Studio sulle superficie elicoidali.

(Memoria di GEMINIANO PIRONDINI, a Parma.)

§ 1.

Le coordinate dei punti di una linea qualunque dello spazio si possono esprimere in funzione di un parametro qualunque s per mezzo delle relazioni

$$\xi = R \cos \psi, \quad \eta = R \sin \psi, \quad \zeta = \varphi(s),$$

essendo R , φ , ψ tre funzioni arbitrarie di s . Se s è l'arco di L , dobbiamo avere

$$\sum \left(\frac{d\zeta}{ds} \right)^2 = 1,$$

la quale ci dà:

$$\psi' = \frac{\sqrt{1 - (R'^2 + \varphi'^2)}}{R}.$$

Moltiplicando per ds ed integrando, si ottiene:

$$\psi = \int \frac{\sqrt{1 - (R'^2 + \varphi'^2)}}{R} ds,$$

dove si è messo a zero la costante d'integrazione, il che non nuoce alla generalità. Possiamo dunque dire « *le coordinate dei punti di una linea qualunque dello spazio, si esprimono in funzione dell'arco per mezzo delle relazioni:*

$$\xi = R \cos \int \frac{\sqrt{1 - (R'^2 + \varphi'^2)}}{R} ds, \quad \eta = R \sin \int \frac{\sqrt{1 - (R'^2 + \varphi'^2)}}{R} ds, \quad \zeta = \varphi(s), \quad (1)$$

dove R e φ sono due funzioni arbitrarie di s ».

Alla linea L si dia un movimento elicoidale di parametro p intorno all'asse delle z ; se sull'elicoide generato la L viene ad essere traiettoria orto-

gonale delle eliche, è soddisfatta, come ho dimostrato altrove (*), la relazione:

$$\xi \frac{d\eta}{ds} - \eta \frac{d\xi}{ds} + p \frac{d\zeta}{ds} = 0, \quad (1')$$

la quale, in causa delle (1), diviene:

$$R\sqrt{1 - (R'^2 + \varphi'^2)} + p\varphi' = 0,$$

da cui si deduce:

$$\varphi' = R\sqrt{\frac{1 - R'^2}{p^2 + R^2}},$$

che coll'integrazione offre:

$$\varphi = \int R\sqrt{\frac{1 - R'^2}{p^2 + R^2}} \cdot ds.$$

Se dunque sopra un elicoide chiamiamo *geodetiche principali* le traiettorie ortogonali delle eliche, avremo coll'applicazione delle (1) « le coordinate dei punti di una geodetica principale d'un elicoide, di parametro p e il cui asse coincide coll'asse delle z , si esprimono per l'arco mediante le equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= R \cos \int \frac{p}{R} \sqrt{\frac{1 - R'^2}{p^2 + R^2}} \cdot ds, & \eta &= R \sin \int \frac{p}{R} \sqrt{\frac{1 - R'^2}{p^2 + R^2}} \cdot ds, \\ \zeta &= - \int R \sqrt{\frac{1 - R'^2}{p^2 + R^2}} \cdot ds. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Le coordinate d'un punto qualunque della superficie generata da questa linea, che si muove di moto elicoidale di parametro p intorno all'asse delle z , sono:

$$x = \xi \cos v - \eta \sin v, \quad y = \xi \sin v + \eta \cos v, \quad z = \zeta + pv,$$

essendo v l'angolo che un piano passante per l'asse e invariabilmente legato all'elicoide fa col piano coordinato $y = 0$.

Il quadrato dS^2 dell'elemento lineare della superficie, riferito alle linee coordinate $s = \text{cost.}$ (eliche), $v = \text{cost.}$ (generatrici) ha la forma seguente:

$$dS^2 = ds^2 + (p^2 + R^2)dv^2.$$

Per il quadrato dell'elemento lineare di un altro elicoide, riferito alle eliche e alle geodetiche principali, abbiamo:

$$dS_1^2 = ds_1^2 + (p_1^2 + R_1^2)dv_1^2;$$

(*) Giornale di BATTAGLINI, 1884.

per cui le condizioni d'applicabilità delle due superficie sono espresse come segue:

$$ds_1 = ds, \quad (p_1^2 + R_1^2) dv_1^2 = (p^2 + R^2) dv^2.$$

La prima può sempre soddisfarsi contando gli archi s_1, s delle due geodetiche principali corrispondenti a partire da due eliche corrispondenti. L'altra condizione può scriversi:

$$\frac{p_1^2 + R_1^2}{p^2 + R^2} = \frac{dv^2}{dv_1^2},$$

e siccome il 1.^o membro è una funzione di s e il 2.^o una funzione di v , deve essere ognuno dei due membri costante. Dunque

$$\sqrt{p_1^2 + R_1^2} = K \sqrt{p^2 + R^2}, \quad v_1 = \frac{1}{K} v,$$

la prima delle quali ci dà:

$$R_1 = \sqrt{K^2(p^2 + R^2) - p_1^2}.$$

Sostituendo questo valore di R_1 al posto di R nelle formole (2), si avranno le coordinate dei punti della linea L_1 corrispondente ad L . Potremo dunque enunciare il teorema « se alla curva L rappresentata dalle equazioni (2) e alla curva L_1 rappresentata dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sqrt{K^2(p^2 + R^2) - p_1^2} \cdot \cos \left\{ \frac{p}{K} \int \frac{1}{K^2(p^2 + R^2) - p_1^2} \sqrt{\frac{K^2(p^2 + R^2) - K^4 R^2 R'^2 - p_1^2}{p^2 + R^2}} \cdot ds \right\} \\ \eta_1 &= \sqrt{K^2(p^2 + R^2) - p_1^2} \cdot \sin \left\{ \frac{p}{K} \int \frac{1}{K^2(p^2 + R^2) - p_1^2} \sqrt{\frac{K^2(p^2 + R^2) - K^4 R^2 R'^2 - p_1^2}{p^2 + R^2}} \cdot ds \right\} \\ \zeta_1 &= - \frac{1}{K} \int \sqrt{\frac{K^2(p^2 + R^2) - K^4 R^2 R'^2 - p_1^2}{p^2 + R^2}} \cdot ds, \end{aligned}$$

si danno due movimenti elicoidali di parametri p e p_1 intorno all'asse delle z , esse generano due elicoidi applicabili, sopra i quali esse sono le traiettorie ortogonali delle eliche (e quindi curve corrispondenti) ».

Facendo nelle formole che precedono $p = 0$, ovvero $p_1 = 0$, ovvero contemporaneamente $p = 0, p_1 = 0$ si hanno rispettivamente le formole relative alla deformazione di una superficie di rivoluzione in un elicoidi, di un elicoidi in una superficie di rivoluzione, di una superficie di rivoluzione in un'altra della stessa specie. Le formole ottenute mostrano che un'elicoidi può deformarsi con sole flessioni in un'altro elicoidi e ciò può farsi in un numero doppiamente infinito di modi, potendosi arbitrariamente scegliere il parametro p_1 del nuovo elicoidi e il modulo K della deformazione.

Se il teorema precedente basta per determinare la forma del nuovo elicoide, applicabile al primo, non basta però per determinare la nuova forma che, in forza della deformazione, acquista una determinata linea situata sulla superficie. Per completare questa parte, si consideri la linea generale (1) alla quale daremo un movimento elicoidale di parametro p intorno all'asse delle z ; l'elemento lineare della superficie, riferito alle elicoidali ($v = \text{cost.}$) e alle linee mobili ($v = \text{cost.}$), diviene:

$$dS^2 = ds^2 + 2(\xi\eta' - \xi'\eta + p\xi')dsdv + (p^2 + \xi^2 + \eta^2)dv^2,$$

cioè:

$$dS^2 = ds^2 + 2[R\sqrt{1 - (R^2 + \varphi'^2)} + p\varphi']dsdv + (p^2 + R^2)dv^2.$$

Per un'altra superficie della stessa specie, avremo:

$$dS_1^2 = ds_1^2 + 2[R_1\sqrt{1 - (R_1^2 + \varphi_1'^2)} + p_1\varphi_1']ds_1dv_1 + (p_1^2 + R_1^2)dv_1^2,$$

e siccome si è visto come la condizione $ds = ds_1$ possa sempre soddisfarsi, rimangono da soddisfare le due relazioni:

$$(p^2 + R^2)dv^2 = (p_1^2 + R_1^2)dv_1^2,$$

$$[R\sqrt{1 - (R^2 + \varphi'^2)} + p\varphi']dv = [R_1\sqrt{1 - (R_1^2 + \varphi_1'^2)} + p_1\varphi_1']dv_1.$$

La prima di esse ci dà

$$\sqrt{R_1^2 + p_1^2} = K\sqrt{R^2 + p^2}, \quad v_1 = \frac{v}{K},$$

essendo K una costante, d'onde:

$$R_1 = \sqrt{K^2(R^2 + p^2) - p_1^2}. \quad (3)$$

La condizione che ancora ci rimane da verificare può scriversi

$$\frac{R\sqrt{1 - (R^2 + \varphi'^2)} + p\varphi'}{R_1\sqrt{1 - (R_1^2 + \varphi_1'^2)} + p_1\varphi_1'} = \frac{dv_1}{dv} = \frac{1}{K},$$

dalla quale si deduce

$$(p_1^2 + R_1^2)\varphi_1'^2 - 2p_1[KR\sqrt{1 - (R^2 + \varphi'^2)} + pK\varphi']\varphi_1' + \\ + [KR\sqrt{1 - (R^2 + \varphi'^2)} + pK\varphi']^2 - R_1^2(1 - R_1'^2) = 0,$$

e questa coll'applicazione di (3) si trasforma nell'altra:

$$K^2(R^2 + p^2)\varphi_1'^2 - 2p_1[KR\sqrt{1 - (R^2 + \varphi'^2)} + pK\varphi']\varphi_1' + \\ + [KR\sqrt{1 - (R^2 + \varphi'^2)} + pK\varphi']^2 - [K^2(R^2 + p^2) - K^4R^2R'^2 - p_1^2] = 0.$$

Ricavando da questa relazione φ'_1 e poi moltiplicando ambi i membri dell'eguaglianza che si ottiene per ds , si ha poi coll'integrazione:

$$\varphi_1 = \frac{1}{K} \int \frac{p_1 \{ p \varphi' + R \sqrt{1 - (R'^2 + \varphi'^2)} \} \pm \sqrt{K^4 (R^2 + p^2) R^2 R'^2 - [K^2 (R^2 + p^2) - p_1^2] [R^2 + p^2 + \{ R \sqrt{1 - (R'^2 + \varphi'^2)} + p \varphi' \}^2]}}{R^2 + p^2} ds$$

Possiamo dunque enunciare il teorema « se alla linea rappresentata dalle (1) e a quella rappresentata dalle equazioni che si ottengono dalle (1), sostituendo a R e φ le quantità R_1 e φ_1 espresse rispettivamente dalle (3), (4) si dànno due movimenti elicoidali di parametri p e p_1 intorno all'asse delle z , descrivono due elicoidi applicabili sui quali esse sono linee corrispondenti ».

Dalle formole trovate per le altezze dei punti corrispondenti delle geodetiche principali corrispondenti di due elicoidi applicabili, si deduce che nella deformazione di un elicoidale in un altro i punti della superficie subiscono generalmente delle traslazioni nel senso dell'asse. Si può vedere se esistono degli elicoidi nei quali non abbia luogo tale spostamento; mettendo la condizione $\zeta_1 = \zeta$, otteniamo facilmente

$$R R' = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{p^2 K^2 - p_1^2}{K^2 - 1}}.$$

Moltiplicando per ds e integrando, otteniamo:

$$R^2 = \frac{2}{K} \sqrt{\frac{p^2 K^2 - p_1^2}{K^2 - 1}} \cdot s,$$

la quale formola, dandoci l'espressione di R in funzione di s , determina col mezzo delle (2) le coordinate dei punti della curva che genera l'elicoidale domandato.

§ 2.

In un elicoidale qualunque conducendo un piano normale all'asse, si ottiene una curva piana detta sezione retta; conducendo invece un piano qualunque per l'asse, si ottiene una curva piana detta profilo meridiano. Dando alla sezione retta o al profilo meridiano di un elicoidale il moto elicoidale per il quale la superficie striscia su sè stessa, le dette curve descrivono questa stessa superficie. Proponiamoci di vedere se in due elicoidi applicabili le sezioni rette possono essere curve corrispondenti.

Le coordinate dei punti di una linea l posta nel piano $z = 0$ si ottengono

dalle (1) facendovi $\varphi(s) = 0$; esse sono dunque

$$\xi = R \cos \int \frac{\sqrt{1-R'^2}}{R} ds, \quad \eta = R \sin \int \frac{\sqrt{1-R'^2}}{R} ds. \quad (5)$$

Se a tale curva l si dà un movimento elicoidale di parametro p intorno all'asse delle z , si ha per il quadrato dell'elemento lineare della superficie generata:

$$dS^2 = ds^2 + 2(\xi\eta' - \xi'\eta)dsdv + (\xi^2 + \eta^2 + p^2)dv^2,$$

cioè:

$$dS^2 = ds^2 + 2R\sqrt{1-R'^2}dsdv + (p^2 + R^2)dv^2.$$

Per l'elicoide generato da un'altra curva piana l_1 posta in un piano normale all'asse, abbiamo:

$$dS_1^2 = ds_1^2 + 2R_1\sqrt{1-R_1'^2}ds_1dv_1 + (p_1^2 + R_1^2)dv_1^2.$$

Dobbiamo dunque avere:

$$\begin{aligned} ds_1 &= ds, & R_1\sqrt{1-R_1'^2} \cdot dv_1 &= R\sqrt{1-R'^2}dv, \\ (R_1^2 + p_1^2)dv_1^2 &= (R^2 + p^2)dv^2, \end{aligned}$$

la prima delle quali si è visto come si possa sempre soddisfare; le altre ci danno:

$$v_1 = \frac{v}{K}, \quad R_1 = \sqrt{K^2(R^2 + p^2) - p_1^2}, \quad R_1\sqrt{1-R_1'^2} = KR\sqrt{1-R'^2}.$$

Eliminando R_1 fra queste due ultime eguaglianze, abbiamo

$$RR' = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{K^2p^2 - p_1^2}{K^2 - 1}};$$

moltiplicando per ds ed integrando, si ricava

$$R^2 = \frac{2}{K} \sqrt{\frac{K^2p^2 - p_1^2}{K^2 - 1}} \cdot s,$$

ciò che riduce R_1 alla forma:

$$R_1^2 = 2K \sqrt{\frac{K^2p^2 - p_1^2}{K^2 - 1}} s + (K^2p^2 - p_1^2).$$

Determinata l'espressione di R per l'arco, riesce facile trovare l'elicoide domandato; ma è più conveniente determinare la curva piana sezione retta dell'elicoide. Tale curva ha la proprietà espressa dalla relazione $R = \sqrt{ms}$ fra il

raggio vettore e l'arco. Ora dalle (5), che nel nostro caso divengono:

$$\xi = \sqrt{ms} \cos \left\{ \frac{1}{2\sqrt{m}} \int \frac{\sqrt{4s-m}}{s} ds \right\}, \quad \eta = \sqrt{ms} \sin \left\{ \frac{1}{2\sqrt{m}} \int \frac{\sqrt{4s-m}}{s} ds \right\},$$

calcolando le derivate seconde rapporto all'arco, otteniamo:

$$\xi'' = -\frac{1}{\sqrt{ms}} \cos \omega - \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4s-m}} \sin \omega, \quad \eta'' = -\frac{1}{\sqrt{ms}} \sin \omega + \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4s-m}} \cos \omega,$$

quando si ponga:

$$\omega = \frac{1}{2\sqrt{m}} \int \frac{\sqrt{4s-m}}{s} ds.$$

Quadrando e sommando, si ha per la curvatura $\frac{1}{\rho}$ della linea:

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{4}{m(4s-m)}, \quad \text{d'onde: } \rho = \sqrt{ms - \left(\frac{m}{2}\right)^2},$$

che è l'equazione intrinseca di una sviluppante di cerchio di raggio $\frac{m}{2}$. L'elicoide richiesto ha dunque per sezione retta una sviluppante di cerchio; ora è noto che l'elicoide sviluppabile ha appunto un cerchio per sezione retta, vediamo dunque se ha luogo la proprietà reciproca. Se

$$x = a \cos \frac{\sigma}{a}, \quad y = a \sin \frac{\sigma}{a},$$

sono le coordinate d'un punto qualunque di un cerchio espresse per l'arco σ , le coordinate ξ, η di un punto di una sua sviluppante sono:

$$\xi = x - \sigma x' = a \cos \frac{\sigma}{a} + \sigma \sin \frac{\sigma}{a}, \quad \eta = y - \sigma y' = a \sin \frac{\sigma}{a} - \sigma \cos \frac{\sigma}{a},$$

da cui si deduce colla derivazione:

$$\xi' = \frac{\sigma}{a} \cos \frac{\sigma}{a}, \quad \eta' = \frac{\sigma}{a} \sin \frac{\sigma}{a}.$$

Il quadrato dell'elemento lineare della superficie generata dalla sviluppante di cerchio che si muove di moto elicoidale di parametro p intorno all'asse delle z , ha la forma:

$$dS^2 = \frac{\sigma^2}{a^2} d\sigma^2 + 2 \frac{\sigma^2}{a} d\sigma dv + (a^2 + p^2 + \sigma^2) dv^2,$$

colla quale, calcolando la curvatura K della superficie, si trova $K=0$.

Perciò « se una sviluppante di cerchio si muove di moto elicoidale intorno alla perpendicolare al suo piano che passa per il centro del cerchio evoluta, essa descrive sempre un elicoide sviluppabile ».

Applicando dunque questo teorema al caso che ci occupa, abbiamo « i soli elicoidi, nei quali le sezioni rette sono curve corrispondenti in applicabilità, sono quelli sviluppabili ».

Il calcolo che precede mette in vista una notevole proprietà della sviluppante di cerchio; infatti la relazione che ci dà p può scriversi:

$$\rho = \sqrt{m \left(s - \frac{m}{4} \right)}.$$

Tale formola, confrontata con quella che ci dà R , ci offre:

$$(R)_{s=s_0} = (\rho)_{s=s_0 + \frac{m}{4}},$$

e questa dimostra il teorema « sopra una sviluppante di cerchio a un punto qualunque A corrisponde sempre un altro punto B colla condizione che il raggio vettore della linea nel punto A (contato dal centro del cerchio evoluta) sia eguale al raggio di curvatura nel punto B ; l'arco di sviluppante AB è costante ed eguale alla metà del raggio del cerchio evoluta ».

Passiamo a vedere quali sono gli elicoidi applicabili nei quali i profili meridiani sono linee corrispondenti. Chiamando $\xi, 0, \zeta$ le coordinate dei punti di una curva posta nel piano $y=0$ espresse in funzione dell'arco, se noi diamo a questa linea un movimento elicoidale di parametro p intorno all'asse delle z , abbiamo:

$$dS^2 = ds^2 + 2p\zeta' ds dv + (p^2 + \xi^2) dv^2.$$

Per l'elicoide generato da un altro profilo, si avrà:

$$dS_1^2 = ds_1^2 + 2p_1\zeta'_1 ds_1 dv_1 + (p_1^2 + \xi_1^2) dv_1^2,$$

e le condizioni d'applicabilità si trovano come nei casi precedenti:

$$v_1 = \frac{1}{K} v, \quad ds_1 = ds, \quad p_1 \zeta'_1 = p K \zeta, \quad p_1^2 + \xi_1^2 = K^2 (p^2 + \xi^2),$$

essendo K una costante. Non ci rimane che da porre le condizioni che i parametri in funzione dei quali sono espresse le coordinate ξ e η , ξ_1 e η_1 sono gli archi delle rispettive curve. Ora noi abbiamo dalle precedenti relazioni:

$$1 = \xi_1'^2 + \eta_1'^2 = \frac{p^2 K^2 \zeta'^2}{p_1^2} + \frac{K^4 \xi^2 \zeta'^2}{K^2 \xi^2 + p^2 K^2 - p_1^2},$$

e siccome $\zeta'^2 = 1 - \xi'^2$, otteniamo:

$$K^2 \{ K^2 (p_1^2 - p^2) \xi^2 + p^2 (p_1^2 - p^2 K^2) \} \xi'^2 = (p_1^2 - p^2 K^2) (K^2 \xi^2 + p^2 K^2 - p_1^2),$$

d'onde facilmente si deduce:

$$K \int \sqrt{\frac{K^2 (p_1^2 - p^2) \xi^2 + p^2 (p_1^2 - p^2 K^2)}{(p_1^2 - p^2 K^2) (K^2 \xi^2 + p^2 K^2 - p_1^2)}} d\xi = s + \text{costante}.$$

Con questa quadratura si ottiene la coordinata ξ espressa per l'arco, dopo di che si ha per l'altra coordinata

$$\zeta = \int \sqrt{1 - \xi'^2} \cdot ds.$$

§ 3.

Fra gli elicoidi è interessante considerare quelli rigati; troveremo il loro elemento lineare riferito alle generatrici ($s = \text{cost.}$) e alle linee ($v = \text{cost.}$) luoghi dei punti ottenuti staccando su di esse dei segmenti costanti a partire dalla linea di stringimento. Un elicoido rigato si ottiene conducendo nei vari punti di un'elica circolare e tangenzialmente al cilindro che la contiene, una serie di rette inclinate sulla curva di un angolo costante θ . Chiamando ξ, η, ζ le coordinate d'un punto qualunque dell'elicoido; x, y, z quelle del punto corrispondente dell'elica; $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma; \cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu; \cos l, \cos m, \cos n$ i coseni direttivi della tangente, della normale principale e della binormale; ρ, r il raggio di curvatura e quello di torsione dell'elica, si ha:

$$\xi = x + v(\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \cos l), \text{ ecc.}$$

d'onde:

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = \cos \alpha + v \left(\frac{\cos \theta}{\rho} + \frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \lambda, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \cos l, \text{ ecc.}$$

Sarà dunque:

$$E = \Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial s} \right)^2 = 1 + v^2 \left(\frac{\cos \theta}{\rho} + \frac{\sin \theta}{r} \right)^2, \quad F = \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial s} \frac{\partial \xi}{\partial v} = \cos \theta,$$

$$G = \Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} \right)^2 = 1,$$

e quindi:

$$dS^2 = \left[1 + v^2 \left(\frac{\cos \theta}{\rho} + \frac{\sin \theta}{r} \right)^2 \right] ds^2 + 2 \cos \theta \cdot ds dv + dv^2.$$

Conservando le generatrici $s = \text{cost.}$, sostituiamo alle linee $v = \text{cost.}$ le traiettorie ortogonali delle prime; chiamando t il parametro di tali linee, avremo:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial s} ds + \frac{\partial v}{\partial t} dt,$$

e perciò se si pone per semplicità

$$\frac{\cos \theta}{\rho} + \frac{\sin \theta}{r} = \text{costante} = a,$$

risulta:

$$dS^2 = \left[1 + a^2 v^2 + 2 \cos \theta \frac{\partial v}{\partial s} + \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 \right] ds^2 + 2 \left[\cos \theta + \frac{\partial v}{\partial s} \right] \frac{\partial v}{\partial t} dt \cdot ds + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dt^2.$$

La condizione d'ortogonalità $\frac{\partial v}{\partial s} + \cos \theta = 0$ porta all'eguaglianza $v = \varphi(t) - s \cdot \cos \theta$, la quale col cambiare $\varphi(t)$ in t (il che non nuoce alla generalità) diviene:

$$v = t - s \cos \theta,$$

e riduce il quadrato dell'elemento lineare alla forma:

$$dS^2 = [\sin^2 \theta + a^2 (t - s \cos \theta)^2] ds^2 + dt^2.$$

Per l'applicabilità dell'elicoide rigato a un altro della stessa natura, siccome θ e s per la loro definizione sono invariabili in qualunque deformazione, e quindi tale deve essere t , si deve avere la condizione $a_1 = a$, essendo a_1 la costante analoga ad a nella seconda superficie. La condizione d'applicabilità richiesta è dunque:

$$\frac{\cos \theta}{\rho} + \frac{\sin \theta}{r} = \frac{\cos \theta}{\rho_1} + \frac{\sin \theta}{r_1},$$

e poichè questa relazione determina una sola delle quantità ρ_1 e r_1 e lascia l'altra completamente arbitraria, potremo dire « *un elicoide rigato si può sempre deformare in un altro elicoide rigato; questa deformazione può farsi in infiniti modi* ».

Supponendo $\frac{1}{r_1} = 0$, risulta $\rho_1 = \frac{\rho r}{r + \rho \tan \theta}$, cioè « *un elicoide rigato può sempre deformarsi in un modo solo in un iperboloide di rivoluzione a una falda; il cerchio di gola di tale iperboloide ha per raggio $\frac{\rho r}{r + \rho \tan \theta}$, essendo ρ, r i raggi dell'elica linea di stringimento e θ l'angolo costante sotto il quale tale linea sega le generatrici rettilinee* ».

Considerando un iperboloide di rivoluzione a una falda, abbiamo per esso $a = \frac{\cos \theta}{\rho}$ e perciò l'elemento lineare acquista la forma:

$$dS^2 = \left[\sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\rho} (t - s \cdot \cos \theta)^2 \right] ds^2 + dt^2,$$

ciò che dimostra il teorema « un iperboloide di rivoluzione a una falda, deformandosi, cessa di essere un iperboloide ».

§ 4.

Passeremo alla risoluzione del problema « determinare il profilo meridiano dell'elicoide generato da una data curva ». Per maggiore generalità e per applicazioni ulteriori, prenderemo le equazioni della curva generatrice sotto la forma:

$$\xi = M \cos u - N \sin u, \quad \eta = M \sin u + N \cos u, \quad \zeta = \chi(u),$$

dove M , N , $\chi(u)$ sono tre funzioni arbitrarie di u . Prenderemo la parte positiva dell'asse delle z (asse dell'elicoide) nel senso del moto di traslazione; sul piano $z = 0$ l'angolo polare ω lo conteremo dall'asse delle x , considerando come direzione positiva quella della rotazione del moto elicoidale. Ciò posto, si consideri un punto qualunque A sulla linea ruotante, corrispondente all'angolo polare positivo

$$\omega = \arctan \frac{\eta}{\xi} = \arctan \frac{M \sin u + N \cos u}{M \cos u - N \sin u},$$

e si dia ad esso un movimento elicoidale retrogrado a quello del dato elicoide, fino a che A va a trovarsi sul piano coordinato $y = 0$, nella posizione A_0 ; determiniamo le coordinate di A_0 . Per la coordinata ξ_0 , contata perpendicolarmente all'asse dell'elicoide, abbiamo

$$\xi_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \sqrt{M^2 + N^2}.$$

In quanto alla coordinata ζ_0 contata parallelamente all'asse, si osservi che nel moto elicoidale retrogrado che porta A in A_0 il punto mobile compie una traslazione $-p\omega$; avremo quindi:

$$\zeta = \zeta_0 - p\omega.$$

Possiamo dunque dire « la linea L rappresentata dalle equazioni

$$\xi = M \cos u - N \sin u, \quad \eta = M \sin u + N \cos u, \quad \zeta = \chi(u), \quad (6)$$

muovendosi di moto elicoidale di parametro p intorno all'asse delle z , genera un elicoide il cui profilo meridiano è la curva l rappresentata dalle equazioni:

$$\xi_0 = \sqrt{M^2 + N^2}, \quad \eta_0 = 0, \quad \zeta_0 = \chi - p \cdot \text{arc tang} \frac{M \text{sen } u + N \cos u}{M \cos u - N \text{sen } u}. \quad (7)$$

Questo teorema può servire per determinare la linea più generale che, muovendosi di moto elicoidale intorno all'asse delle z , genera il medesimo elicoide generato dalla curva (6). Per una linea qualunque L_1 avendosi:

$$\xi_1 = M_1 \cos u - N_1 \text{sen } u, \quad \eta_1 = M_1 \text{sen } u + N_1 \cos u, \quad \zeta_1 = \chi_1(u),$$

si avrà per il profilo meridiano l_1 dell'elicoide da essa generato:

$$\xi_{10} = \sqrt{M_1^2 + N_1^2}, \quad \eta_{10} = 0, \quad \zeta_{10} = \chi_1 - p \cdot \text{arc} \cdot \text{tang} \frac{M_1 \text{sen } u + N_1 \cos u}{M_1 \cos u - N_1 \text{sen } u}.$$

Perchè l'elicoide generato da L_1 coincida con quello generato da L , è necessario e sufficiente che sia:

$$\xi_{10} = \xi_0, \quad \zeta_{10} = \zeta_0,$$

cioè:

$$M_1^2 + N_1^2 = M^2 + N^2;$$

$$\chi_1 - p \cdot \text{arc} \cdot \text{tang} \frac{M_1 \text{sen } u + N_1 \cos u}{M_1 \cos u - N_1 \text{sen } u} = \chi - p \cdot \text{arc} \cdot \text{tang} \frac{M \text{sen } u + N \cos u}{M \cos u - N \text{sen } u}.$$

La prima condizione si soddisfa nel modo più generale prendendo

$$M_1 = M \cos U - N \text{sen } U, \quad N_1 = M \text{sen } U + N \cos U,$$

essendo U una funzione arbitraria di u . Allora risulta:

$$\xi_1 = M \cos(U + u) - N \text{sen}(U + u), \quad \eta_1 = M \text{sen}(U + u) + N \cos(U + u).$$

L'ultima relazione diviene:

$$\begin{aligned} \chi_1 - p \cdot \text{arc} \cdot \text{tang} \frac{M \text{sen}(U + u) + N \cos(U + u)}{M \cos(U + u) - N \text{sen}(U + u)} = \\ = \chi - p \cdot \text{arc} \cdot \text{tang} \frac{M \text{sen } u + N \cos u}{M \cos u - N \text{sen } u}, \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \chi_1 = \chi + p \cdot \text{arc} \cdot \text{tang} \frac{M \text{sen}(U + u) + N \cos(U + u)}{M \cos(U + u) - N \text{sen}(U + u)} - \\ - p \cdot \text{arc} \cdot \text{tang} \frac{M \text{sen } u + N \cos u}{M \cos u - N \text{sen } u}. \end{aligned}$$

Cambiando $U + u$ in U , potremo dire « la linea L rappresentata dalle equazioni (6) e la linea L_1 rappresentata dalle seguenti equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= M \cos U - N \sin U, & \eta_1 &= M \sin U + N \cos U, \\ \zeta_1 &= \chi(u) + p \cdot \operatorname{arc} \cdot \operatorname{tang} \frac{M \sin U + N \cos U}{M \cos U - N \sin U} - p \cdot \operatorname{arc}^{\circ} \operatorname{tang} \frac{M \sin u + N \cos u}{M \cos u - N \sin u}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

nel moto elicoidale di parametro p intorno all'asse delle z , generano lo stesso elicoide ».

Data una linea rappresentata dalle relazioni (6) determiniamo un'altra linea L_1 tale che, facendole muovere di moto elicoidale intorno a una retta, esse descrivano lo stesso elicoide, formando inoltre su di esso due sistemi di linee ortogonali. Dalle (6), colla derivazione, si deduce:

$$\begin{aligned} \xi' &= (M' - N) \cos u - (M + N') \sin u, \\ \eta' &= (M' - N) \sin u + (M + N') \cos u, & \zeta' &= \chi'(u). \end{aligned}$$

Osservando quindi che le coordinate x, y, z di un punto qualunque generato da quella linea sono:

$$x = \xi \cos v - \eta \sin v, \quad y = \xi \sin v + \eta \cos v, \quad z = \zeta,$$

avremo:

$$\begin{aligned} E &= \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = (M + N')^2 + (M' - N)^2 + \chi'^2; \\ F &= \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \xi \eta' - \xi' \eta + p \zeta' = M(M + N') - N(M' - N) + p \chi'. \end{aligned}$$

Se dunque chiamiamo t il parametro delle L_1 traiettorie ortogonali delle linee $v = \text{cost.}$, avremo:

$$v = t - \int \frac{E}{F} du = t - \int \frac{(M + N')^2 + (M' - N)^2 + \chi'^2}{M(M + N') - N(M' - N) + p \chi'} du, \quad (9)$$

per equazione delle linee L_1 ($t = \text{cost.}$). Le coordinate x, y dei punti dell'elicoide riferito alle linee $u = \text{cost.}$, $t = \text{cost.}$ sono dunque:

$$x = M \cos(u + v) - N \sin(u + v), \quad y = M \sin(u + v) + N \cos(u + v),$$

essendo v dato dalla (9); se in queste espressioni si dà a t un valore particolare, per es. il valore zero, si hanno le coordinate ξ_1, η_1 relative ai punti delle linee domandate L_1 . Confrontando allora le due relazioni, che si ottengono,

colle due prime (8), si ha nel nostro caso:

$$U = u - \int \frac{(M + N')^2 + (M' - N)^2 + \chi'^2}{M(M + N') - N(M' - N) + p\chi'} du, \quad (10)$$

la quale, col sussidio della terza (8), dà la terza coordinata ζ_1 . Dunque « la linea L rappresentata dalle equazioni (6) e la linea L_1 rappresentata dalle equazioni che si ottengono sostituendo nelle (8) a U il suo valore (10), in un movimento elicoidale di parametro p intorno all'asse delle z , generano lo stesso elicoide, sopra il quale esse formano due sistemi di linee ortogonali ».

Applicazione 1.^a — Per fare un'applicazione dei precedenti teoremi, proponiamoci di trovare le due linee L, L_1 le quali, in un dato moto elicoidale, descrivono il medesimo elicoide, formando sul medesimo i due sistemi di linee di curvatura.

Le coordinate d'un punto qualunque di una geodetica principale d'un elicoide si possono scrivere:

$$x = R \cos u, \quad y = R \sin u, \quad z = -\frac{1}{p} \int R^2 du,$$

e quindi le coordinate d'un punto qualunque di una sua evolvente sono:

$$\xi = x - s \cos \alpha, \quad \eta = y - s \cos \beta, \quad \zeta = z - s \cos \gamma,$$

essendo s l'arco dell'evolvente e $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ i coseni direttivi della sua tangente. Ora siccome

$$s = \left(a + \int \sqrt{R^4 + p^2(R^2 + R'^2)} du \right) \frac{1}{p},$$

con a costante arbitraria, e inoltre:

$$\cos \alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \text{ ecc.}$$

avremo:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \left[R - \frac{R' \left(a + \int \sqrt{R^4 + p^2(R^2 + R'^2)} du \right)}{\sqrt{R^4 + p^2(R^2 + R'^2)}} \right] \cos u + \frac{R \left(a + \int \sqrt{R^4 + p^2(R^2 + R'^2)} du \right)}{\sqrt{R^4 + p^2(R^2 + R'^2)}} \sin u \\ \eta &= \left[R - \frac{R' \left(a + \int \sqrt{R^4 + p^2(R^2 + R'^2)} du \right)}{\sqrt{R^4 + p^2(R^2 + R'^2)}} \right] \sin u - \frac{R \left(a + \int \sqrt{R^4 + p^2(R^2 + R'^2)} du \right)}{\sqrt{R^4 + p^2(R^2 + R'^2)}} \cos u \\ \zeta &= -\frac{1}{p} \int R^2 du + \frac{R^2}{p \sqrt{R^4 + p^2(R^2 + R'^2)}} \int \sqrt{R^4 + p^2(R^2 + R'^2)} du. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Confrontando queste relazioni colle (6), abbiamo:

$$\left. \begin{aligned} M &= R - \frac{R' \left(a + \int \sqrt{R^4 + p^2 (R^2 + R'^2)} du \right)}{\sqrt{R^4 + p^2 (R^2 + R'^2)}}, \\ N &= - \frac{R \left(a + \int \sqrt{R^4 + p^2 (R^2 + R'^2)} du \right)}{\sqrt{R^4 + p^2 (R^2 + R'^2)}}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Abbiamo dunque il teorema « la linea rappresentata dalle equazioni (11) e quella rappresentata dalle equazioni (8) in cui si ponga per M e N i valori dati dalle (12) e per U il valore dato dalla (10), muovendosi di moto elicoidale di parametro p intorno all'asse delle z , generano lo stesso elicoide formando sul medesimo i due sistemi delle linee di curvatura ».

Applicazione 2.^a — Come altra applicazione ci proponiamo di determinare tutte le linee che in uno stesso moto elicoidale generano un medesimo elicoide, restando geodetiche su di esso.

Intanto osserviamo che se nelle formole (6), (8) facciamo $M=R$, $N=0$, otteniamo:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= R \cos u, & \eta &= R \sin u, & \zeta &= \chi(u); \\ \xi_1 &= R \cos U, & \eta_1 &= R \sin U, & \zeta_1 &= \chi(u) + p(U - u), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

come coordinate dei punti di due linee L , L_1 che nel moto elicoidale di parametro p intorno all'asse delle z , descrivono lo stesso elicoide. Mettiamo la condizione che la linea L_1 sia una geodetica dell'elicoide. La condizione da verificare è, come ho altra volta dimostrato (*):

$$\xi_1 \frac{d\eta_1}{ds_1} - \eta_1 \frac{d\xi_1}{ds_1} + p \frac{d\zeta_1}{ds_1} = K,$$

con K costante, cioè:

$$\xi_1 \frac{d\eta_1}{du} - \eta_1 \frac{d\xi_1}{du} + p \frac{d\zeta_1}{du} = k \frac{ds_1}{du}.$$

Ora abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{du} &= R' \cos U - RU' \sin U, & \frac{d\eta_1}{du} &= R' \sin U + RU' \cos U, \\ \frac{d\zeta_1}{du} &= \chi'(u) + p(U' + 1), \end{aligned}$$

(*) Giornale di BATTAGLINI 1884.

e conseguentemente

$$\frac{ds_1}{du} = \sqrt{R^2 U'^2 + R'^2 + [\chi' + p(U' - 1)]^2}.$$

Dunque sarà:

$$R^2 U' + p \chi' + p^2 (U' - 1) = K \sqrt{R^2 U'^2 + R'^2 + [\chi' + p(U' - 1)]^2},$$

ossia:

$$(R^2 + p^2)(R^2 + p^2 - K^2)U'^2 + 2p(\chi' - p)(R^2 + p^2 - K^2)U' + \\ + (p^2 - K^2)(\chi' - p)^2 - K^2 R'^2 = 0,$$

dalla quale si può con tutta facilità ricavare U' e per integrazione U ; il problema è allora completamente ridotto a quadrature.

§ 5.

Il teorema dimostrato al paragrafo precedente può anche servire per determinare l'intersezione di un elicoide con un cilindro le cui generatrici sono parallele all'asse. Per dare un esempio, determiniamo l'intersezione dell'elicoide generato dalla curva

$$\xi = R \cos u, \quad \eta = R \sin u, \quad \zeta = \chi(u),$$

con un cilindro la cui sezione retta è una spirale logaritmica col polo nell'origine.

Le coordinate dei punti di una linea qualunque descritta su tale cilindro sono:

$$\xi_1 = a e^{\cot i \cdot u} \cdot \cos u, \quad \eta_1 = a e^{\cot i \cdot u} \cdot \sin u, \quad \zeta_1 = \chi(u),$$

e siccome da queste si deduce:

$$R = \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} = a e^{\cot i \cdot u}, \quad \text{d'onde} \quad u = \tan i \cdot \log \frac{R}{a},$$

si avrà:

$$\xi_1 = R \cos \left(\tan i \cdot \log \frac{R}{a} \right), \quad \eta_1 = R \sin \left(\tan i \cdot \log \frac{R}{a} \right), \quad \zeta_1 = \chi(u).$$

Bisogna esprimere che questa linea genera lo stesso elicoide generato dalla linea data; confrontando queste eguaglianze colle (13), abbiamo:

$$U = \tan i \cdot \log \frac{R}{a}, \quad \text{e perciò:} \quad \zeta_1 = \chi(u) + p \left(\tan i \cdot \log \frac{R}{a} - u \right).$$

Dunque « l'elicoide generato dalla linea $\xi = R \cos u$, $\eta = R \sin u$, $\zeta = \chi(u)$ viene intersecato dal cilindro, avente le generatrici parallele all'asse e la cui sezione retta è la spirale logaritmica $R = ae^{\cot i \cdot u}$, secondo la curva:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= R \cos \left(\text{tang } i \cdot \log \frac{R}{a} \right), & \eta_1 &= R \sin \left(\text{tang } i \cdot \log \frac{R}{a} \right), \\ \zeta_1 &= \chi(u) + p \left(\text{tang } i \cdot \log \frac{R}{a} - u \right) \text{.}\end{aligned}$$

Se vogliamo che l'intersezione sia una geodetica principale dell'elicoide, bisogna soddisfare la condizione (1'), che rimane della stessa forma qualunque sia la variabile indipendente s . Si ottiene allora:

$$p\chi' = -p^2 \text{tang } i \frac{R'}{R} - \text{tang } i \cdot R R' + p^2,$$

d'onde:

$$\chi = -p \text{tang } i \cdot \log R - \frac{\text{tang } i}{2p} R^2 + pu.$$

Dunque « le geodetiche principali d'elicoide che si proiettano sul piano normale all'asse secondo la spirale logaritmica $R = ae^{\cot i \cdot u}$ sono rappresentate dalle equazioni:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= R \cos \left(\text{tang } i \cdot \log \frac{R}{a} \right), & \eta_1 &= R \sin \left(\text{tang } i \cdot \log \frac{R}{a} \right), \\ \zeta_1 &= -\frac{\text{tang } i}{2p} R^2 - p \text{tang } i \cdot \log a \text{.}\end{aligned}$$

Queste relazioni ci dimostrano che « le geodetiche principali determinate si trovano descritte sopra paraboloidi di rivoluzione, i cui assi coincidono con quello dell'elicoide ».

Un'altra notevole proprietà di queste curve è espressa nel teorema che ora dimostriamo; indicando con ρ il raggio di curvatura della spirale logaritmica sezione retta del cilindro, e con σ il suo arco, abbiamo:

$$R = \rho \cdot \sin i, \quad \rho = s \cdot \cot i, \quad \text{da cui} \quad R = s \cdot \cos i.$$

Dunque

$$\zeta_1 = -\frac{\sin i \cos i}{2p} s^2 - p \cdot \text{tang } i \cdot \log a,$$

ciò che dimostra la proprietà « la geodetica principale determinata si ottiene prendendo una parabola e piegando il suo piano in modo, da dargli la forma di cilindro la cui sezione retta è una spirale logaritmica, colle generatrici nella direzione dell'asse della parabola, e disponendolo in modo che quest'asse passi per il polo della spirale ».

§ 6.

Se nelle formole (6) del § 4, supponiamo

$$M = R \cos(\theta - u), \quad N = R \sin(\theta - u),$$

essendo θ una funzione arbitraria di u , otteniamo dalla (10)

$$U = u - \int \frac{R^2 \theta'^2 + R'^2 + \chi'^2}{R^2 \theta' + p \chi'} du.$$

Applicando allora il teorema del § 4, potremo dire « la linea L rappresentata dalle equazioni:

$$\xi = R \cos \theta(u), \quad \eta = R \sin \theta(u), \quad \zeta = \chi(u), \quad (14)$$

dove θ è una funzione arbitraria di u , e l'altra L_1 rappresentata dalle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= R \cos \left\{ \theta - \int \frac{R^2 \theta'^2 + R'^2 + \chi'^2}{R^2 \theta' + p \chi'} du \right\}, \\ \eta_1 &= R \sin \left\{ \theta - \int \frac{R^2 \theta'^2 + R'^2 + \chi'^2}{R^2 \theta' + p \chi'} du \right\}, \\ \zeta_1 &= \chi(u) - p \int \frac{R^2 \theta'^2 + R'^2 + \chi'^2}{R^2 \theta' + p \chi'} du, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

muovendosi di moto elicoidale di parametro p intorno all'asse delle ζ , generano lo stesso elicoide, sul quale esse vengono a formare due sistemi di linee ortogonali ».

Facciamo qualche applicazione di questo teorema: 1.° in un elicoide dato trovare le traiettorie ortogonali delle sezioni rette.

Se la linea mobile, generatrice dell'elicoide, è rappresentata dalle equazioni:

$$\xi = R \cos u, \quad \eta = R \sin u, \quad \zeta = \chi(u),$$

l'elicoide da essa generato è rappresentato dalle altre:

$$x = \xi \cos v - \eta \sin v, \quad y = \xi \sin v + \eta \cos v, \quad z = \chi(u) + pv.$$

La curva d'intersezione di questa superficie col piano $z = 0$ è rappresentata in coordinate u e v dalla relazione $\chi(u) + pv = 0$, dalla quale si deduce

$$v = -\frac{1}{p} \chi.$$

Dunque « la sezione retta dell'elicoide generato dalla curva $\xi = R \cos u$, $\eta = R \sin u$, $\zeta = \chi(u)$ è rappresentato dalle equazioni:

$$\begin{aligned}\xi_0 &= R \cos(u + v) = R \cos\left(u - \frac{1}{p} \chi\right), \\ \eta_0 &= R \sin(u + v) = R \sin\left(u - \frac{1}{p} \chi\right), \quad \zeta_0 = 0.\end{aligned}$$

Queste relazioni si ottengono dalle (14), purchè in esse si faccia

$$\theta = u - \frac{1}{p} \chi, \quad \zeta = 0;$$

applicando dunque il teorema di questo paragrafo, avremo « le traiettorie ortogonali delle sezioni rette dell'elicoide generato dalla curva $\xi = R \cos u$, $\eta = R \sin u$, $\zeta = \chi(u)$, sono rappresentate dalle equazioni:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= R \cos\left(p \int \frac{R'^2 du}{R^2(p - \chi')}\right), \quad \eta_1 = R \sin\left(p \int \frac{R'^2 du}{R^2(p - \chi')}\right), \\ \zeta_1 &= \chi - p \left\{ u + p \int \frac{R'^2 du}{R^2(p - \chi')} \right\}.\end{aligned}$$

2.° Passiamo alla risoluzione dell'altro problema « in un elicoide dato trovare le traiettorie ortogonali dei profili meridiani ». — Anzitutto osserveremo che se nel teorema del § 4 poniamo $M = R$, $N = 0$ abbiamo « il profilo meridiano dell'elicoide generato dalla curva $\xi = R \cos u$, $\eta = R \sin u$, $\zeta = \chi(u)$ è rappresentato dalle equazioni $\xi_0 = R$, $\eta_0 = 0$, $\zeta_0 = \chi(u) - pu$ ».

La questione è allora ridotta a trovare le traiettorie ortogonali di queste linee; per questo osserviamo che le equazioni ultime si ottengono dalle (14) facendo in esse $\theta = 0$ e ponendo al posto di ζ la funzione $\chi - pu$. Allora si ottiene:

$$\int \frac{R^2 \theta'^2 + R'^2 + \chi'^2}{R^2 \theta' + p \chi'} du = \frac{1}{p} \int \frac{R'^2 du}{\chi' - p} + \frac{\chi}{p} - u,$$

e applicando il teorema di questo paragrafo, avremo « le traiettorie ortogonali dei profili meridiani dell'elicoide generato dalla curva $\xi = R \cos u$, $\eta = R \sin u$, $\zeta = \chi(u)$ sono rappresentate dalle equazioni:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= R \cos \left\{ u - \frac{1}{p} \left(\chi + \int \frac{R'^2 du}{\chi' - p} \right) \right\}, \\ \eta_1 &= R \sin \left\{ u - \frac{1}{p} \left(\chi + \int \frac{R'^2 du}{\chi' - p} \right) \right\}, \quad \zeta_1 = - \int \frac{R'^2 du}{\chi' - p}.\end{aligned}$$

§ 7.

I teoremi che precedono sono suscettibili di numerose e importanti applicazioni. Per darne un esempio, determiniamo gli elicoidi in cui le traiettorie ortogonali dei profili meridiani sono curve sferiche col centro sull'asse. Ponendo la condizione:

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = a^2,$$

si ottiene:

$$R^2 + \left(\int \frac{R'^2 du}{\chi' - p} \right)^2 = a^2, \quad \text{ovvero:} \quad \int \frac{R'^2 du}{\chi' - p} = \sqrt{a^2 - R^2},$$

da cui derivando:

$$\frac{R'^2}{\chi' - p} = - \frac{R R'}{\sqrt{a^2 - R^2}}.$$

Questa ci dà

$$\chi' = p - \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{R} R',$$

la quale, moltiplicata per du e integrata, ci offre:

$$\chi = pu - \int \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{R} dR = pu - \sqrt{a^2 - R^2} + a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - R^2}}{R}.$$

Se dunque ξ_0 , ζ_0 sono le coordinate del profilo meridiano dell'elicoide situato nel piano coordinato $y = 0$, si avrà:

$$\xi_0 = R, \quad \zeta_0 = \chi(u) - pu = -\sqrt{a^2 - R^2} + a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - R^2}}{R}.$$

Eliminando R fra queste due relazioni, abbiamo:

$$\zeta_0 = -\sqrt{a^2 - \xi_0^2} + a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - \xi_0^2}}{\xi_0},$$

che è l'equazione di una trattrice il cui assintoto coincide coll'asse delle z e le cui tangenti hanno la lunghezza costante a . L'elicoide generato da una tale curva è a curvatura costante negativa ed è stato segnalato per la prima volta dal chiarissimo prof. DINI; in esso i profili meridiani sono linee di curvatura e quindi le linee di curvatura dell'altro sistema devono essere descritte sopra sfere i cui centri sono sull'asse. Dunque « *gli elicoidi in cui le traiettorie ortogonali dei profili meridiani sono curve sferiche aventi il centro sull'asse, sono tutti e soli gli elicoidi del DINI* ».

Proponiamoci di determinare, negli elicoidi del DINI, le linee di curvatura sferiche. Una linea L , descritta sopra una sfera di raggio a , è rappresentata dalle equazioni:

$$\xi = R \cos u, \quad \eta = R \sin u, \quad \zeta = \sqrt{a^2 - R^2}.$$

Supponiamo che tale linea si muova di moto elicoidale di parametro p intorno all'asse delle z e troviamo le traiettorie ortogonali delle curve sferiche: sostituendo nelle (15) a θ la u e a χ il radicale $\sqrt{a^2 - R^2}$, si ottiene:

$$\int \frac{R^2 \theta'^2 + R'^2 + \chi'^2}{R^2 \theta' + p \chi'} du = \int \frac{a^2 (R^2 + R'^2) - R^4}{R \sqrt{a^2 - R^2} [R \sqrt{a^2 - R^2} - p R']} du,$$

e quindi le suddette traiettorie sono rappresentate dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= R \cos \left\{ u - \int \frac{a^2 (R^2 + R'^2) - R^4}{R \sqrt{a^2 - R^2} [R \sqrt{a^2 - R^2} - p R']} du \right\}, \\ \eta_1 &= R \sin \left\{ u - \int \frac{a^2 (R^2 + R'^2) - R^4}{R \sqrt{a^2 - R^2} [R \sqrt{a^2 - R^2} - p R']} du \right\}, \\ \zeta_1 &= \sqrt{a^2 - R^2} - p \int \frac{a^2 (R^2 + R'^2) - R^4}{R \sqrt{a^2 - R^2} [R \sqrt{a^2 - R^2} - p R']} du. \end{aligned}$$

Ora bisogna esprimere che questa curva è il profilo meridiano dell'elicoide; le coordinate ξ_0, η_0, ζ_0 del profilo meridiano dell'elicoide posto nel piano coordinato $\eta = 0$ sono: $\xi_0 = R, \eta_0 = 0, \zeta_0 = \chi(u) - pu$.

Perchè queste coordinate coincidano colle precedenti, si richiede che

$$u = \int \frac{a^2 (R^2 + R'^2) - R^4}{R \sqrt{a^2 - R^2} [R \sqrt{a^2 - R^2} - p R']} du,$$

dalla quale, colla derivazione rapporto a u , si deduce:

$$R \sqrt{a^2 - R^2} [R \sqrt{a^2 - R^2} - p R'] = a^2 (R^2 + R'^2) - R^4.$$

Questa relazione ci dà facilmente:

$$p = -a^2 \frac{R'}{\sqrt{a^2 - R^2}},$$

e moltiplicando per du e integrando:

$$pu + a \log h = a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - R^2}}{R},$$

essendo $a \log h$ una costante arbitraria.

Questa relazione può scriversi

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - R^2}}{R} = h e^{\frac{pu}{a}},$$

dalla quale è facile ricavare R e si trova:

$$R = \frac{2ah}{e^{-\frac{pu}{a}} + h^2 e^{\frac{pu}{a}}}.$$

Tale equazione, in coordinate polari, della proiezione sul piano $z = 0$ della curva sferica, dimostra che tale linea è una lossodromia, segante i paralleli sotto l'angolo costante i dato dalla relazione $\text{tang} i = -\frac{p}{a}$. Dunque « le linee di curvatura sferiche negli elicoidi del DINI sono lossodromie; fra il raggio a della sfera, l'angolo i sotto il quale la lossodromia sega i paralleli e il parametro p del moto elicoidale sussiste la relazione $p = -a \text{tang} i$ ».

Le coordinate ξ_0 , η_0 , ζ_0 del profilo meridiano sono:

$$\xi_0 = R, \quad \eta_0 = 0, \quad \zeta_0 = \sqrt{a^2 - R^2} - pu;$$

ma si è trovato

$$pu = -a \log h + a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - R^2}}{R},$$

e quindi, sostituendo questo valore nella espressione di ζ_0 , si ha:

$$\zeta_0 = \sqrt{a^2 - R^2} - a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - R^2}}{R} + a \log h,$$

che è l'equazione di una trattrice in cui la lunghezza costante delle tangenti è a .

Dunque « le lossodromie sferiche, linee di curvatura negli elicoidi del DINI, sono tracciate sopra sfere il cui raggio è uguale alla lunghezza costante delle tangenti nella trattrice, profilo meridiano ».

La lossodromia sferica, oltre avere la proprietà ora dimostrata, ha anche l'altra di essere l'unica curva sferica che, in un movimento elicoidale, intorno a una retta passante pel centro, venga ad esserè una geodetica principale sull'elicoide generato (*). Indicando con p_1 il parametro del moto elicoidale, con i_1 l'angolo sotto il quale la lossodromia sega i paralleli, e con a_1 il raggio della sfera, ho trovato nel luogo citato: $p_1 = a_1 \cot i_1$.

(*) V. mia Nota: *Rettifica di un teorema.....* ecc., Giornale di BATTAGLINI, 1885.

Se le due lossodromie si riducono a una sola, $a = a_1$, $i = i_1$ ed allora: $p = -a \operatorname{tang} i$, $p_1 = a \operatorname{cotg} i$, le quali, moltiplicate, danno $pp_1 = -a^2$. Dunque « una stessa lossodromia sferica può sempre in due movimenti elicoidali, intorno a una retta che passa pel centro della sfera, rimanere una volta geodetica principale e una volta linea di curvatura della superficie generata. I parametri dei due movimenti elicoidali sono di segno contrario e il loro prodotto è eguale in valore assoluto al quadrato del raggio ». In particolare se $i = \frac{\pi}{4}$, risulta $p = -a$, $p_1 = a$; perciò « se ad una lossodromia sferica secante i meridiani sotto l'angolo $\frac{\pi}{4}$ si dà due movimenti elicoidali inversi intorno al diametro passante per il suo polo, e tali che i parametri dei detti movimenti siano eguali al raggio della sfera, la curva genera due elicoidi, sopra uno dei quali rimane geodetica principale e sull'altro linea di curvatura, e in quest'ultimo caso la superficie è un elicoide del DINI ».

Se supponiamo $p_1 = p$, risulta: $\operatorname{tg} i = -\operatorname{cotg} i_1$, d'onde $i_1 = i + \frac{\pi}{2}$.

Dunque « se sopra una sfera si prendono due lossodromie ortogonali fra loro e si dà alla sfera un moto elicoidale intorno al diametro che passa per il polo comune alle lossodromie, quando una di esse rimane geodetica principale sull'elicoide generato, l'altra rimane invece linea di curvatura e descrive un elicoide del DINI ».

§ 8.

Curvatura degli elicoidi. — Riferendo l'elicoide alle eliche e alle geodetiche traiettorie ortogonali, di esse, il quadrato dell'elemento lineare diviene:

$$dS^2 = ds^2 + (p^2 + R^2)dv^2.$$

e quindi, chiamando K la curvatura della superficie, sarà:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{p^2 + R^2}} \cdot \frac{\partial^2 \sqrt{p^2 + R^2}}{\partial s^2}.$$

Se poniamo la condizione che sia $K = 0$, risulta:

$$\frac{\partial \sqrt{p^2 + R^2}}{\partial s} = \text{costante} = a, \quad \text{d'onde integrando} \quad \sqrt{p^2 + R^2} = as + b.$$

Si vede quindi come sia possibile, col sussidio delle (2), ottenere le geodetiche principali degli elicoidi sviluppabili.

Se consideriamo il caso di K costante diversa da zero, avremo (col porre $\sqrt{p^2 + R^2} = \theta$)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} = -K\theta;$$

moltiplicando ambi i membri per θ' e integrando, abbiamo:

$$\theta'^2 = a^2 - K\theta^2,$$

con a costante arbitraria. Di qui si deduce:

$$\frac{\theta'}{\sqrt{a^2 - K\theta^2}} = 1, \quad \text{da cui:} \quad \int \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 - K\theta^2}} = s + b.$$

Per eseguire questa quadratura, bisogna distinguere due casi, cioè che sia $K > 0$ ovvero $K < 0$; per $K > 0$ potremo mettere $K = k^2$ e allora:

$$\frac{1}{k} \arcsin\left(\frac{k}{a} \theta\right) = s + b, \quad \text{d'onde} \quad \theta = \frac{a}{k} \sin k(s + b),$$

per $K < 0$, potremo mettere $K = -k^2$ e si ottiene:

$$\frac{1}{k} \log(k\theta + \sqrt{a^2 + k^2\theta^2}) = s + \frac{\log b}{k}, \quad \text{avendo cambiato } b \text{ in } \frac{\log b}{k}.$$

Da questa deducesi $\theta = \frac{b^2 e^{ks} - a^2 e^{-ks}}{2bk}$. Dunque « *gli elicoidi a curvatura costante positiva k^2 , o a curvatura costante negativa $-k^2$, sono rispettivamente caratterizzati dalle eguaglianze:*

$$\sqrt{p^2 + R^2} = a \cdot \sin(ks + b), \quad \sqrt{p^2 + R^2} = a e^{ks} + b e^{-ks}, \quad (16)$$

dove a e b sono due costanti arbitrarie ».

Avuto le espressioni di $\sqrt{p^2 + R^2}$ e quindi di R , in funzione dell'arco s della geodetica principale, è facilissimo ricavare le coordinate dei punti di tali geodetiche colla sostituzione nelle formole (2).

Dunque: « *la linea rappresentata dalle equazioni:*

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \sqrt{(a e^{ks} + b e^{-ks})^2 - p^2} \cdot \cos \left\{ p \int \frac{\sqrt{-k^2 a^4 e^{8ks} + a^2 e^{6ks} + (2a^2 b^2 k^2 + b^2 + 2ab - p^2) e^{4ks} - k^2 b^4}}{(a e^{2ks} + b) \{ a^2 e^{4ks} + (2ab - p^2) e^{2ks} + b^2 \}} \cdot e^{ks} ds \right\} \\ \eta &= \sqrt{(a e^{ks} + b e^{-ks})^2 - p^2} \cdot \sin \left\{ p \int \frac{\sqrt{-k^2 a^4 e^{8ks} + a^2 e^{6ks} + (2a^2 b^2 k^2 + b^2 + 2ab - p^2) e^{4ks} - k^2 b^4}}{(a e^{2ks} + b) \{ a^2 e^{4ks} + (2ab - p^2) e^{2ks} + b^2 \}} \cdot e^{ks} ds \right\} \\ \zeta &= - \int \frac{\sqrt{-k^2 a^4 e^{8ks} + a^2 e^{6ks} + (2a^2 b^2 k^2 + b^2 + 2ab - p^2) e^{4ks} - k^2 b^4}}{e^{ks} (a e^{2ks} + b)} \cdot ds, \end{aligned} \right\}$$

e l'altra rappresentata dalle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \sqrt{a^2 \sin^2(ks+b) - p^2} \cdot \cos \left\{ \frac{p}{a} \int \frac{\sqrt{a^2 \sin^2(ks+b) \{1 - a^2 k^2 \cos^2(ks+b)\} - p^2}}{\sin(ks+b) \{a^2 \sin^2(ks+b) - p^2\}} \cdot ds \right\} \\ \eta &= \sqrt{a^2 \sin^2(ks+b) - p^2} \cdot \sin \left\{ \frac{p}{a} \int \frac{\sqrt{a^2 \sin^2(ks+b) \{1 - a^2 k^2 \cos^2(ks+b)\} - p^2}}{\sin(ks+b) \{a^2 \sin^2(ks+b) - p^2\}} \cdot ds \right\} \\ \zeta &= -\frac{1}{a} \int \frac{\sqrt{a^2 \sin^2(ks+b) \{1 - a^2 k^2 \cos^2(ks+b)\} - p^2}}{\sin(ks+b)} \cdot ds, \end{aligned} \right\}$$

muovendosi di moto elicoidale di parametro p intorno all'asse delle z , generano l'elicoide più generale rispettivamente a curvatura costante negativa $-k^2$ o a curvatura costante positiva $+k^2$; le linee dette vengono ad essere sugli elicoidi generati le geodetiche principali ».

Gli elicoidi a curvatura costante positiva sono tutti applicabili gli uni sugli altri, colla condizione che le eliche siano corrispondenti; per gli elicoidi a curvatura costante negativa abbiamo tre classi distinte, a seconda che b ha segno contrario a quello di a , ovvero il medesimo segno, ovvero è nulla.

Un elicoide di una classe non è mai applicabile sopra l'elicoide di un'altra classe, colla condizione che le eliche siano corrispondenti; però, per una proprietà delle superficie pseudosferiche, un elicoide a curvatura costante negativa è sempre applicabile sopra un altro elicoide di eguale curvatura. Gli elicoidi del 3.º tipo, corrispondenti cioè al valore zero di b , danno:

$$\sqrt{p^2 + R^2} = a e^{ks},$$

e quindi il loro elemento lineare, riferito alle eliche e alle loro traiettorie ortogonali, assume la forma:

$$dS^2 = ds^2 + a^2 e^{2ks} \cdot dv^2.$$

Ora, se osserviamo che nell'elicoide: $dS^2 = ds^2 + (p^2 + R^2)dv^2$ il raggio di curvatura geodetica delle eliche è

$$R_g = \frac{p^2 + R^2}{R R'},$$

avremo che la condizione $p^2 + R^2 = a^2 e^{2ks}$ è equivalente all'altra $R_g = \frac{1}{k}$.

Dunque « gli elicoidi a curvatura costante negativa ($-k^2$) del 3.º tipo sono caratterizzati dalla proprietà che è costante $\left(= \frac{1}{k} \right)$ il raggio di curvatura geodetica delle eliche ».

Possiamo facilmente determinare il profilo meridiano di questi elicoidi; assumendo il profilo nel piano $y = 0$, si è visto (§ 2) che, indicando con ξ, ζ le coordinate de' suoi punti espresse per l'arco σ , l'elemento lineare diviene:

$$dS^2 = d\sigma^2 + 2p\zeta' d\sigma dv + (p^2 + \xi^2)dv^2. \quad (17)$$

La curvatura geodetica delle eliche descritte dai vari punti di questa linea è:

$$\frac{1}{R_g} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + \xi^2 - p^2 \zeta'^2}} \cdot \frac{\partial \sqrt{p^2 + \xi^2}}{\partial \sigma};$$

osservando che $\zeta'^2 = 1 - \xi'^2$, e che nel nostro caso: $R_g = \frac{1}{k}$, risulta:

$$\frac{1}{k} \xi \xi' = \sqrt{p^2 + \xi^2} \sqrt{\xi^2 + p^2 \xi'^2}, \quad \text{da cui: } 1 = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{k^2} - p^2\right) \xi^2 - p^4}}{\xi \sqrt{\xi^2 + p^2}} \xi'.$$

Moltiplicando per $d\sigma$ e integrando, si ottiene:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{k^2} - p^2\right) \xi^2 - p^4}}{\xi \sqrt{\xi^2 + p^2}} d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{k^2} - p^2} \log \left\{ \frac{p^2 \left(\frac{1}{k^2} - 2p^2\right)}{2 \sqrt{\frac{1}{k^2} - p^2}} + \xi^2 \sqrt{\frac{1}{k^2} - p^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{k^2} - p^2\right) \xi^4 + p^2 \left(\frac{1}{k^2} - 2p^2\right) \xi^2 - p^6} \right\} \\ &\quad + \frac{p}{2} \cdot \text{arc} \cdot \text{sen} \left\{ \frac{p^2 \left(2p^2 - \frac{1}{k^2}\right) \xi^2 + 2 \left(\frac{1}{k^2} - p^2\right)}{\frac{1}{k^2} p^2 \xi^2} \right\}. \end{aligned}$$

Questa relazione fra l'arco σ della curva e la coordinata ξ , fissa completamente la curva medesima, essendo l'altra coordinata espressa per l'arco mediante la relazione $\zeta = \int \sqrt{1 - \xi'^2} d\sigma$.

Per $p = 0$ risulta $\sigma = \frac{1}{k} \log \xi$, che conduce alla trattrice, come è naturale poichè in tal caso l'elicoide si riduce alla pseudosfera.

Vediamo ora a quale dei tre tipi di elicoidi a curvatura costante negativa appartiene l'elicoide del DINI; riduciamo l'elemento lineare (17) dell'elicoide alle coordinate ortogonali $\sigma = \text{cost.}$, $t = \text{cost.}$; ponendo:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial v}{\partial t} dt,$$

la (17) diviene:

$$dS^2 = \left\{ 1 + 2p \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} + (p^2 + \xi^2) \left(\frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)^2 \right\} d\sigma^2 + \\ + 2 \frac{\partial v}{\partial t} \left\{ p \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} + (p^2 + \xi^2) \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right\} d\sigma dt + (p^2 + \xi^2) \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dt^2,$$

e la condizione d'ortogonalità porta all'eguaglianza:

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma} = -p \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial \sigma}}{p^2 + \xi^2}, \quad \text{da cui: } v = t - p \int \frac{d\zeta}{p^2 + \xi^2},$$

ciò che riduce (17) alla forma:

$$dS^2 = \left(1 - p^2 \frac{\zeta'^2}{p^2 + \xi^2} \right) d\sigma^2 + (p^2 + \xi^2) dt^2.$$

Siccome quest'elemento lineare si può ridurre alla forma:

$$dS^2 = ds^2 + (p^2 + \xi^2) dt^2,$$

quando sia s l'arco delle geodetiche principali, si ponga

$$ds = \sqrt{1 - p^2 \frac{\zeta'^2}{p^2 + \xi^2}} \cdot d\sigma.$$

Allora, ricordando che, per essere il profilo una trattrice coll'assintoto coincidente coll'asse delle ζ si deve avere:

$$\xi = h e^{\frac{\sigma}{m}}, \quad (18)$$

essendo h una costante ed m la lunghezza costante delle tangenti di questa curva, si avrà:

$$s = \frac{h}{m} \sqrt{m^2 + p^2} \int \frac{e^{\frac{\sigma}{m}} \cdot d\sigma}{\sqrt{p^2 + h^2 e^{\frac{2\sigma}{m}}}},$$

la quale, col fare uso della (18), diviene:

$$s = \sqrt{m^2 + p^2} \int \frac{d\xi}{\sqrt{p^2 + \xi^2}} = \sqrt{m^2 + p^2} \log(\xi + \sqrt{p^2 + \xi^2}).$$

Di qui si ricava:

$$\xi = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{s}{\sqrt{m^2 + p^2}}} - p^2 e^{-\frac{s}{\sqrt{m^2 + p^2}}} \right),$$

e conseguentemente sarà:

$$\begin{aligned} dS^2 &= ds^2 + \left\{ p^2 + \frac{1}{4} \left(e^{\frac{s}{\sqrt{m^2+p^2}}} - p^2 e^{-\frac{s}{\sqrt{m^2+p^2}}} \right)^2 \right\} dt^2 = \\ &= ds^2 + \left(e^{\frac{s}{\sqrt{m^2+p^2}}} + p^2 e^{-\frac{s}{\sqrt{m^2+p^2}}} \right)^2 dt_1^2, \end{aligned}$$

avendo posto $2t_1 = t$. Confrontando questa colla forma (16), si vede che abbiamo:

$$a = 1, \quad b = p^2, \quad k = \frac{1}{\sqrt{m^2+p^2}}.$$

Perciò « l'elicoide del DINI appartiene al 2.^o gruppo degli elicoidi a curvatura costante negativa e si ottiene dalla formola generale (16) supponendo $a = 1$, $b = p^2$; in questa superficie la curvatura costante è data dalla formola $K = -\frac{1}{m^2+p^2}$, essendo p il parametro del moto elicoidale ed m la lunghezza costante delle tangenti della trattrice profilo meridiano ».

Il quadrato dell'elemento lineare dell'elicoide del DINI, la cui curvatura è $-k^2$, può scriversi:

$$dS^2 = ds^2 + (e^{ks} + p^2 e^{-ks})^2 dt^2;$$

si può quindi facilmente determinare la superficie di rivoluzione la quale con flessioni può ridursi a un elicoide del DINI. Infatti si supponga che l'elicoide si deformi in una superficie di rivoluzione; se ξ, ζ indicano le coordinate dei punti del meridiano posto nel piano $y = 0$, si avrà:

$$dS^2 = ds^2 + \xi^2 dt^2,$$

e quindi:

$$\xi = e^{ks} + p^2 e^{-ks},$$

$$\zeta = \int \sqrt{1 - \xi'^2} ds = \int \frac{\sqrt{-k^2 e^{4ks} + (1 + 2p^2 k^2) e^{2ks} - p^2 k^2}}{e^{ks}} \cdot ds.$$

Queste relazioni, che ci danno le coordinate della curva in funzione dell'arco, la determinano completamente. Più generalmente potremo dire « gli elicoidi a curvatura costante negativa $dS^2 = ds^2 + (ae^{ks} + be^{-ks})^2 dt^2$, sono applicabili sulla superficie di rivoluzione la cui curva meridiana è rappresentata dalle equazioni:

$$\xi = ae^{ks} + be^{-ks}, \quad \zeta = \int \frac{\sqrt{-a^2 k^2 e^{4ks} + (1 + 2abk^2) e^{2ks} - b^2 k^2}}{e^{ks}} \cdot ds.$$

§ 9.

Raggio di curvatura geodetica di una linea qualunque tracciata sopra un elicoide. — Se chiamiamo σ l'arco di una linea qualunque, che noi faremo muovere di moto elicoidale di parametro p intorno all'asse delle z , e abbiamo presente le (1), abbiamo per il quadrato dell'elemento lineare della superficie:

$$dS^2 = d\sigma^2 + 2(p\varphi' + R^2)d\sigma dv + (p^2 + R^2)dv^2.$$

Le equazioni $\sigma = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ rappresentano rispettivamente le eliche e la generatrice dell'elicoide nelle sue varie posizioni; chiamando r_g il raggio di curvatura geodetica della linea generatrice, abbiamo:

$$\frac{1}{r_g} = \frac{1}{\sqrt{EG + F^2}} \left\{ \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{F}{\sqrt{E}} \right) \right\};$$

e se i è l'angolo sotto il quale le generatrici segano le geodetiche principali, avremo:

$$\text{sen } i = \cos(\sigma, v) = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \cos i = \text{sen}(\sigma, v) = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}},$$

e quindi:

$$\frac{1}{r_g} = - \frac{1}{\cos i \sqrt{p^2 + R^2}} \cdot \frac{d}{d\sigma} (\text{sen } i \sqrt{p^2 + R^2}) = - \text{tang } i \cdot \frac{d \log (\text{sen } i \sqrt{p^2 + R^2})}{d\sigma}.$$

Se la linea è geodetica, avremo $\frac{1}{r_g} = 0$, e quindi « sopra un elicoide qualunque, lungo una geodetica qualunque, è verificata la relazione:

$$\text{sen } i \cdot \sqrt{p^2 + R^2} = \text{costante} \text{ »}. \quad (18)$$

Se la linea che si considera è una lossodromia, sarà i costante e perciò

$$\frac{1}{r_g} = - \text{tang } i \frac{d \log \sqrt{p^2 + R^2}}{d\sigma};$$

ma al paragrafo precedente si è trovato per la curvatura geodetica $\frac{1}{R_g}$ delle eliche:

$$\frac{1}{R_g} = \frac{R R'}{p^2 + R^2} = \frac{d \log \sqrt{p^2 + R^2}}{ds},$$

essendo s l'arco della geodetica principale. Confrontando queste due relazioni,

si deduce

$$\frac{1}{r_g} = -\operatorname{tang} i \cdot \frac{1}{R_g} \frac{ds}{d\sigma},$$

e poichè $\frac{ds}{d\sigma} = \cos i$, risulta:

$$\frac{1}{r_g} = -\operatorname{sen} i \cdot \frac{1}{R_g}, \quad \text{d'onde} \quad r_g = -\frac{R_g}{\operatorname{sen} i}.$$

Conseguentemente « il raggio di curvatura geodetica di una traiettoria isogonale delle eliche di un elicoide qualunque è proporzionale al raggio di curvatura geodetica delle eliche ».

Considerando in un punto di un elicoide due lossodromie ad angolo retto, esse tagliano la geodetica principale sotto gli angoli i e $\frac{\pi}{2} - i$; dunque, indicando con r_g , r'_g i loro raggi di curvatura geodetica, avremo:

$$r_g \operatorname{sen} i = -R_g, \quad r'_g \cos i = -R_g \quad \text{d'onde:} \quad r_g^2 + r'^2_g = R_g^2.$$

Dunque « la somma dei quadrati dei raggi di curvatura geodetica di due lossodromie ortogonali in uno stesso punto di un elicoide è costante ed eguale al quadrato del raggio di curvatura geodetica dell'elica in quello stesso punto ».

Applicando un risultato del § 8 potremo dire: « se sopra un elicoide vi è una lossodromia a curvatura geodetica costante, tutte hanno la stessa proprietà e l'elicoide è quello a curvatura costante negativa del 3.^o gruppo ».

Nell'elicoide riferito alle eliche e alle traiettorie ortogonali si ha:

$$dS^2 = ds^2 + (p^2 + R^2)dv^2,$$

e quindi il coseno dell'angolo che la tangente alle eliche ($s = \text{cost.}$) fa coll'asse delle z è:

$$\cos i = \frac{\frac{dz}{dv}}{\sqrt{p^2 + R^2}} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + R^2}}.$$

Dunque se ρ è il raggio di curvatura delle eliche, sarà:

$$\rho = \frac{R}{\operatorname{sen}^2 i} = \frac{p^2 + R^2}{R}.$$

Indicando con ω l'angolo sotto il quale il piano osculatore delle eliche sega la superficie, si ha dunque:

$$R_g = \frac{\rho}{\cos \omega}, \quad \text{d'onde:} \quad \cos \omega = \frac{\rho}{R_g} = \frac{dR}{ds}.$$

Possiamo dunque dire « in un elicoide qualunque l'angolo i sotto il quale le eliche segano le generatrici dei rispettivi cilindri, il raggio di curvatura assoluta ρ delle eliche e l'angolo ω sotto il quale i piani osculatori delle eliche segano la superficie sono dati dalle relazioni:

$$\cos i = \frac{p}{\sqrt{p^2 + R^2}}, \quad \rho = \frac{p^2 + R^2}{R}, \quad \cos \omega = \frac{dR}{ds},$$

essendo s l'arco della geodetica principale ».

Si vede quindi che in uno stesso elicoide non può darsi che per tutte le eliche risulti i ovvero ρ costante; invece può darsi che risulti costante ω . Infatti se ω è costante, risulta dall'ultima relazione:

$$R = s \cdot \cos \omega + \text{cost.},$$

e le coordinate (2) dei punti della geodetica principale divengono.

$$\left. \begin{aligned} \xi &= s \cos \omega \cdot \cos \left\{ \tan \omega \log \frac{p + \sqrt{p^2 + s^2 \cos^2 \omega}}{s} \right\}, \\ \eta &= -s \cos \omega \cdot \sin \left\{ \tan \omega \log \frac{p + \sqrt{p^2 + s^2 \cos^2 \omega}}{s} \right\}, \\ \zeta &= -\tan \omega \sqrt{p^2 + s^2 \cos^2 \omega}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Possiamo facilmente trovare il profilo meridiano dell'elicoide; infatti indicando con θ l'espressione $\tan \omega \cdot \log \frac{p + \sqrt{p^2 + s^2 \cos^2 \omega}}{s}$, si trova che le (19) si ottengono dalle (6) col porre in queste:

$$M = s \cdot \cos \omega \cdot \cos(\theta - u), \quad N = s \cdot \cos \omega \cdot \sin(\theta - u).$$

Allora le (7) ci danno:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \sqrt{M^2 + N^2} = s \cdot \cos \omega, \\ \zeta_0 &= \zeta - p \cdot \arctan \frac{M \sin u + N \cos u}{M \cos u - N \sin u} = \\ &= \tan \omega \sqrt{p^2 + s^2 \cos^2 \omega} - p \cdot \tan \omega \cdot \log \frac{p + \sqrt{p^2 + s^2 \cos^2 \omega}}{s}, \end{aligned}$$

che sono le coordinate del profilo meridiano. Eliminando s fra le precedenti, abbiamo:

$$\zeta_0 = \tan \omega \sqrt{p^2 + \xi_0^2} - p \tan \omega \cdot \log \frac{p + \sqrt{p^2 + \xi_0^2}}{\xi_0} - p \tan \omega \cdot \log \cos \omega,$$

che, con un trasporto d'assi, si può ridurre alla forma:

$$\zeta_0 \cotg \omega = \sqrt{p^2 + \zeta_0^2} - \log \frac{p + \sqrt{p^2 + \zeta_0^2}}{\zeta_0}.$$

Tale equazione, rappresentante il profilo meridiano dell'elicoide in discorso, è molto analoga a quella della trattrice.

Se consideriamo un altro elicoide della stessa specie, avremo per equazione cartesiana del suo profilo meridiano:

$$\zeta_1 \cotg \omega_1 = \sqrt{p_1^2 + \zeta_1^2} - p_1 \log \cdot \frac{p_1 + \sqrt{p_1^2 + \zeta_1^2}}{\zeta_1};$$

e quindi, se supponiamo $p_1 = p$, nei punti delle due curve di eguale ascissa ($\zeta_1 = \zeta_0$) avremo:

$$\zeta_0 \cotg \omega = \zeta_1 \cotg \omega_1, \quad \text{d'onde:} \quad \zeta_1 = \frac{\cotg \omega}{\cotg \omega_1} \zeta_0 = a \zeta_0,$$

essendo a una costante.

Dunque « i profili meridiani di tutti gli elicoidi, aventi lo stesso parametro, in cui è costante l'angolo sotto il quale i piani osculatori delle eliche segano la superficie, si ottengono dal profilo meridiano di uno qualunque di essi, variando le coordinate parallele all'asse dell'elicoide in un rapporto costante arbitrario ».

Se mettiamo la condizione che risulti $\omega = i$, si avrà

$$\frac{dR}{ds} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + R^2}}, \quad \text{d'onde:} \quad 2ps + q = R\sqrt{p^2 + R^2} + p^2 \log \{R + \sqrt{p^2 + R^2}\};$$

questa relazione, col sussidio delle (2), ci determina completamente le superficie domandate. Se poniamo $\omega + i = \frac{\pi}{2}$, risulta $\cos^2 i + \cos^2 \omega = 1$, cioè:

$$\frac{p^2}{p^2 + R^2} + \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 = 1, \quad \text{da cui:} \quad \int \frac{R dR}{\sqrt{p^2 + R^2}} = s + a.$$

Integrando si ottiene:

$$\sqrt{p^2 + R^2} = s + a,$$

la quale dimostra che l'elicoide domandato è sviluppabile.

Vediamo se vi sono degli elicoidi in cui il rapporto della curvatura alla curvatura geodetica delle sue eliche sia costante; mettendo la condizione $aK = \frac{1}{R_g}$, avremo:

$$-a \frac{\partial^2 \sqrt{p^2 + R^2}}{\partial s^2} = \frac{\partial \sqrt{p^2 + R^2}}{\partial s},$$

d'onde:

$$\log\left(\frac{\partial\sqrt{p^2+R^2}}{\partial s}\right)=\log b-\frac{s}{a}, \quad \text{ossia:} \quad \frac{\partial\sqrt{p^2+R^2}}{\partial s}=be^{-\frac{s}{a}}.$$

Moltiplicando per ds e integrando abbiamo:

$$\sqrt{p^2+R^2}=-abe^{-\frac{s}{a}},$$

la quale dimostra il teorema « *gli elicoidi in cui il rapporto fra la curvatura geodetica delle eliche e la curvatura della superficie è una costante a , sono tutti e soli gli elicoidi a curvatura costante negativa $-a^2$ del 3.^o gruppo* ».

Passiamo a determinare gli elicoidi in cui la curvatura è proporzionale al quadrato della curvatura geodetica delle eliche; dovremo avere $K=\frac{m}{R_g^2}$, essendo m una costante arbitraria. Questa relazione diviene:

$$\frac{-1}{\sqrt{p^2+R^2}} \frac{\partial^2\sqrt{p^2+R^2}}{\partial s^2} = \frac{m}{p^2+R^2} \left(\frac{\partial\sqrt{p^2+R^2}}{\partial s}\right)^2,$$

la quale, col porre $\sqrt{p^2+R^2}=y$, si può scrivere $-\frac{d^2y}{ds^2}=\frac{m}{y}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2$.

Se si prende per indipendente y e per funzione $\frac{dy}{ds}=\theta$, si avrà

$$-\frac{d^2y}{ds^2}=m\theta\frac{d\theta}{dy};$$

dunque

$$-\theta\frac{d\theta}{dy}=\frac{m}{y}\theta^2, \quad \text{che si scinde nelle due} \quad \theta=0, \quad -\frac{d\theta}{dy}=\frac{m\theta}{y}.$$

La prima relazione porta all'altra $y=\sqrt{p^2+R^2}=\text{costante}$ e dà evidentemente il cilindro circolare, che nella ricerca presente si può escludere; l'altra relazione può scriversi:

$$-\frac{d\theta}{\theta}=m\frac{dy}{y}, \quad \text{d'onde per integrazione:} \quad \log\theta=\log a-\log y^m.$$

Se ne deduce:

$$\theta=\frac{a}{y^m}, \quad \text{d'onde} \quad y'y^m=a;$$

integrando:

$$\int y^m dy = as + b.$$

Se $m \geq -1$, risulta $\frac{y^{1+m}}{1+m} = as + b$, da cui cangiando a e b rispettivamente in $\frac{a}{1+m}$ e $\frac{b}{1+m}$

$$y = (as + b)^{\frac{1}{1+m}}.$$

Se poi $m = -1$, allora:

$$\log y = as + \log b, \quad \text{d'onde} \quad y = be^{as}.$$

Perciò « *gli elicoidi in cui la curvatura assoluta è proporzionale al quadrato della curvatura geodetica delle eliche* ($K = \frac{m}{R_g^2}$) *sono quelli per i quali*

$$\sqrt{p^2 + R^2} = (as + b)^{\frac{1}{1+m}}$$

se m è diverso da -1 e quelli per i quali $\sqrt{p^2 + R^2} = be^{as}$, cioè gli elicoidi a curvatura costante negativa del 3.º gruppo, se $m = -1$ ».

Se supponiamo $m = 0$, abbiamo $\sqrt{p^2 + R^2} = as + b$, cioè gli elicoidi sviluppabili.

Per $m = 1$, si ha $p^2 + R^2 = as + b$, e quindi « *gli elicoidi aventi la proprietà che i loro punti, in una deformazione che conserva la superficie pure un elicoide, possono non avere movimenti di traslazione nella direzione dell'asse* (v. § 1) *sono caratterizzati dalla proprietà che la loro curvatura è eguale al quadrato della curvatura geodetica delle loro eliche* ».

§ 10.

Il teorema espresso dalla formola (18) e relativo alle geodetiche degli elicoidi, può essere utile in molti casi. Diamo qualche esempio, determinando anzi tutto quegli elicoidi in cui le traiettorie ortogonali dei profili meridiani sono geodetiche.

Sia L il profilo meridiano dell'elicoide posto nel piano $y = 0$, ξ e ζ le coordinate de' suoi punti; se per un punto qualunque dell'elicoide facciamo passare il profilo meridiano L , la sua traiettoria ortogonale l , l'elica E e la geodetica principale M , abbiamo (avendo riguardo ai valori di E , F , G calcolati al § 2)

$$\text{sen}(l, \widehat{M}) = \text{sen}(L, \widehat{E}) = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}} = \frac{\sqrt{p^2 + \xi^2 - p^2 \zeta'^2}}{\sqrt{p^2 + \xi^2}}.$$

Osservando dunque che nel caso nostro $R = \xi$, la formola (18) dà:

$$p^2 + \xi^2 - p^2 \xi'^2 = a^2,$$

con a costante; siccome poi $\xi'^2 = 1 - \xi'^2$, avremo

$$\frac{p \xi'}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = 1, \quad \text{d'onde: } s + \text{cost.} = p \arcsen \left(\frac{\xi}{a} \right),$$

la quale ci offre:

$$\xi = a \cdot \arcsen \left(\frac{s}{p} + m \right),$$

con m costante arbitraria, che si può anche supporre nulla con una scelta conveniente dell'origine degli archi. Abbiamo dunque « *gli elicoidi in cui le traiettorie ortogonali dei profili meridiani sono geodetiche vengono generati dalle curve piane $\xi = a \arcsen \left(\frac{s}{p} \right)$, $\zeta = \int \sqrt{1 - \frac{a^2}{p^2} \cos^2 \left(\frac{s}{p} \right)} \cdot ds$, le quali si muovono di moto elicoidale di parametro p intorno all'asse delle ζ ».*

Nel caso in cui $a = p$, si ha:

$$\xi = p \arcsen \left(\frac{s}{p} \right), \quad \zeta = \int \arcsen \left(\frac{s}{p} \right) ds = -p \cdot \cos \left(\frac{s}{p} \right),$$

che rappresenta un cerchio di raggio p . Perciò « *se un cerchio si muove di moto elicoidale di parametro eguale al raggio, intorno a una retta passante pel suo centro e situata nel suo piano, descrive un elicoide sul quale le traiettorie ortogonali dei profili meridiani sono geodetiche* ».

Troviamo altresì gli elicoidi in cui le traiettorie ortogonali delle sezioni rette sono geodetiche: chiamando L la sezione retta che passa per un punto qualunque dell'elicoide, l la sua traiettoria ortogonale, E l'elica, M la geodetica principale, si ha:

$$\widehat{\text{sen}(l, M)} = \frac{\sqrt{p^2 + \xi^2 + \eta^2 - (\xi \eta' - \xi' \eta)^2}}{\sqrt{p^2 + \xi^2 + \eta^2}}.$$

Ricordando quindi che nel nostro caso

$$R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

avremo:

$$\xi \eta' - \xi' \eta - (p^2 + \xi^2 + \eta^2) = a^2 - p^2,$$

la quale col porre: $\xi = R \cos u$, $\eta = R \sin u$, diviene:

$$\frac{R^2}{\sqrt{R^2 + R'^2}} - R^2 = a^2,$$

da cui si deduce facilmente:

$$u + \text{cost.} = \int \frac{(\alpha^2 + R^2) dR}{R \sqrt{R^2 - (\alpha^2 + R^2)^2}}.$$

Questa quadratura si fa facilmente col porre $R^2 = t$ e risulta:

$$2u + \text{cost.} = \text{arc} \cdot \text{sen} \frac{2R^2 - (2\alpha^2 + 1)}{\sqrt{1 + 4\alpha^2}} - \text{arc} \cdot \text{sen} \frac{2 - (2\alpha^2 + 1)R^2}{\sqrt{1 + 4\alpha^2}}.$$

Tale è l'equazione polare della sezione retta dell'elicoide domandato.

§ 11.

Passiamo alla determinazione dei raggi di curvatura principali r_1, r_2 di un elicoide. Se chiamiamo S l'elicoide dato, $v = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$ le sue linee di curvatura corrispondenti rispettivamente ai raggi r_1, r_2 , S_v la sua evoluta rapporto alle $v = \text{cost.}$, si ha che alle linee v di S corrispondono le geodetiche principali di S_v , le quali sono le evolute delle prime. Avremo perciò:

$$r_1 = s.$$

Per un teorema del chiarissimo prof. DINI (*), la differenza $r_1 - r_2$ è eguale al raggio di curvatura geodetica delle linee di S_v che sono traiettorie ortogonali delle geodetiche principali $v = \text{cost.}$, cioè al raggio di curvatura geodetica delle eliche di S_v . Dunque « la differenza $r_1 - r_2$ dei raggi di curvatura principali di un elicoide qualunque rappresenta il raggio di curvatura geodetica delle eliche dell'elicoide evoluta del primo ».

Dalle relazioni

$$r_1 = s, \quad r_1 - r_2 = R_g, \quad \text{si deduce} \quad r_1 = s, \quad r_2 = r_1 - R_g = s - R_g,$$

e quindi « in un elicoide qualunque i raggi di curvatura principali sono dati dalle formole $r_1 = s$, $r_2 = s - R_g$, essendo s l'arco delle geodetiche principali e R_g il raggio di curvatura geodetica delle eliche dell'elicoide evoluta del dato rapporto ai raggi r_1 ».

Questo teorema permette di trovare completamente gli elicoidi in cui i raggi di curvatura principali r_2, r_1 sono legati dalla relazione $r_2 = \varphi(r_1)$, es-

(*) *Ricerche sulla teoria delle superficie.* Società italiana delle Scienze, Serie III, T. II.

sendo φ il simbolo di una funzione qualunque; avremo infatti

$$s - R_g = \varphi(s), \quad \text{d'onde} \quad \frac{1}{R_g} = \frac{1}{s - \varphi(s)}.$$

E siccome $\frac{1}{R_g} = \frac{R R'}{p^2 + R^2}$, avremo: $\frac{R R'}{p^2 + R^2} = \frac{1}{s - \varphi(s)}$; moltiplicando per ds e integrando, si ottiene:

$$\log \sqrt{p^2 + R^2} = \log a + \int \frac{ds}{s - \varphi(s)},$$

con a costante arbitraria; di qui si deduce:

$$\sqrt{p^2 + R^2} = a \cdot e^{\int \frac{ds}{s - \varphi(s)}}$$

Dunque « *gli elicoidi nei quali è verificata la relazione $r_2 = \varphi(r_1)$ fra i raggi di curvatura principali, sono evolventi degli elicoidi per i quali*

$$\sqrt{p^2 + R^2} = a e^{\int \frac{ds}{s - \varphi(s)}}.$$

Esaminiamo qualche caso particolare. — Se poniamo $\varphi(r_1) = \frac{r_1}{k r_1 - 1}$, risulta:

$$\int \frac{ds}{s - \varphi(s)} = \int \frac{ks - 1}{ks^2 - 2s} ds = \log \sqrt{ks^2 - 2s}.$$

Consequentemente

$$\sqrt{p^2 + R^2} = a \sqrt{ks^2 - 2s}; \quad \text{d'altronde la relazione} \quad r_2 = \frac{r_1}{k r_1 - 1},$$

porta all'altra $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = k$. Dunque « *gli elicoidi a curvatura media costante k sono evolventi degli elicoidi per i quali $\sqrt{p^2 + R^2} = a \sqrt{ks^2 - 2s}$.*

Per $k = 0$, risulta:

$$\int \frac{ds}{s - \varphi(s)} = \int \frac{ds}{2s} = \log \sqrt{s},$$

cioè « *gli elicoidi ad area minima sono evolventi degli elicoidi per i quali $\sqrt{p^2 + R^2} = a \sqrt{s}$.*

Ricordando un risultato del § 1, potremo dire « *le evolute degli elicoidi ad area minima hanno la proprietà di potersi deformare in altri elicoidi, senza che i loro punti subiscano traslazioni nella direzione dell'asse* ».

Ponendo $\varphi(r_1) = k - r_1$, si ha:

$$\int \frac{ds}{s - \varphi(s)} = \int \frac{ds}{2s - k} = \log \sqrt{2s - k}, \quad \text{e quindi} \quad \sqrt{p^2 + R^2} = a \sqrt{2s - k};$$

perciò « gli elicoidi in cui è costante ($= k$) la somma dei raggi di curvatura principali, sono evolventi degli elicoidi per i quali $\sqrt{p^2 + R^2} = a \sqrt{2s - k}$ ».

Ponendo $\varphi(r_1) = kr_1$, si ha:

$$\int \frac{ds}{s - \varphi(s)} = \int \frac{ds}{s - ks} = \frac{1}{1 - k} \log s, \quad \text{e quindi} \quad \sqrt{p^2 + R^2} = as^{\frac{1}{1-k}};$$

dunque « gli elicoidi in cui il rapporto $\frac{r_2}{r_1}$ dei raggi di curvatura principali

è una costante k sono evolventi degli elicoidi in cui $\sqrt{p^2 + R^2} = as^{\frac{1}{1-k}}$ ».

Si osservi che per $k = -1$ si hanno le evolute degli elicoidi ad area minima, come deve essere.

Ponendo $\varphi(r_1) = k + r_1$, abbiamo

$$\int \frac{ds}{s - \varphi(s)} = \frac{s}{k} \quad \text{e quindi} \quad \sqrt{p^2 + R^2} = ae^{\frac{s}{k}},$$

ciò che dimostra il teorema: « gli elicoidi in cui è costante ($= \frac{1}{k}$) la differenza $r_2 - r_1$ dei raggi di curvatura principali sono evolventi degli elicoidi a curvatura costante negativa $-k^2$ del 3.^o gruppo ».

Ora se poniamo $b = 0$ nelle formole del § 8, che ci danno le coordinate dei punti degli elicoidi pseudosferici, otteniamo dopo alcuni calcoli:

$$\begin{aligned} \xi &= \sqrt{a^2 e^{2ks} - p^2} \cdot \cos \left\{ \frac{p}{a} \int \frac{\sqrt{-k^2 a^4 e^{4ks} + a^2 e^{2ks} - p^2}}{e^{ks} (a^2 e^{2ks} - p^2)} ds \right\}, \\ \eta &= \sqrt{a^2 e^{2ks} - p^2} \cdot \sin \left\{ \frac{p}{a} \int \frac{\sqrt{-k^2 a^4 e^{4ks} + a^2 e^{2ks} - p^2}}{e^{ks} (a^2 e^{2ks} - p^2)} ds \right\}, \\ \zeta &= \frac{1}{a} \int \frac{\sqrt{-k^2 a^4 e^{4ks} + a^2 e^{2ks} - p^2}}{e^{ks}} ds. \end{aligned}$$

Le coordinate di un punto qualunque di quell'evolvente di questa linea che genera l'elicoide domandato sono le seguenti:

$$\xi_1 = \xi - s \cos \alpha, \quad \eta_1 = \eta - s \cos \beta, \quad \zeta_1 = \zeta - s \cos \gamma.$$

Indicando con h la curvatura dell'elicoide S , avremo:

$$\frac{1}{h} = r_1 r_2 = s^2 - s R_g, \quad \text{d'onde:} \quad \frac{1}{R_g} = \frac{R R'}{p^2 + R^2} = \frac{h s}{h s^2 - 1}.$$

Se dunque h è una costante positiva k^2 , sarà

$$\frac{RR'}{p^2 + R^2} = \frac{k^2 s}{k^2 s^2 - 1}, \text{ da cui integrando: } \log \sqrt{p^2 + R^2} = \log a + \log \sqrt{k^2 s^2 - 1},$$

e conseguentemente:

$$\sqrt{p^2 + R^2} = a \sqrt{k^2 s^2 - 1}.$$

Se poi h è una costante negativa $-k^2$, avremo:

$$\frac{RR'}{p^2 + R^2} = \frac{k^2 s}{k^2 s^2 + 1}, \text{ d'onde } \log \sqrt{p^2 + R^2} = \log a + \log \sqrt{k^2 s^2 + 1},$$

e perciò

$$\sqrt{p^2 + R^2} = a \sqrt{k^2 s^2 + 1}.$$

Dunque « le evolute degli elicoidi a curvatura costante positiva ($+k^2$) sono tali che: $p^2 + R^2 = a^2(k^2 s^2 - 1)$; le evolute degli elicoidi a curvatura costante negativa ($-k^2$) sono tali che: $p^2 + R^2 = a^2(k^2 s^2 + 1)$ ».

Negli elicoidi in cui $r_2 = \varphi(r_1)$ si ha per il quadrato dell'elemento lineare dell'evoluta rapporto al raggio r_1 :

$$dS^2 = ds^2 = a^2 e^{2 \int \frac{ds}{s - \varphi(s)}} \cdot dv^2,$$

ciò che dimostra il teorema « le evolute degli elicoidi in cui $r_2 = \varphi(r_1)$ sono

applicabili sulla superficie di rivoluzione generata dalla curva $\xi = a e^{\int \frac{ds}{s - \varphi(s)}}$, $\xi = \int \sqrt{1 - \xi'^2} ds$, che ruota intorno all'asse delle ξ ».

Così per es. nel caso $\varphi(r_1) = kr_1$, si ha $\xi = a s^{\frac{1}{1-k}}$ la quale per $k = \frac{1}{2}$ diviene $\xi = a s^2$.

Dunque « l'evoluta relativa al raggio r_1 dell'elicoide in cui $r_2 = \frac{1}{2} r_1$ è applicabile sulla superficie generata dalla rotazione di una cicloide intorno alla tangente nel vertice ».

Così pure si trova che « l'evoluta dell'elicoide a curvatura costante positiva ($+k^2$) o a curvatura costante negativa ($-k^2$) è rispettivamente applicabile sulle superficie di rivoluzione le cui linee meridiane sono caratterizzate dalle equazioni: $\xi = a \sqrt{k^2 s^2 - 1}$, $\xi = a \sqrt{k^2 s^2 + 1}$, l'ultima delle quali, nel caso di $a = \frac{1}{k}$, porta alla catenaria ».

Per l'evoluta dell'elicoide ad area minima, si ha: $\xi = a\sqrt{s}$ e conseguentemente:

$$\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{4s^2 - a^2} - \frac{a^2}{8} \log \frac{2\sqrt{s} + \sqrt{4s - a^2}}{2\sqrt{s} - \sqrt{4s - a^2}};$$

eliminando s fra queste due relazioni, si ha:

$$\zeta = \frac{\xi \sqrt{4\xi^2 - a^4}}{2a^2} - \frac{a^2}{8} \log \frac{2\xi + \sqrt{4\xi^2 - a^4}}{2\xi - \sqrt{4\xi^2 - a^4}}.$$

Sulle superficie di rivoluzione generata da questa curva, ruotante intorno all'asse delle ζ , sono applicabili le evolute degli elicoidi ad area minima.

§ 12.

I teoremi dimostrati al paragrafo precedente permettono di trovare molte classi particolari di elicoidi; così ad es.: volendo gli elicoidi ad area minima, basta fare $\sqrt{p^2 + R^2} = a\sqrt{s}$ nelle formole (2) del § 1 e si ottengono le coordinate ξ, η, ζ dei punti della geodetica principale L dell'evoluta. Ciò fatto, si consideri l'evolvente L_1 di L i cui punti hanno per coordinate:

$$\xi_1 = \xi - s \cos \alpha, \quad \eta_1 = \eta - s \cos \beta, \quad \zeta_1 = \zeta - s \cos \gamma;$$

questa curva L_1 , muovendosi di moto elicoidale di parametro p intorno all'asse delle ζ , genera l'elicoide più generale ad area minima. Analogamente si procede per la determinazione degli elicoidi di altre classi.

Il teorema poi dimostrato in principio del § 11 permette di risolvere una altra questione notevole relativa agli elicoidi; dato un elicoide S le due falde dell'evoluta sono due elicoidi S_1, S_2 (detti *complementari*), che hanno lo stesso asse e lo stesso parametro del dato.

Possiamo facilmente determinare l'elicoide complementare di un dato; consideriamo sull'elicoide S_1 , evoluta di S rapporto al raggio di curvatura r_1 , la geodetica principale rappresentata dalle (2); se $R_g = \frac{p^2 + R^2}{R R'}$ è il raggio di curvatura geodetica delle eliche di S_1 , le coordinate ξ_1, η_1, ζ_1 del punto di S_2 , che corrisponde al punto di coordinate ξ, η, ζ di S_1 , sono:

$$\xi_2 = \xi - R_g \cos \alpha, \quad \eta_2 = \eta - R_g \cos \beta, \quad \zeta_2 = \zeta - R_g \cos \gamma,$$

le quali si possono facilmente calcolare col ricorrere alle (2) del § 1.

Abbiamo così il teorema « la curva L rappresentata dalle equazioni (2) e l'altra L_1 rappresentata dalle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{p^2}{R} \cos \left\{ p \int \sqrt{\frac{1-R'^2}{p^2+R^2}} \cdot \frac{ds}{R} \right\} + \frac{p}{RR'} \sqrt{(p^2+R^2)(1-R'^2)} \sin \left\{ p \int \sqrt{\frac{1-R'^2}{p^2+R^2}} \cdot \frac{ds}{R} \right\} \\ \eta_1 &= -\frac{p^2}{R} \sin \left\{ p \int \sqrt{\frac{1-R'^2}{p^2+R^2}} \cdot \frac{ds}{R} \right\} - \frac{p}{RR'} \sqrt{(p^2+R^2)(1-R'^2)} \cos \left\{ p \int \sqrt{\frac{1-R'^2}{p^2+R^2}} \cdot \frac{ds}{R} \right\} \\ \zeta_1 &= -\int \sqrt{\frac{1-R'^2}{p^2+R^2}} \cdot R ds - \frac{p^2+R^2}{R'} \sqrt{\frac{1-R'^2}{p^2+R^2}}, \end{aligned} \right\}$$

muovendosi di moto elicoidale di parametro p intorno all'asse delle z , generano due elicoidi S_1, S_2 complementari. Le linee L sull'elicoide S_1 sono le geodetiche principali e le linee L_1 sull'elicoide S_2 sono le linee a tangenti conjugate colle sue geodetiche principali ».

Chiamando R_1 il raggio dei cerchi sezioni rette dei cilindri che contengono le eliche dell'elicoide S_2 complementare di S_1 , abbiamo:

$$R_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} = \frac{p \sqrt{p^2 + R^2 - R^2 R'^2}}{R R'}.$$

Mettendo quindi la condizione $R_1 = R$, si ottiene un'equazione che si può mettere sotto la forma

$$p = R R', \text{ d'onde: } R = \sqrt{2ps}.$$

Possiamo dunque dire « gli elicoidi che corrispondono ai loro complementari in modo, che le eliche corrispondenti delle due superficie siano situate sopra cilindri aventi lo stesso raggio, sono tutti e soli quelli nei quali è possibile una deformazione tale, che, lasciando inalterata la natura della superficie, non dia ai punti di essa alcuna traslazione nella direzione dell'asse ».

Farma, giugno 1888.