bestimmt durch die Gleichung

$$(b^2) + 4(bc)\lambda + \lambda^2(4(c^2) + 6(bd)) = 0.$$

Dieselben coincidiren, wenn die Discriminante

$$4(bc)^2 - (b^2)(d^2)$$

verschwindet. Diesen Fall ausgeschlossen, kann man den Parameter λ so gewählt denken, dass die Werthe $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ die singulären Erzeugenden selbst darstellen. Unter dieser Voraussetzung bestehen die Identitäten

$$\begin{aligned} (a^2) &= 0, \quad (ab) = 0, \quad (b^2) = 0, \quad (d^2) = 0, \quad (bd) = 0, \quad (dc) = 0, \quad (ac) = 0, \\ (ad) + (bc) &= 0. \end{aligned}$$

Die Fläche gehört unendlich vielen linearen Complexen an, deren Coefficienten γ bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$(\gamma a) = 0, \quad (\gamma b) = 0, \quad (\gamma c) = 0, \quad (\gamma d) = 0.$$

Der Voraussetzung $4(bc)^2 - (b^2)(d^2) \neq 0$ entsprechend befinden sich unter ihnen immer zwei verschiedene specielle, deren Axen durch γ' , γ'' bezeichnet werden mögen. Dieselben bilden zwei Leitlinien der Fläche, von denen die eine einfach, die andere doppelt ist. Die Fläche ist auf ein Tetraeder bezogen, dessen Kanten, zu gegenüberliegenden Paaren geordnet, ad , bc , γ' , γ'' sind. Die Kante γ' , welche durch den Schnitt von ab , cd geht, ist die Doppelgerade der Fläche.

Die Gleichung $\Psi \lambda \lambda' = 0$ des § XI. (5) nimmt die Form $\lambda + \lambda_1 = 0$ an. Je zwei Parameterwerthe λ und $-\lambda$ bestimmen daher Erzeugende, die sich in einem Punkte von γ' schneiden. Bezeichnet man ihre Coordinaten durch x, x' , so ist $x + \varrho x'$ ein beliebiger Strahl des Büschels xx' . Soll derselbe gleichzeitig a und c schneiden, so ist $1 - \varrho = 0$ zu setzen, während dem Strahle, welcher b und d schneidet $1 + \varrho = 0$ entspricht. Es ist damit der folgende Satz bewiesen:

Die beiden Erzeugenden, welche sich in einem Punkte der Doppelgeraden kreuzen, schneiden die einfache Leitlinie in zwei Punkten, die harmonisch sind zu den Punkten, in denen die letztere von den singulären Erzeugenden getroffen wird.

Man hat ferner:

$$\varrho a_x = (ad) \lambda^3,$$

$$\varrho b_x = (bc) \lambda^2,$$

$$\varrho c_x = (bc) \lambda,$$

$$\varrho d_x = (ad).$$

Es ist daher

$$a_x d_x - b_x c_x = 0.$$

Die Fläche gehört also nach § I. einem speciellen Reye'schen Complexe an.

Die Haupttangente derselben sind ferner bestimmt durch die Gleichungen:

$$3a_y + \lambda b_y = 0,$$

$$b_y + \lambda c_y = 0,$$

$$c_y + 3\lambda d_y = 0.$$

Schreibt man dieselben in der Form

$$(7) \quad \begin{cases} a_y = -\lambda^3, \\ b_y = 3\lambda^2, \\ c_y = -3\lambda, \\ d_y = 1. \end{cases}$$

so ist

$$9a_y d_y - b_y c_y = 0.$$

Die Haupttangente der Fläche schneiden also das durch die Fundamentalcomplexe gebildete Tetraeder in constantem Doppelverhältniss.

Die Gleichung einer beliebigen Haupttangenteurve erhält man nach XII. (5), indem man den Gleichungen (7) die folgenden

$$\gamma_y' = -\varrho \omega,$$

$$\gamma_y'' = \omega,$$

$$(\gamma^2) = 0$$

hinzufügt. Den Werthen

$$\Delta' = (bc)^4,$$

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda^3 & 3\lambda^2 & -3\lambda & 1 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & (ad) \\ 3\lambda^2 & 0 & 0 & (bc) & 0 \\ -3\lambda & 0 & (bc) & 0 & 0 \\ 1 & (ad) & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 16 (bc)^3 \lambda^3$$

entsprechend hat man daher

$$(8) \quad \varrho \omega^2 = -8 \frac{(\gamma' \gamma'')}{(bc)} \lambda^3.$$

Unter Voraussetzung dieses Werthes von ω sind die y die Unterdeterminanten nach μ_i der folgenden Determinante:

$$\Omega = \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & \mu_6 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & -\lambda^3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & 3\lambda^2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & -3\lambda^2 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & 1 \\ \gamma_1' & \gamma_2' & \gamma_3' & \gamma_4' & \gamma_5' & \gamma_6' & -\varrho \omega \\ \gamma_1'' & \gamma_2'' & \gamma_3'' & \gamma_4'' & \gamma_5'' & \gamma_6'' & \omega \end{vmatrix},$$

so dass:

$$(9) \quad y_i \equiv \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_i}.$$

Die Determinante Ω reducirt man durch Multiplication mit

$$(a \ b \ c \ d \ \gamma' \ \gamma'') = (\gamma' \gamma'') (bc)^2.$$

Dadurch entsteht:

$$\Omega \equiv \begin{vmatrix} 0 & (\mu a) & (\mu b) & (\mu c) & (\mu d) & (\mu \gamma') & (\mu \gamma'') \\ -\lambda^3 & 0 & 0 & 0 & (ad) & 0 & 0 \\ 3\lambda^2 & 0 & 0 & (bc) & 0 & 0 & 0 \\ -3\lambda & 0 & (bc) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (ad) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\varrho \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\gamma' \gamma'') \\ \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & (\gamma' \gamma'') & 0 \end{vmatrix},$$

oder:

$$\Omega = [(\mu \gamma') - \varrho (\mu \gamma'')] \omega (bc) - (\gamma' \gamma'') [\lambda^3 (\mu d) + 3\lambda^2 (\mu c) - 3\lambda (\mu b) - (\mu a)].$$

Es ist demnach:

$$y_i = (\gamma_i' - \gamma_i'' \varrho) \omega (bc) - (\gamma' \gamma'') [\lambda^3 d_i + 3\lambda^2 c_i - 3\lambda b_i - a_i].$$

Setzt man endlich:

$$\lambda = \lambda_1^2,$$

so wird

$$\omega = 2 \lambda_1^3 \sqrt{\frac{-2(\gamma' \gamma'')}{\varrho(bc)}} = 2 \lambda_1^3 \Theta$$

und demgemäss

$$(10) \quad y_i = (\gamma'_i - \varrho \gamma''_i) \Theta \lambda_1^3 - (\gamma_i \gamma_{ii}) [\lambda_1^6 d_i + 3 \lambda_1^4 c_i - 3 \lambda_1^2 b_i - a_i] = \psi_i.$$

Damit sind die sämtlichen Tangenten derjenigen Haupttangenten-curve, welche dem Parameter ϱ entspricht, als rationale Functionen sechsten Grades ausgedrückt. Zu jeder Erzeugenden der windschiefen Fläche gehören zwei Tangenten der Curve, diejenigen, welche den Werthen λ_1 und $-\lambda_1$ entsprechen. Man kann sich auch leicht davon überzeugen, dass die Function ψ den folgenden Bedingungen:

$$(\psi^2) = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi^2}{\partial \lambda}\right) = 0, \quad (\varphi \psi) = 0, \quad \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right) = 0, \quad \left(\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2}\right) = 0$$

genügt. In der Gleichung (10) der developpabeln Fläche der Tangenten der Haupttangenten-curve treten λ_1^5 und λ_1 nicht auf. Die Tangenten, welche den Werthen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 = \infty$ entsprechen, sind daher Rückkehrgeneratricen der developpabeln, d. h. stationäre Tangenten der Haupttangenten-curve.

Die Haupttangenten-curven der windschiefen Flächen dritter Ordnung sind daher rationale Curven vierter Ordnung und Classe sechsten Ranges mit zwei stationären Tangenten, welche mit den singulären Erzeugenden der Fläche coincidiren).*

Zugeordnet im Sinne des § XIII. sind der Developpabeln (10) unendlich viele Flächen vierter Ordnung:

$$(11) \quad \varrho z_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda_1} + k \frac{\partial \psi_i}{\partial u_1},$$

wobei

$$z'_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda_1} = -(\gamma' \gamma'') [\lambda_1^4 d_i + 2 \lambda_1^2 c_i - b_i] + (\gamma'_i - \gamma''_i \varrho) \lambda_1 \Theta,$$

$$z''_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial u_1} = -(\gamma' \gamma'') [\lambda_1^4 c_i - 2 \lambda_1^2 b_i - a_i] + (\gamma'_i - \gamma''_i \varrho) \lambda_1^3 \Theta.$$

Die beiden besonderen Flächen $z' z''$ entstehen, wenn man durch jeden Punkt der Haupttangenten-curve in der Schmiegungeebene derselben die beiden Geraden zieht, welche die beiden singulären Erzeugenden der windschiefen Fläche schneiden. Der Beweis dafür ist in den beiden Gleichungen

$$(dz') = 0,$$

$$(az'') = 0$$

enthalten.

*) Vgl. Clebsch, Ueber die Steiner'sche Fläche Crelle's Journal Bd. 67. Der rationale Charakter der Haupttangenten-curven ist übrigens eine unmittelbare Folge davon, dass die Discriminante $\sqrt{\Delta} = \sqrt{(\Psi \lambda \lambda)^3}$ (§ XII.) als Radical nur eine rationale Function zweiten Grades, d. h. keine wesentliche Irrationalität enthält.

Die Flächen z bilden ein Büschel von windschiefen Flächen vierter Ordnung, welches eine sehr merkwürdige Beziehung zur Fläche dritter Ordnung besitzt. Jede dieser Flächen nämlich hat eine Doppelerzeugende, welche den Werthen

$$\lambda_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{-k}}$$

entspricht. Alle Doppelerzeugenden dieser Art bilden eine Fläche, deren Erzeugende t_i man erhält, wenn man in (11) an Stelle von λ_1 diesen Werth substituirt. Es ist daher

$$\varrho t_i = d_i - k c_i + k^2 b_i - k^3 a_i.$$

Die von den Doppelerzeugenden gebildete Fläche ist daher identisch mit der gegebenen windschiefen Fläche dritter Ordnung. Jede der Flächen z gehört ferner unendlich vielen linearen Complexen an, welche zwei zusammenfallende Directricen besitzen. Die Coordinaten der letzteren sind, wie man leicht sieht:

$$\varrho u_i = d_i + k c_i + k^2 b_i + k^3 a_i.$$

Sie gehören also ebenfalls der nämlichen Fläche dritter Ordnung an. t und u sind conjugirte Erzeugende derselben, welche sich in einem Punkte der Doppelgeraden kreuzen. Wir fassen diese Bemerkungen in dem folgenden Satze zusammen:

Alle durch (11) dargestellten windschiefen Flächen vierter Ordnung besitzen also lauter algebraische Haupttangentialcurven vierter Ordnung und Classe sechsten Ranges vom Geschlechte Null. Jede Fläche hat eine der Erzeugenden der windschiefen Fläche dritter Ordnung zur Doppelgeneratrix und die ihr conjugirte zur Leitlinie, welche als Vereinigung von zwei Doppelgeraden aufzufassen ist. Für die beiden Flächen $k=0$, $k=\infty$ wird die Doppelgeneratrix zur Rückkehrgeneratrix.

Wir haben jetzt noch den Fall zu untersuchen, in welchem die windschiefe Fläche zusammenfallende singuläre Erzeugende besitzt. Unter der Voraussetzung

$$4(bc)^2 - (b^2)(c^2) = 0$$

fallen aber die beiden Geraden γ' , γ'' ebenfalls zusammen. Die Fläche gehört also einem Büschel linearer Complexe mit zwei unendlich nahen Leitlinien, von denen eine doppelt ist, an. Wählen wir den Parameter λ so, dass $\lambda = 0$ der singulären Erzeugenden entspricht, so ist zu setzen:

$$(ac)=0, (bc)=0, (cd)=0, (ab)=0, (a^2)=0, (b^2)=0, (d^2)=0, \\ (c^2) + 2(bd)=0.$$

Die Fläche gehört insbesondere dem speciellen Complexe mit der Axe a an, welche gleichzeitig singuläre Erzeugende und Doppellinie

ist. Die Gerade a mag die *Axe* der (Cayley'schen Linienfläche, genannt werden. Man hat ferner:

$$\begin{aligned}\varrho a_x &= 0, \\ \varrho b_x &= (bd) \lambda^3, \\ \varrho c_x &= (c^2) \lambda^2, \\ \varrho d_x &= (bd) \lambda.\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$4 b_x d_x - c_x^2 = 0.$$

Die sämtlichen Erzeugenden der Fläche gehören also einem Complexe zweiten Grades an. Da derselbe ein specieller ist, so folgt weiter: *Alle Erzeugenden der Fläche sind Tangenten eines Hyperboloides.* Die Erzeugenden des letzteren sind dargestellt durch

$$\varrho z_i = b_i + \lambda c_i + d_i \lambda^2.$$

Man erhält die Gleichung derjenigen developpabeln Flächen, welche zu Rückkehrcurven die Haupttangentialcurven der Fläche haben, wenn man nach den Vorschriften des § XII. die y als rationale Functionen von λ ausdrückt. Indessen ist es überflüssig, diese Rechnung selbst durchzuführen. Die Theorie der abwickelbaren Flächen vierter Ordnung zeigt nämlich, dass die Gleichungen

$$(12) \quad \varrho y_i = \frac{a_i}{4} + \frac{b_i}{3} \lambda + \frac{c_i}{2} \lambda^2 + d_i \lambda^3 + k_i \lambda^4,$$

in denen k einen Parameter vorstellt, welcher den Bedingungen

$$(13) \quad \begin{cases} (k^2) = 0, & (kd) = 0, & (kc) = 0, & (kb) = 0, \\ 3(ka) + (bd) = 0 \end{cases}$$

zu genügen hat, alle Haupttangentialcurven der Fläche repräsentiren. In der That kann man leicht verificiren, dass vermöge der Gleichungen (13) die Fläche (12) abwickelbar ist und jede ihrer Erzeugenden drei consecutive der Cayley'schen Fläche schneidet. *Die Haupttangentialcurven sind also vom vierten Range, dritter Ordnung und Classe*, wie das auch aus den allgemeinen Formeln des § XII. hervorgeht, es sind Raumcurven dritter Ordnung*).

Zugeordnet sind ferner der Developpabeln (12) alle windschiefen Flächen

$$z_i = \left(ka_i + \frac{b_i}{3}\right) + (kb_i + c_i)\lambda + (kc_i + 3d_i)\lambda^2 + (kd_i + 4k_i)\lambda^3.$$

Da für jede derselben (12) eine Haupttangentialcurve ist, so sind alle Flächen z ebenfalls Cayley'sche Linienflächen dritter Ordnung. Ihre Axen sind durch den Ausdruck

*) Vgl. die schon citirte Arbeit von Clebsch Crelle's Journal Bd. 67.

$$t_i = \frac{a_i}{4} + \frac{b_i}{3}k + \frac{c_i}{2}k^2 + d_i k^3 + k_i k^4$$

gegeben, welcher mit der rechten Seite der Gleichungen (12) identisch ist. Man hat daher den folgenden Satz:

Die Haupttangentialcurven der Cayley'schen Fläche dritter Ordnung werden von den Axen zweifach unendlich vieler anderer Cayley'scher Flächen dritter Ordnung gebildet, welche mit der gegebenen je eine Haupttangentialcurve gemein haben.

Andere specielle windschiefe Flächen dritten Grades existiren nicht. Denn die Bedingung, dass die durch den Ausdruck

$$\varrho x_i = a_i + \lambda b_i + \lambda^2 c_i + \lambda^3 d_i$$

dargestellte Fläche eine Doppelgeneratrix erhalte oder abwickelbar sei, führt auf das Verschwinden sämtlicher Invarianten der Fundamental-complexe, d. h. auf Kegel oder ebene Curven.

C. Windschiefe Flächen vierter Ordnung vom Geschlechte Null.

Ihre Erzeugenden sind gegeben durch die Gleichungen

$$\varrho x_i = a_i + b_i \lambda + c_i \lambda^2 + d_i \lambda^3 + e_i \lambda^4$$

unter Voraussetzung der Bedingungen:

$$(14) \quad \begin{cases} (a^2) = 0, & (ba) = 0, & (e^2) = 0, & (de) = 0, \\ 2(ac) + (b^2) = 0, & 2(ce) + (d^2) = 0, \\ (ad) + (bc) = 0, & (be) + (cd) = 0, \\ 2(ac) + (c^2) + 2(bd) = 0. \end{cases}$$

Die windschiefen Flächen vierter Ordnung vom Geschlechte Null gehören immer einem linearen Complexe γ_x an, dessen Coefficienten γ bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$(\gamma a) = 0, \quad (\gamma b) = 0, \quad (\gamma c) = 0, \quad (\gamma d) = 0, \quad (\gamma e) = 0.$$

Sie enthalten daher im Allgemeinen eine algebraische Haupttangentialcurve sechster Ordnung und Classe, zwölften Ranges mit zwölf stationären Tangenten vom Geschlechte Eins. Von den stationären Tangenten gehören vier den Cuspidalpunkten der Fläche an, während die anderen acht durch die Punkte der Fläche hindurchgehen, in denen ihre Erzeugenden von der Curve vierpunktiger Berührung berührt werden. Diese letztere ist vom achten Grade, vierundzwanzigsten Ranges vom Geschlechte Drei u. s. w.; sie kann zugleich angesehen werden als die vierfach zu zählende Berührungcurve der Linienfläche der vierpunktigen Tangenten, deren Grad ebenfalls acht ist. Die Doppelcurve der Fläche ist die Raumcurve dritter Ordnung, welche acht Erzeugende berührt. Die drei Doppelbenen der Fläche, welche von drei willkürlichen Punkten der Doppelcurve auslaufen, schneiden sich in demjenigen

Punkte der durch jene drei bestimmten Ebene, welcher das Centrum des in der letzteren liegenden dem Complexe γ angehörnden Büschels ist*). Jede Erzeugende bestimmt mit den vier Cuspidalpunkten der Fläche vier Ebenen, deren Doppelverhältniss dasselbe ist, wie das der vier Punkte, in denen sie selbst von den parabolischen Ebenen der Fläche getroffen wird.

Die Parameter $\lambda_1 \lambda_2$ zweier Erzeugenden x, y , welche sich in einem Punkte der Doppelcurve kreuzen, sind durch die Gleichung

$$\Psi(\lambda_1 \lambda_2) = 0$$

oder:

$$(15) \quad (ac) + (ad)(\lambda_1 + \lambda_2) + (ae)(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (bd)\lambda_1\lambda_2 + (be)\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2) + (ce)\lambda_1^2\lambda_2^2 = 0$$

verbunden. Wir bezeichnen (15) als Gleichung der Doppelcurve. Die singulären Erzeugenden sind durch die Gleichung

$$(16) \quad \Psi\lambda\lambda = (ac) + 2(ad)\lambda + 4(ae)\lambda^2 + 2(be)\lambda^3 + (bd)\lambda^4 + (ce)\lambda^4 = 0$$

gegeben, deren linke Seite zugleich das Geschlecht der Haupttangentialcurve charakterisirt. Man wird im Allgemeinen annehmen können, dass die Werthe $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ sich auf singuläre Erzeugende beziehen. Es treten dann zu den Gleichungen (14) noch die folgenden:

$$(17) \quad \begin{cases} (ac) = 0, & (ce) = 0, \\ (b^2) = 0, & (d^2) = 0. \end{cases}$$

Es können aber von den singulären Erzeugenden auch einige oder alle zusammenfallen.

Die Erzeugende $\lambda = 0$ zählt für zwei singuläre, wenn

$$\begin{aligned} (ad) &= 0, & (ac) &= 0, & (ce) &= 0, \\ (b^2) &= 0, & (bc) &= 0, & (d^2) &= 0. \end{aligned}$$

Treten zu diesen Gleichungen noch die folgenden

$$(be) = 0, \quad (cd) = 0,$$

so gilt auch $\lambda = \infty$ für zwei singuläre Erzeugende.

Die Erzeugende $\lambda = 0$ wird dagegen dreifach zu rechnen sein, wenn

$$\begin{aligned} (ac) &= 0, & (bd) &= 0, & 4(ac) + (bd) &= 0, \\ (b^2) &= 0, & (bc) &= 0, & 2(c^2) + (bd) &= 0. \end{aligned}$$

Sie kann endlich vierfach zählen, wenn

$$\begin{aligned} (ac) &= 0, & (ad) &= 0, & 4(ac) + (bd) &= 0, & (be) &= 0, \\ (b^2) &= 0, & (bc) &= 0, & 2(c^2) + (bd) &= 0, & (cd) &= 0. \end{aligned}$$

*) Es ist dies nur ein specieller Fall eines allgemeineren Theorems, welches für jede einem linearen Complexe angehörige windschiefe Fläche gilt.

In den letzteren Fällen ist die Haupttangentialcurve immer vom Geschlechte Null. Der lineare Complex, welchem die Fläche angehört, geht in keinem derselben in einen speciellen über. Eigentliche windschiefe Flächen der letzteren Art mit vier zusammenfallenden singulären Erzeugenden, welche einem speciellen linearen Complex angehören, giebt es überhaupt nicht. Denn es wäre dann der letzten Reihe von Gleichungen noch $(ae)=0$ hinzuzufügen, womit zugleich die Fläche in einen Kegel oder in eine ebene Curve degenerirt. Wir werden daher ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit zwei discrete singuläre Erzeugende voraussetzen dürfen, denen die Parameter $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ entsprechen.

An den Umstand, dass die Fläche immer einem linearen Complex angehört, kann man nun eine Classification derselben anknüpfen, welche, wie wir jetzt zeigen wollen, zu den nämlichen Resultaten führt, wie die Untersuchung, welche Herr Cremona über die verschiedenen Arten der windschiefen Flächen vierter Ordnung angestellt hat*).

In der That gehören alle Flächen vierter Ordnung $p=0$, für welche der lineare Complex ein allgemeiner ist, zur ersten Classe von Cremona. Die Fläche wird dagegen einem speciellen linearen Complex angehören, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} (a^2) & (ab) & (ac) & (ad) & (ae) \\ (ab) & (b^2) & (bc) & (bd) & (be) \\ (ac) & (cb) & (c^2) & (cd) & (ce) \\ (ad) & (db) & (dc) & (d^2) & (de) \\ (ae) & (be) & (ec) & (ed) & (e^2) \end{vmatrix}$$

verschwindet. Unter Berücksichtigung von (14) und (17) geht dieselbe über in:

$$(18) \quad (bd) [(ad)(be) - (ae)(bd)] [2(ad)(be) + (c^2)(ae)].$$

Die Gleichung der Doppelcurve enthält die Grössen $\lambda_1 \lambda_2$ nur in den Verbindungen $\lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_1 \lambda_2$. Sie wird daher in zwei lineare Factoren zerfallen, wenn ihre Determinante

$$\begin{vmatrix} 2(ac) & (ad) & (bd) \\ (ad) & 2(ae) & (be) \\ (bd) & (be) & 2(ec) \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$(19) \quad (bd) [(ad)(be) - (ae)(bd)] = 0$$

ist.

*) Cremona, Sulle superficie gobbe di quarto ordine A. dell' accademia di Bologna t. VIII.

Unter Voraussetzung von (19) zerfällt offenbar die Doppelcurve in zwei Gebilde niederer Ordnung. Die Gleichung (18) zeigt, dass die Fläche in diesem Falle immer eine Leitlinie, die Axe des Complexes γ_x besitzt. Die Doppelcurve zerfällt daher in die Doppelgerade γ und einen Doppelkegelschnitt. Es mag die Bemerkung hinzugefügt werden, dass die Doppelcurve sich auch in niedere Gebilde auflösen kann, ohne dass die Gleichung (15) sich in lineare Factoren spaltet. Ihre Theile bestehen dann aber immer aus algebraisch gleichwerthigen Gebilden, d. h. aus einzelnen Doppelgeraden.

Wir betrachten zunächst den Fall $(bd) = 0$. Die Gleichung der Doppelcurve ist dann

$$(\lambda_1 + \lambda_2) [(ad) + (ae)(\lambda_1 + \lambda_2) + be(\lambda_1\lambda_2)] = 0.$$

Die Parameter einer Erzeugenden, die sich in einem Punkte der Doppelcurve kreuzen, sind daher bestimmt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 &= 0, \\ (ad) + (ae)(\lambda_1 + \lambda_2) + (be)\lambda_1\lambda_2 &= 0.\end{aligned}$$

Von denselben bezieht sich die erstere auf die Doppelgerade der Fläche. Denn zwei Erzeugende $x'x''$ mit den Parametern λ und $-\lambda$:

$$\begin{aligned}\varrho_1 x'_i &= a_i + \lambda b_i + \lambda^2 c_i + \lambda^3 d_i + \lambda^4 e_i, \\ \varrho_2 x''_i &= a_i - \lambda b_i + \lambda^2 c_i - \lambda^3 d_i + \lambda^4 e_i\end{aligned}$$

geben

$$(20) \quad \varrho_1 x'_i - \varrho_2 x''_i = 2\lambda(b_i + \lambda^2 d_i) \equiv b_i + \mu d_i.$$

Die Fläche selbst ist auf vier gerade Linien $a b e d$ bezogen, von denen ab , bd , de sich in den Punkten O , O'' , O' schneiden. Die Gleichung (20) zeigt, dass in jeder Doppelebene, welche zur Doppelcurve $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ gehört, ein Strahl liegt, welcher dem Strahlbüschel bd angehört, also durch den festen Punkt O'' geht. Diese Doppelebenen hüllen also einen Kegel zweiten Grades mit der Spitze O'' ein, eine Eigenschaft, welche die Doppelgerade charakterisirt. Die Gerade OO' ist ferner die Axe des speciellen Complexes, dem die Fläche angehört, stellt also die Doppelgerade selbst dar. Sie ist zugleich die Axe der Doppelebenen, welche von den Punkten des Doppelkegelschnittes auslaufen. Die Punkte O , O' sind zwei Cuspidalpunkte der Fläche.

Die Ebene des Doppelkegelschnittes ist bestimmt durch die beiden anderen Cuspidalpunkte, welche aus der Gleichung

$$(ad) + 2(ae)\lambda + (be)\lambda^2 = 0$$

gefunden werden, und den Punkt, in welchem derselbe die Doppelgerade OO' schneidet. Der letztere ist dadurch charakterisirt, dass von ihm zwei Erzeugende auslaufen, deren Ebene durch die Doppel-

gerade selbst geht. Man bestimmt die Parameter dieser beiden Erzeugenden, indem man in der Gleichung

$$(a\bar{d}) + (ae)(\lambda_1 + \lambda_2) + (be)\lambda_1\lambda_2 = 0$$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ setzt, und erhält

$$\lambda^2 = \frac{(a\bar{d})}{(be)},$$

also

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{(a\bar{d})}{(be)}}.$$

Im zweiten Falle

$$(a\bar{d})(be) - (ae)(b\bar{d}) = 0$$

löst sich die Gleichung der Doppelcurve in die beiden Factoren

$$(21) \quad \begin{cases} (ab)(\lambda_1 + \lambda_2) + (be)\lambda_1\lambda_2 = 0, \\ (b\bar{d}) + (be)(\lambda_1 + \lambda_2) = 0 \end{cases}$$

auf. Der zweite Factor stellt wiederum die Doppelgerade vor. Bildet man nämlich den Ausdruck

$$\begin{aligned} \varphi_1 x'_i - \varphi_2 x''_i &= b_i + c_i(\lambda_1 + \lambda_2) + d_i((\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 3\lambda_1\lambda_2) \\ &\quad + e_i(\lambda_1 + \lambda_2)((\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2), \end{aligned}$$

so ergibt sich sofort, dass rechterhand nur eine lineare Function von $\lambda_1\lambda_2$ vorhanden ist, da $\lambda_1 + \lambda_2$ durch eine Constante ersetzt werden kann (21). Man kann daher schreiben:

$$\varphi_1 x'_i - \varphi_2 x''_i = \alpha_i + \beta_i \lambda_1 \lambda_2.$$

Der Durchschnittspunkt der beiden Geraden α, β ist daher wieder die Spitze eines Kegels, der von den Doppelgeraden gebildet wird, die von der Doppelgeraden:

$$(b\bar{d}) + (be)(\lambda_1 + \lambda_2) = 0$$

auslaufen. Doppelgerade und Doppelkegelschnitt haben auch hier einen Punkt gemein, dessen Erzeugende durch das System von Werthen λ_1, λ_2 dargestellt sind, welches die beiden Gleichungen (21) befriedigt.

Die Gleichung (19) charakterisirt daher die Flächen der zweiten Classe von Cremona.

Wenn endlich in (18)

$$2(a\bar{d})(be) + (c^2)(ae) = 0,$$

so gehört die Fläche einem speciellen linearen Complexe an, während die Doppelcurve nicht in ungleichartige Gebilde zerfällt. Es ist dann entweder eine einfache Leitlinie γ vorhanden, und die Doppelcurve eine Raumcurve dritten Grades, während die Doppelgeraden ein dreifaches Ebenenbüschel mit der Axe γ bilden — Cremona VII — oder die Leitlinie ist dreifach und die Doppeldeveloppable eine Fläche dritter Classe — Cremona VIII —. Beide Fälle stehen sich dualistisch in der folgenden Weise gegenüber. Im ersten liegen immer

je drei Erzeugende in einer durch die Leitlinie gehenden Ebene, im zweiten gehen sie durch einen gemeinschaftlichen, auf jener Leitlinie liegenden Punkt.

Die Axe des speciellen Complexes kann endlich eine Erzeugende der Fläche sein. Unter der Voraussetzung, dass $\lambda = 0$ dieselbe darstelle, hat man dann die Bedingungen:

$$\begin{aligned}(a^2) &= 0, & (ab) &= 0, & (ac) &= 0, & (ad) &= 0, & (ae) &= 0, \\(e^2) &= 0, & (de) &= 0, & (b^2) &= 0, & (bc) &= 0, \\2(bd) + (c^2) &= 0, & (d^2) &= 0, & (ce) &= 0.\end{aligned}$$

Die Gleichung der Doppelcurve ist dann

$$(bd) + (be)(\lambda_1 + \lambda_2) = 0,$$

während zwei der singulären Erzeugenden mit der Erzeugenden a co-incidiren.

Je zwei Erzeugende, die sich in einem Punkte der Doppelcurve schneiden, liegen dann entweder mit a in einer Ebene, die Doppeldeveloppable besteht aus dem dreifachen Ebenenbüschel a , oder je zwei Erzeugende dieser Art gehen durch einen Punkt von a , die Doppelcurve besteht dann aus der dreifach zählenden Geraden a , während die Doppeldeveloppable ein Kegel zweiten Grades ist, zu welchem ein Ebenenbüschel durch a hinzu zu rechnen ist. Es sind dies die Fälle, welche bei Cremona durch III und IV bezeichnet sind. Die windschiefen Flächen vierter Ordnung $p = 0$ können auch unendlich vielen linearen Complexen angehören. Dazu ist erforderlich, dass einer der Coefficienten der Gleichung (14) eine lineare Combination der anderen vier ist. In allen diesen Fällen hat die Fläche zwei Leitgerade, alle Haupttangencurven sind algebraische Curven, deren Tangenten sich im Allgemeinen rational durch elliptische Functionen ausdrücken lassen. Es ergeben sich nun die folgenden Fälle:

1) *Die Fläche hat eine Doppel- oder Rückkehrgeneratrix.* Um die Doppelgeneratrix in Evidenz treten zu lassen, nehmen wir an, dass die Parameter $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ sich auf dieselbe beziehen. Die Gleichung der Fläche ist dann:

$$qx_i = a_i + b_i\lambda + c_i\lambda^2 + d_i\lambda^3 + a_i\lambda^4,$$

während:

$$\begin{aligned}(a^2) &= 0, & (ab) &= 0, & (cd) &= 0, & (ad) &= 0, & (bc) &= 0, \\(b^2) + 2(ac) &= 0, \\(c^2) + 2(bd) &= 0, \\(d^2) + 2(ac) &= 0.\end{aligned}$$

Die beiden Leitlinien $\gamma' \gamma''$, welche die Doppelcurve vertreten, sind bestimmt durch

$$(22) \quad (\gamma^2) = 0, \quad (\gamma a) = 0, \quad (\gamma b) = 0, \quad (\gamma c) = 0, \quad (\gamma d) = 0.$$

Beide sind discrete Doppellinien der Fläche, so lange die Determinante von (22) nicht verschwindet. Die Fläche hat vier Cuspidalpunkte, bestimmt durch die Gleichung:

$$\Psi \lambda \lambda = a c (1 + \lambda^4) + (b d) \lambda^2 = 0.$$

Den Rang der Haupttangencurven bestimmt man durch die Zahl ihrer Tangenten, welche eine willkürliche Gerade z schneiden, d. h. indem man das Eliminationsresultat der Gleichungen

$$\begin{aligned} \left(y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2}\right) &= 0, \quad \left(y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \mu}\right) = 0, \quad \left(y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2}\right) = 0, \\ (\gamma z) &= 0, \quad y \gamma' + \varrho (\gamma \gamma'') = 0, \\ (\gamma^2) &= 0 \end{aligned}$$

bildet. Man erhält damit eine Controle für die Formeln des § XII., welche ebenfalls den Rang bestimmen. Es ergibt sich so:

Die Haupttangencurven auf den windschiefen Flächen $p = 0$ mit Doppelgeneratrix sind vom Geschlechte Eins, sechster Ordnung und Classe, zwölften Ranges, mit zwölf stationären Tangenten, von denen vier in die Cuspidalpunkte der Fläche fallen. Die Fläche hat daher vier hyperbolische Erzeugende.

Die Parameter der letzteren bestimmt man auf folgende Weise. Damit die Gleichungen:

$$\left(y \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \lambda^3}\right) = 0, \quad \left(y \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \lambda^2 \partial \mu}\right) = 0, \quad \left(y \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \mu^2 \partial \lambda}\right) = 0, \quad \left(y \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \mu^3}\right) = 0, \quad (\gamma^2) = 0,$$

oder

$$(23) \quad 4a_y + \lambda b_y = 0, \quad 3b_y + 2c_y \lambda = 0, \quad 2c_y + 3\lambda d_y = 0, \quad d_y + 4a_y \lambda = 0$$

unendlich viele Werthe von y zulassen, müssen die sechs Gleichungen:

$$\mu_1(4a_i + b_i \lambda) + \mu_2(3b_i + 2c_i \lambda) + \mu_3(2c_i + 3\lambda d_i) + \mu_4(d_i + 4a_i \lambda) = 0$$

bestehen können. Dies führt auf das Verschwinden einer Determinante von vier homogenen Gleichungen für die Coefficienten μ , welche man erhält, wenn man die letzteren Gleichungen mit $a_i b_i c_i d_i$ multiplicirt und nach i summirt, d. h. auf die Bedingung:

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda & 1 & 0 \\ (b^2)\lambda & 3(b^2) & 3(bd)\lambda & (bd) \\ 4(ac) & 2(c^2)\lambda & 2(c^2) & 4(ac)\lambda \\ (bd)\lambda & 3(bd) & 3(d^2)\lambda & (d^2) \end{vmatrix} = 0,$$

welche reducirt die Gleichung

$$\lambda^4 = 1$$

liefert. Es ist übrigens von vornherein evident, dass die Gleichungen (23) für die Werthe

$$\lambda = \pm 1, \quad \lambda = \pm i$$

nur drei von einander wesentlich verschiedene darstellen. *Diese Flächen bilden die fünfte Classe von Cremona.*

Von den Flächen der fünften Cremona'schen Classe sind nicht wesentlich diejenigen verschieden, welche eine Rückkehrgeneratrix und zwei discrete Leitlinien besitzen. Aber in Ansehung der Haupttangentialcurven und der hyperbolischen Erzeugenden zeigen dieselben ganz andere Eigenschaften, wie wir jetzt nachweisen werden.

Die Gleichung der Flächen mit Rückkehrgeneratrix a kann in der Form

$$qx_i = a_i (1 + \lambda) + c_i \lambda^2 + d_i \lambda^3 + e_i \lambda^4$$

geschrieben werden, während

$$\begin{aligned} (a^2) &= 0, \quad (e^2) = 0, \quad (de) = 0, \quad (ac) = 0, \quad (ad) = 0, \\ 2(ce) + (d^2) &= 0, \\ 2(ae) + (c^2) &= 0, \\ (ae) + (cd) &= 0, \quad 2(cd) = -2(ae) = (c^2). \end{aligned}$$

Man kann zu diesen Bedingungen noch $(d^2) = 0, (ec) = 0$ hinzufügen. Die Fläche hat zwei singuläre Erzeugende, von denen die eine dann dem Werthe $\lambda = \infty$ entspricht. Sie ist auf die drei Geraden a, d, e bezogen, d wird von a und e geschnitten. Durch den Cuspidalpunkt e, d geht die eine Leitlinie γ' , durch den Punkt (ad) die andere. Zu den vierpunktigen Tangenten gehören zunächst die Linien, welche den drei Complexen

$$a_y = 0, \quad d_y = 0, \quad c_y = 0$$

gemeinschaftlich sind. Dieselben bilden aber kein Hyperboloid, sondern zwei ebene Büschel, von denen das eine die Gerade $a\gamma'$, das andere $a\gamma''$ enthält. *Die Rückkehrgeneratrix ist daher keine eigentliche hyperbolische Erzeugende, vielmehr hat die Fläche nur die Erzeugende $\lambda = -4$ zur hyperbolischen.*

Zur Untersuchung des Geschlechtes der Haupttangentialcurven ist der Ausdruck $\Psi \lambda \lambda$ zu bilden. Da derselbe den Werth

$$(cd) 4 \lambda^2 (2 \lambda + 1)$$

annimmt, so sind die Haupttangentialcurven rational.

Man erhält ferner als Rang derselben die Zahl 8. *Sie sind daher rationale Curven fünfter Ordnung und Classe achten Ranges, mit vier stationären Tangenten und sechs scheinbaren Doppelpunkten.*

Wir kehren jetzt wieder zu dem allgemeineren Falle einer Doppelgeneratrix zurück. Die beiden Doppelgeraden $\gamma' \gamma''$ werden coincidiren, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & (ac) & 0 \\ 0 & (b^2) & 0 & (bd) \\ (ac) & 0 & (c^2) & 0 \\ 0 & (bd) & 0 & (d^2) \end{vmatrix}$$

oder:

$$(ac)^2 (b^2) (d^2) - (bd)^2 = 0$$

verschwindet. Es sind demnach wieder zwei Fälle zu unterscheiden.

Wenn *erstens*

$$(b^2) (d^2) - (bd)^2 = 0,$$

so folgt

$$(bd) = \pm (b^2).$$

Unter Voraussetzung des positiven Zeichens ist die Gleichung der Doppelcurve

$$(\lambda_1 \lambda_2 - 1)^2 = 0.$$

Die beiden Erzeugenden $x' x''$, welche sich in einem Punkte derselben kreuzen, sind daher:

$$q, x_i' = a_i + b_i \lambda + c_i \lambda^2 + d_i \lambda^3 + a_i \lambda^4,$$

$$q, x_i'' = a_i \lambda^4 + b_i \lambda^3 + c_i \lambda^2 + d_i \lambda + a_i.$$

Daraus ergibt sich

$$q' x_i' - q, x_i'' = b - d.$$

Die Doppelene enthält daher immer den festen Strahl $b - d$, welcher zugleich die allen linearen Complexen, denen die Fläche angehört, gemeinschaftliche Leitlinie bildet. *Die Fläche besitzt daher die Doppelgeneratrix a und zwei dieselbe schneidende unendlich nahe Doppelgeraden $b - d$, welche immer mit den beiden sich auf ihnen kreuzenden Erzeugenden in einer Ebene liegen. Von den vier hyperbolischen Erzeugenden*

$$\lambda = \pm 1, \quad \lambda = \pm i$$

sind die beiden ersten zu singulären Erzeugenden geworden. Die Haupttangencurven sind daher rationale Curven vierter Ordnung und Classe, sechsten Ranges mit zwei stationären Tangenten.

Diese Flächen bilden die *sechste Classe* bei Cremona, es sind dieselben, auf welche schon oben bei Betrachtung der Haupttangencurven der windschiefen Fläche dritter Ordnung aufmerksam gemacht wurde.

Ist dagegen *zweitens*:

$$(ac) = 0,$$

also

$$(b^2) = 0, \quad (d^2) = 0,$$

so coincidirt die Doppelgeneratrix mit den beiden unendlich nahen Leitlinien. *Die Fläche hat dann vier hyperbolische Erzeugende, ihre*

Haupttangentialcurven sind fünfter Ordnung und Classe, achten Ranges mit vier stationären Tangenten (Cremona X).

Auch die Fläche mit Rückkehrgeneratrix kann unendlich nahe Leitlinien erhalten. Dabei treten zwei Fälle auf, die den eben behandelten analog sind. Im ersten vereinigt sich die hyperbolische Erzeugende mit der singulären, die Haupttangentialcurven sind dann Raumcurven dritter Ordnung, im zweiten ist die Rückkehrgeneratrix mit den Leitlinien vereinigt und noch eine hyperbolische Erzeugende vorhanden, die Haupttangentialcurven sind rationale Curven vierter Ordnung und Classe, sechsten Ranges mit zwei stationären Tangenten.

2) *Die Fläche enthält keine Doppelerzeugende.* Von den beiden Leitlinien ist dann die eine dreifach, die andere einfach (Cremona IX).

Wir erhalten demnach die folgende *Uebersicht* über die windschiefen Flächen vierter Ordnung vom Geschlechte Null:

A. *Die Fläche gehört einem linearen Complex an.*

1) *Der Complex ist allgemein Cremona I,*

2) *der Complex ist speciell.*

a) *Die Doppelcurve zerfällt in ungleichartige Gebilde, Cremona II.*

b) *Die Doppelcurve zerfällt nicht oder in gleichartige Gebilde, Cremona VII, VIII.*

c) *Die Axe des speciellen Complexes ist Erzeugende der Fläche Cremona III, IV.*

B. *Die Fläche gehört unendlich vielen linearen Complexen an.*

1) *Das Complexbüschel hat discrete Directricen:*

a) *Flächen mit Doppel- oder Rückkehrgeneratrix, Cremona V,*

b) *Fläche ohne Doppelerzeugende, Cremona IV.*

2) *Das Complexbüschel hat zusammenfallende Directricen.*

a) *Fläche mit Doppel- oder Rückkehrerzeugenden, welche nicht mit den beiden unendlich nahen Leitlinien coincidirt, Cremona VI.*

b) *Fläche mit Doppel- oder Rückkehrgeneratrix, welche mit den beiden Leitlinien coincidirt, Cremona X.*

Der Vollständigkeit halber sei hinzugefügt, dass die windschiefen Flächen vierter Ordnung vom Geschlechte Eins durch den Schnitt dreier Complexe erzeugt werden, von denen der erste zweiten Grades, die beiden anderen linear sind. Man hat daher zwei Classen dieser windschiefen Flächen zu unterscheiden, je nachdem die Directricen der beiden linearen Complexe verschieden sind oder zusammenfallen, wie dies auch Herr Cremona gethan hat. Die Haupttangentialcurven der ersten Classe sind algebraische Curven vom Geschlechte Acht, achter Ordnung und Classe, vierundzwanzigsten Ranges, mit vierzig stationären Tan-

genten, von denen sich acht auf die singulären, die übrigen zweiunddreissig auf die sechzehn hyperbolischen Erzeugenden der Fläche beziehen. Die Haupttangentialcurven der zweiten Classe sind vom Geschlechte Eins, sechster Ordnung und Classe, zwölften Ranges mit zwölf stationären Tangenten, von denen die zwölf hyperbolischen Erzeugenden der Fläche entsprechen.

Die *abwickelbaren* Flächen vierter Ordnung (vom Geschlechte Null) besitzen, da sie ebenfalls einem linearen Complexe angehören, eine in sich dualistische Rückkehrcurve. Die letztere kann daher nur die Raumcurve dritter Ordnung sein. Zugeordnet sind diesen Flächen Cayley'sche Linienflächen dritter Ordnung, welche die Rückkehrcurve zur Haupttangentialcurve haben. Diese Beziehung ist es, vermöge der man in den Stand gesetzt ist, den Ausdruck XIV, (12) für die Haupttangentialcurven der Cayley'schen Fläche dritter Ordnung ohne weitere Rechnung hinzuschreiben.

Es ist ersichtlich, wie man in der bisher eingeschlagenen Richtung weiter gehen kann. Die windschiefen Flächen fünfter Ordnung $p=0$ würden zunächst in drei Classen zerfallen, allgemeine, die einem linearen Complexe nicht angehören, zweitens Flächen eines linearen Complexes, endlich Flächen, die unendlich vielen Complexen angehören. Man übersieht ohne Weiteres, wie jeder dieser Fälle wieder eine Reihe besonderer einschliesst. Endlich treten noch abwickelbare Flächen auf, ihre Rückkehrcurven sind vierter Ordnung und Classe. Dieselben sind zugleich Haupttangentialcurven der ihnen zugeordneten Flächen vierten Grades, gehören aber nicht zur Classe der vorhin behandelten Haupttangentialcurven, da die Fläche fünfter Ordnung einem linearen Complexe im Allgemeinen nicht angehört.

Göttingen, 6. Februar 1874.