Das Zerfallen der Curven in gerade Linien.

Von

P. GORDAN in Erlangen.

Herr Brill hat in den Göttinger Nachrichten (Decbr. 1893) binäre Ueberschiebungen aufgestellt, aus denen man mittelst des Clebsch'schen Ränderungsverfahrens für ternäre, quaternäre u. s. w. Formen f die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür herstellen kann, dass sie in lineare Factoren zerfallen.

Für ternäre Formen besteht diese Bedingung in dem Verschwinden einer Ueberschiebung $(apu)^n$ *, die ich deshalb die Brill'sche Formel nennen will. Zweck dieser meiner Untersuchung ist, zu zeigen, dass $(apu)^n$ den Factor u_x^2 besitzt und durch ihn zu dividiren.

Das Verschwinden des Quotienten

$$\frac{(apu)^n}{u_x^2}$$

liefert dann in der That die einfachsten Bedingungen für das Zerfallen einer Curve in gerade Linien.

§ 1.

Die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Curve.

Die Lösung der Aufgabe, die Coordinaten der Schnittpunkte einer geraden Linie

$$v_x = 0$$

mit einer Curve

$$f = a_x^n = b_x^n$$

zu berechnen, ist allgemein bekannt. Wenn ich sie hier noch einmal reproducire, so liegt der Grund darin, dass die dabei auftretenden Beziehungen im Folgenden gebraucht werden.

*) Für quaternäre heisst sie $(apuv)^n$.

Man fixe auf v_x zwei beliebige Punkte x und y und bilde die Punktreihe

$$\lambda x - y;$$

auf ihr liegen die gesuchten Schnittpunkte, ihre Parameter bezeichne ich durch

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n,$$

sie sind die Wurzeln der Gleichung

$$(1) \quad (\lambda a_x - a_y)^n = f \cdot \{\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} \dots a_n\} = 0.$$

Nachdem diese Parameter λ_x durch Auflösung derselben bestimmt sind, findet man die Gleichungen der Schnittpunkte aus der Formel:

$$(2) \quad \lambda_x u_x - u_y = 0.$$

Da λ_x eine Wurzel der Gleichung (1) ist, so findet die Identität statt:

$$(\lambda_x a_x - a_y)^n = 0.$$

Eliminirt man λ_x aus derselben und F.(2), so erhält man die Formel:

$$(a_x u_y - u_x a_y)^n = (a u v)^n = 0,$$

sie stellt das Product der Schnittpunkte dar.

Verswindet $(a u v)^n$ für alle Werthe von u , so ist jeder Punkt von v Schnittpunkt; in diesem Falle bildet die Gerade v einen Theil der Curve f .

Vergleicht man auf beiden Seiten der F. (1) die Coefficienten der Potenzen von λ^{n-x} , so erhält man die Formel:

$$(3) \quad (-1)^x \binom{n}{x} f_{y^x} = f a_x.$$

Diese Coefficienten a_x sind die symmetrischen Elementarfunctionen der Wurzeln λ_x , man kann sie so schreiben:

$$(4) \quad (-1)^x a_x = \sum \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_x.$$

§ 2.

Die Schnittpunkte einer geraden Linie mit einer Curve, die in gerade Linien zerfällt.

Die Resultate des vorigen Paragraphen nehmen eine etwas andere Form an, wenn wir die Annahme machen, dass die Curve f in n gerade Linien

$$\alpha_{1,x} \alpha_{2,x} \dots \alpha_{n,x}$$

zerfällt. In diesem Falle hat man die Identitäten:

$$f = \alpha_{1,x} \alpha_{2,x} \dots \alpha_{n,x},$$

$$(a \alpha_x u)^n = 0.$$

Die Schnittpunkte der Linie v mit f vertheilen sich auf diese Geraden und wir können die Wurzeln λ_x so ordnen, das der Punkt

$$(2) \quad \lambda_x u_x - u_y = 0$$

auf die Linie α_x zu liegen kommt.

Es findet dann die Identität statt:

$$\lambda_x \alpha_{x,x} - \alpha_{x,y} = 0,$$

aus welcher für λ_x der Werth fließt:

$$\lambda_x = \frac{\alpha_{x,y}}{\alpha_{x,x}}.$$

Trägt man denselben in F. (4) ein, so wird dieselbe:

$$(4a) \quad (-1)^n a_x = \sum \frac{\alpha_{1,y}}{\alpha_{1,x}} \frac{\alpha_{2,y}}{\alpha_{2,x}} \dots \frac{\alpha_{n,y}}{\alpha_{n,x}}.$$

§ 3.

Die Brill'sche Formel.

Die Summe der Potenzen der Wurzeln λ_x :

$$s_v = \lambda_1^v + \lambda_2^v \dots \lambda_n^v$$

lassen sich mit Hilfe der Newton'schen Formeln als ganze Functionen der Coefficienten α_x darstellen. Die Entwicklung nach Potenzen und Producten derselben beginnt mit den Gliedern:

$$(5) \quad s_n = (-1)^n a_1^n + (-1)^{n-1} n a_1^{n-2} a_2 \dots$$

Trägt man in diese Formel für die α_x ihre Werthe aus F. (3):

$$f a_x = (-1)^x \binom{n}{x} f_y^x$$

ein, so erhält man für s_n einen Bruch, dessen Zähler eine ganze Function von f und seinen Polaren f_y^v und dessen Nenner f^n ist.

Hieraus folgt, dass das Product:

$$f^n s_n = n p$$

$$(6) \quad = f^n \cdot \left(\frac{\alpha_{1,y}^n}{\alpha_{1,x}^n} + \frac{\alpha_{2,y}^n}{\alpha_{2,x}^n} \dots \frac{\alpha_{n,y}^n}{\alpha_{n,x}^n} \right)$$

eine ganze Function von f und seinen Polaren ist. Die Entwicklung dieser ganzen Function nach Producten und Potenzen der Polaren beginnt mit den Gliedern:

$$(7) \quad p = n^{n-1} f_y^n - n^{n-1} \frac{n-1}{2} f f_y^{n-2} f_y^2 \dots$$

und die übrigen Glieder haben den Factor f^2 . Die Form p ist in den Variablen y vom Grade n ; ich schreibe sie symbolisch:

$$p = p_y^n.$$

Differentiirt man nach dem y und ersetzt man die Incremente durch x so wird:

$$f^n s_x = n p_y^x p_x^{n-x}.$$

Aus der Formel (6) folgt unmittelbar:

$$(8) \quad (ap u)^n = 0.$$

Diese Formel rührt von Brill her und ist die nothwendige Bedingung dafür, dass die Curve f in gerade Linien zerfällt. Man kann aber auch zeigen, dass sie hinreicht. Nimmt man nämlich auf f einen beliebigen Punkt x und legt in ihm eine Tangente f_y an die Curve, so giebt die Formel:

$$(afu)^n$$

das Product der Schnittpunkte der Tangente f_y mit der Curve f . Besteht nun die Formel (8), so verschwindet $(afu)^n$ für alle Werthe der u . Hieraus folgt dann, dass f_y einen Theil der Curve bildet. Da in diesem Falle alle Tangenten Theile der Curve f sind, so zerfällt dieselbe in gerade Linien.

§ 4.

Der Factor u_x^2 .

Die Ueberschiebung $(apu)^n$ liefert nicht die einfachste Form, deren Verschwinden das Zerfallen von f in gerade Linien angiebt. Zweck dieser Untersuchung ist zu zeigen, dass $(apu)^n$ durch u_x^2 theilbar ist und die Division auszuführen. Hiezu theile ich meine Arbeit in 4 Theile:

1) Ich gebe die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür an, dass eine Form

$$\varphi = u_q^n$$

die Potenz u_x^m zum Factor hat.

2) Wie oben gesagt kann man mittelst der Newton'schen Formeln s_n als ganze Function der Coefficienten a_x darstellen. Es werden nun Eigenschaften dieser ganzen Function abgeleitet, aus denen folgt, dass $(apu)^n$ den Factor u_x^2 besitzt.

3) Die Form

$$(afu)^n,$$

welche das 1^{te} Glied in der Entwicklung von $(apu)^n$ nach F. (7) ist, wird in die Normalform gebracht, d. h. in eine Form:

$$(afu)_x^n = Au_x^2 + Bf$$

der Art, dass B ein Aggregat symbolischer Producte wird, welche nur aus den symbolischen Factoren:

$$f, (abu), (afu), b_x$$

zusammengesetzt sind.

4) $(apu)^n$ wird durch u_x^2 dividirt.

§ 5.

Bedingung dafür, dass ϱ den Factor u_x^m hat.

Wir wollen uns in diesem Paragraphen mit den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür beschäftigen, dass eine Form:

$$(9) \quad \varrho = u_x^n$$

eine Potenz von u_x etwa u_x^m zum Factor hat, und beginnen mit dem Falle:

$$m = 1.$$

In demselben behaupten wir, dass:

$$(10) \quad (\varrho xy)^n = 0$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass ϱ den Factor u_x besitzt.

Beweis: Hat ϱ den Factor u_x , so findet man durch Division eine Form:

$$\vartheta = u_x^{n-1}$$

der Art, dass die Identität besteht:

$$u_x^n = u_x u_x^{n-1}.$$

Ersetzt man darin u durch $\widehat{xy}$, so entsteht die Formel (10).

Gilt umgekehrt diese Formel, so ersetze man y durch $\widehat{uv}$ und erhält:

$$\begin{aligned} 0 &= (\varrho x \widehat{uv})^n = (u_\varrho v_x - v_\varrho u_x)^n \\ &= \sum_{x=0}^{x=n} (-1)^x \binom{n}{x} (u_\varrho v_x)^{n-x} (v_\varrho u_x)^x, \end{aligned}$$

also:

$$\varrho v_x^n = - u_x v_\varrho \sum_{x=1}^{x=n} (-1)^x \binom{n}{x} (u_\varrho v_x)^{n-x} (v_\varrho u_x)^{x-1}$$

wodurch unsere Behauptung erwiesen ist.

Ich gehe nunmehr zu dem Falle

$$m = 2$$

über und behaupte, dass die Formel:

$$(10a) \quad v_\varrho (\varrho xy)^{n-1} = 0$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung liefert, dass ϱ den Factor u_x^2 besitzt.

Beweis: Hat ϱ den Factor u_x^2 , so findet man durch Division eine Form:

$$\vartheta = u_x^{n-2}$$

der Art, dass die Identität stattfindet:

$$u_\varrho^n = u_x^2 u_\vartheta^{n-2}.$$

Ich differentiire nach den u und ersetze die Incremente durch v ; es wird dann

$$n u_\varrho^{n-1} v_\varrho = 2 u_x v_x u_\vartheta^{n-2} + (n-2) u_x^2 u_\vartheta^{n-3} v_\vartheta.$$

Ersetzt man hier u durch $\widehat{xy}$, so erhält man die Formel (10a).

Besteht umgekehrt die Formel (10a), so ersetze man darin zunächst v durch $\widehat{xy}$, wodurch man F. (10) erhält, also vorerst sieht, dass die Form ϱ den Factor u_x besitzt, dass also eine Form:

$$\vartheta = u_\vartheta^{n-1}$$

der Art existirt, dass die Identität stattfindet:

$$u_\varrho^n = u_x u_\vartheta^{n-1}.$$

Differentiirt man nach den u und ersetzt die Incremente durch v , so wird:

$$n u_\varrho^{n-1} v_\varrho = v_x u_\vartheta^{n-1} + (n-1) u_x v_\vartheta u_\vartheta^{n-2}$$

und, wenn man hier u durch $\widehat{xy}$ ersetzt, nach F. (10a):

$$0 = v_x (\vartheta x y)^{n-1}.$$

Diese Formel zeigt, dass die Form ϑ den Factor u_x und somit ϱ den Factor u_x^2 besitzt.

In dieser Weise kann man fortfahren und zu den Fällen

$$m = 3, 4, 5, \dots$$

übergehen, indem man bei jedem neuen Falle annimmt, die früheren seien bereits erledigt.

Allgemein findet man als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ϱ den Factor u_x^m hat, die Formel:

$$(11) \quad u_\varrho^{m-1} (\varrho x y)^{n-m+1} = 0.$$

Beweis: Hat die Form ϱ den Factor u_x^m , so giebt es eine Form

$$\vartheta = u_\vartheta^{n-m}$$

der Art, dass die Identität stattfindet:

$$u_\varrho^n = u_x^m u_\vartheta^{n-m}.$$

Differentiirt man dieselbe nach u und ersetzt man die Incremente durch $\widehat{xy}$, so findet man der Reihe nach diese Formeln:

da sie mittelst der Identität:

$$u_x(\varrho xy) + u_x(\varrho yz) + u_y(\varrho zx) = u_\varrho(xyz)$$

aus denselben folgt.

Insbesondere kann man als nothwendige und hinreichende Bedingungen dafür dass die Form ϱ den Factor u_x^2 besitzt, diese 3 aufstellen:

$$(13a) \quad (\varrho xy)^n = 0,$$

$$(13b) \quad (\varrho xy)^{n-1}(\varrho yz) = 0,$$

$$(13c) \quad (\varrho xy)^{n-1}(\varrho zx) = 0.$$

§ 6.

Eigenschaften von s_n als ganzer Function der a .

Es handelt sich also darum, die Formeln (13) für die Ueberschiebung

$$(apu)^n$$

zu bestätigen.

Das Mittel hierzu bieten die Newton'schen Formeln:

$$(14) \quad \sum_{x=0}^{x=n} a_{n-x} s_x = 0,$$

sie lehren uns, die Potenzsummen s_x der Wurzeln einer Gleichung:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \dots a_n = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n)$$

als ganze Functionen der Coefficienten a_x darzustellen. Ich will sie dazu benutzen, um einige Eigenschaften dieser ganzen Functionen abzuleiten.

Die erste derselben finden wir aus der Betrachtung, dass die Potenzen und Producte der Coefficienten, welche die Glieder in der Entwicklung von s_n bilden, sämmtlich das Gewicht n besitzen. Hieraus ergiebt sich sogleich die Relation:

$$(15) \quad n s_n = \sum_{x=1}^{x=n} x a_x \frac{\partial s_n}{\partial a_x}.$$

Nicht so einfach ist eine weitere Eigenschaft, welche sich auf die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial s_n}{\partial a_x}$$

bezieht, herzuleiten. Zu diesem Zwecke führe ich eine Reihe von Grössen

$$g_0 \ g_1 \ g_2 \ \dots$$

ein, von denen

$$g_0 = -1$$

sein möge und die übrigen durch die Recursionsformeln bestimmt werden:

$$(16) \quad \sum_{\kappa=0}^{\kappa=n} a_{n-\kappa} g_{\kappa} = 0.$$

Ich behaupte nun die Formel:

$$(17) \quad \frac{\partial s_n}{\partial a_{n-\mu}} = n g_{\mu}.$$

Beweis. Nach der Formel:

$$\frac{\partial s_n}{\partial a_n} = -n$$

gilt unser Satz für $\mu = 0$. Bei dem Beweise für die übrigen Zahlen $\mu = 1 \ 2 \ 3 \ \dots$

mache ich die Annahme, er gelte bereits für alle Zahlen, die kleiner als μ sind, dass also für $\kappa > 0$:

$$(17a) \quad \frac{\partial s_{n-\kappa}}{\partial a_{n-\mu}} = (n - \kappa) g_{\mu-\kappa}$$

ist.

Nach dieser Annahme folgt aus F. (15) die Formel:

$$(15a) \quad s_{\mu} = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=\mu} \kappa a_{\kappa} g_{\mu-\kappa}.$$

Ich differentiire nun die Newton'sche Formel:

$$(14) \quad \sum_{\kappa=0}^{\kappa=n} a_{\kappa} s_{n-\kappa} = 0$$

nach $a_{n-\mu}$; diese Grösse tritt erstens in einem Gliede als Coefficient auf und sodann in denjenigen $s_{n-\kappa}$, bei denen $\kappa \leq \mu$ ist. So entsteht die Formel:

$$\sum_{\kappa=0}^{\kappa=\mu} a_{\kappa} \frac{\partial s_{n-\kappa}}{\partial a_{n-\mu}} + s_{\mu} = 0,$$

oder, wenn man die Werthe für die:

$$\frac{\partial s_{n-\kappa}}{\partial a_{n-\mu}} \quad \text{und} \quad s_{\mu}$$

aus den Formeln (17a) und (15a) einträgt:

$$\frac{\partial s_n}{\partial a_{n-\mu}} + \sum_{\kappa=1}^{\kappa=\mu} (n - \kappa) g_{\mu-\kappa} a_{\kappa} + \sum_{\kappa=1}^{\kappa=\mu} \kappa a_{\kappa} g_{\mu-\kappa} = 0$$

oder:

$$\frac{\partial s_n}{\partial a_{n-\mu}} + n \sum_{\kappa=1}^{\kappa=\mu} g_{\mu-\kappa} a_{\kappa} = 0.$$

Zieht man hiervon die Recursionsformel:

$$(16) \quad n \sum_{\kappa=0}^{\kappa=\mu} g_{\mu-\kappa} a_{\kappa} = 0$$

ab, so gelangt man zu der behaupteten Formel:

$$\frac{\partial s_n}{\partial a_{n-\mu}} = n g_{\mu}.$$

Diese Formel soll nun benützt werden, um die Differentiale

$$ds_{\kappa} \quad \text{und} \quad da_{\kappa}$$

mit einander in Beziehung zu setzen.

Hierzu gehe ich von der Doppelsumme:

$$W = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=n} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \kappa a_{\kappa} g_{n-\kappa-\lambda+1} da_{\lambda}$$

aus und ordne dieselbe in doppelter Art.

Das eine Mal ziehe ich alle Glieder, welche dasselbe λ haben zuerst zusammen und das andere Mal geschieht das Nämliche mit den Gliedern, welche dasselbe κ haben. In Folge der Formeln

$$(15a) \quad s_{n-\lambda+1} = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=n} \kappa a_{\kappa} g_{n-\kappa-\lambda+1}.$$

$$(17) \quad ds_{n-\kappa+1} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial s_{n-\kappa+1}}{\partial a_{\lambda}} da_{\lambda} = (n-\kappa+1) \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} g_{n-\kappa-\lambda+1} da_{\lambda}$$

erhalte ich für W die beiden Werthe

$$\sum_{\kappa=1}^{\kappa=n} s_{n-\kappa+1} da_{\kappa}$$

und

$$\sum_{\kappa=1}^{\kappa=n} \frac{\kappa}{n-\kappa+1} a_{\kappa} ds_{n-\kappa+1},$$

deren Gleichsetzung die Formel liefert:

$$\sum_{\kappa=1}^{\kappa=n} \left(\frac{\kappa}{n-\kappa+1} a_{\kappa} ds_{n-\kappa+1} - s_{n-\kappa+1} da_{\kappa} \right) = 0,$$

die man auch schreiben kann:

$$(18) \quad \sum_{\kappa=0}^{\kappa=n-1} \left(\frac{\kappa+1}{n-\kappa} a_{\kappa+1} ds_{n-\kappa} - s_{n-\kappa} da_{\kappa+1} \right) = 0.$$

Die Coefficienten a_x und die Potenzsummen s_x hängen mit den Polaren von f durch die Formeln zusammen:

$$fa_x = (-1)^x \binom{n}{x} a_y^x a_x^{n-x},$$

$$f^n s_{n-x} = n p_y^{n-x} p_x^x.$$

Bezeichnet man denjenigen Punkt, welcher durch Differentiation des Punktes y entsteht, durch z , setzt man also:

$$dy = z$$

so erhält man durch Differentiation dieser Formeln:

$$f da_x = (-1)^x \binom{n}{x} x a_y^{x-1} a_x a_x^{n-x},$$

$$f^n ds_{n-x} = n(n-x) p_y^{n-x-1} p_x p_x^x.$$

Diese Werthe von:

$$a_x, s_{n-x}, da_x, ds_{n-x}$$

trage ich in die Formeln:

$$(14) \quad \sum_{x=0}^{x=n} a_x s_{n-x} = 0,$$

$$(18) \quad \sum_{x=0}^{x=n-1} \left(\frac{x+1}{n-x} a_{x+1} ds_{n-x} - s_{n-x} da_{x+1} \right) = 0$$

ein und gelange so zu den Formeln:

$$\sum_{x=0}^{x=n} (-1)^x \binom{n}{x} a_y^x a_x^{n-x} p_y^{n-x} p_x^x = 0,$$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{x=0}^{x=n-1} \left\{ \frac{x+1}{n-x} (-1)^{x+1} \binom{n}{x+1} a_y^{x+1} a_x^{n-x-1} (n-x) p_y^{n-x-1} p_x p_x^x \right. \\ &\quad \left. - p_y^{n-x} p_x^x (-1)^{x+1} \binom{n}{x+1} (x+1) a_y^x a_x a_x^{n-x-1} \right\} \\ &= (a_y p_x - p_y a_x) \sum_{x=0}^{x=n-1} (-1)^{x+1} (x+1) \binom{n}{x+1} a_y^x a_x^{n-1-x} p_y^{n-1-x} p_x^x \\ &= -n(a_y p_x - p_y a_x) \sum_{x=0}^{x=n-1} (-1)^x \binom{n-1}{x} (a_y p_x)^x (a_x p_y)^{n-1-x} \end{aligned}$$

oder:

$$(19a) \quad (a_y p_x - p_y a_x)^n = 0,$$

$$(19b) \quad (a_y p_x - p_y a_x) (a_y p_x - p_y a_x)^{n-1} = 0.$$

Differentiirt man Formel (19a) noch den y und ersetzt man die Incremente durch z , so wird:

$$(19c) \quad (a_x p_x - p_x a_x) (a_y p_x - p_y a_x)^{n-1} = 0.$$

Die Formeln (19) sind nach Formeln (13) die Bedingungen dafür, dass die Ueberschiebung:

$$(ap u)^n$$

u_x^2 als Factor enthält.

§ 7.

Die Normalform von $(afu)^n$.

Das 1^{te} Glied in der Entwicklung von p_y^n nach Polaren von f ist f_y^n und demnach das 1^{te} Glied in der Entwicklung von $(ap u)^n$ die Ueberschiebung $(afu)^n$.

Die geometrische Bedeutung dieser Formel ist das Product derjenigen Punkte, welche die Polare f_y des Punktes x aus der Curve f ausschneidet.

In dem speciellen Fall, dass der Punkt x auf der Curve f selbst liegt, wird f_y Tangente und zwei der Schnittpunkte fallen in den Punkt x . Ist also $f = 0$, so hat $(afu)^n$ den Factor u_x^2 . Hieraus folgt, dass man die Ueberschiebung $(afu)^n$ in die Form:

$$(20a) \quad (afu)^n = A u_x^2 + B f$$

bringen kann. Dieselbe ist aber keineswegs eindeutig, da der Ausdruck:

$$(20b) \quad (afu)^n (A + Cf) u_x^2 + (B - C u_x^2) f$$

gleichfalls diese Form hat. Um eine bestimmte Form für $(afu)^n$ zu erhalten, muss man noch eine weitere Bedingung hinzufügen. Als solche wähle ich die, dass die symbolischen Producte, aus denen der Factor von f besteht, nur aus den symbolischen Factoren:

$$f, (abu), (afu), b_x$$

zusammengesetzt sind. Diese Darstellung von $(afu)^n$ nenne ich die Normalform von $(afu)^n$ und stelle mir nunmehr die Aufgabe, diese Ueberschiebung in der Normalform darzustellen. Dieselbe zerfällt in 2 Theile:

1^{ter} Theil. $(afu)^n$ soll in die Form:

$$(afu)^n = A u_x^2 + B f$$

gebracht werden.

2^{ter} Theil. Der Factor B soll in die Form:

$$(21) \quad B = C u_x^2 + D$$

der Art gebracht werden, dass der Ausdruck:

$$(afu)^n = (A + Cf) u_x^2 + D u_x^2,$$

die Normalform von $(afu)^n$ ist, dass also die Glieder von D symbolische Producte sind, welche nur die Factoren:

$$f, (abu), (afu), b_x$$

enthalten.

Die Aufgabe, die Ueberschiebung $(afu)^n$ in die Form

$$(20a) \quad (afu)^n = Au_x^2 + Bf$$

zu bringen, ist bereits (Math. Ann. Bd. 7, Dersch über Doppeltangenten) im Wesentlichen gelöst worden; ich werde mich also in der Darstellung des dort gegebenen Verfahrens kurz fassen dürfen.

Die Rechnung ist diese:

$$\begin{aligned} (afu)^n &= (abu)(afu)^{n-1}b_x^{n-1} = \frac{1}{2}(abu)\left\{((afu)b_x)^{n-1} - ((bfu)a_x)^{n-1}\right\} \\ &= \frac{1}{2}(abu)\left((afu)b_x - (bfu)a_x\right) \sum_{x=0}^{x=n-2} \{(afu)b_x\}^{n-2-x} \{(bfu)a_x\}^x \\ &= \frac{1}{2}(abu)\{f(abu) - u_x(abf)\} \sum_{x=0}^{x=n-2} \{(afu)b_x\}^{n-2-x} \{(bfu)a_x\}^x. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die verlangte Form (20a), wenn man erstens

$$(22) \quad B = \frac{1}{2}(abu)^2 \sum_{x=0}^{x=n-2} \{(afu)b_x\}^{n-2-x} \{(bfu)a_x\}^x$$

setzt und dann zweitens zeigt, dass der Ausdruck:

$$(23) \quad L = (abu)(abf) \sum_{x=0}^{x=n-2} \{(afu)b_x\}^{n-2-x} \{(bfu)a_x\}^x$$

den Factor u_x hat und ihn:

$$(24) \quad L = -2Au_x$$

setzt. Zu diesem Zwecke bilde ich die Summe:

$$K = \sum (abc)^2 (afu)^x (bfu)^\lambda (cfu)^\mu a_x^{n-2-x} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\mu}$$

und dehne sie über alle Zahlen x, λ, μ aus, welche die Relation befriedigen

$$x + \lambda + \mu = n - 2.$$

Mit Hilfe der Identität:

$$u_x(abc) = a_x(bcu) + b_x(cau) + c_x(abu)$$

wird das Product

$$u_x K$$

die Summe von 3 Summen, welche durch Vertauschung der Symbole a, b, c in einander übergehen. Da diese Symbole dieselbe Form f darstellen, so haben diese 3 Summen denselben Werth und man hat:

$$Ku_x = 3(abc)(abu) \sum (afu)^x (bfu)^\lambda (cfu)^\mu a_x^{n-2-x} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-1-\mu}.$$

In dieser Summe haben diejenigen Glieder, bei denen $\mu = 0$ ist, zusammen den Werth $3L$, so dass man, wenn man in den übrigen Gliedern

$$\mu = \nu + 1$$

setzt, die Formel erhält:

$$Ku_x - 3L \\ = 3(abc)(abu)(cfu) \sum (afu)^x (bfu)^{\lambda} (cfu)^{\nu} a_x^{n-2-x} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\nu},$$

in der sich die Summe über alle Zahlen x, λ, ν erstreckt, für welche:

$$x + \lambda + \nu = n - 3$$

ist. Vertauscht man hier die Symbole a, b, c mit einander, so erhält man 3 Summen, welche denselben Werth besitzen.

Dieselben wollen wir addiren, so dass:

$$Ku_x - 3L \\ = (abc) \left\{ \begin{aligned} &((ab u)(cf u) + (bc u)(af u) + (ca u)(bf u)) \\ &\cdot \sum (af u)^x (bf u)^{\lambda} (cf u)^{\nu} a_x^{n-2-x} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\nu} \end{aligned} \right\} \\ = 0$$

wird. Es ist

$$L = \frac{1}{3} Ku_x$$

und daher nach Formel (24):

$$(25) \quad A = -\frac{1}{6} K \\ = -\frac{1}{6} \sum (abc)^2 (afu)^x (bfu)^{\lambda} (cfu)^{\mu} a_x^{n-2-x} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\mu}.$$

Ich wende mich jetzt zur 2^{ten} Aufgabe, die Form:

$$B = \frac{1}{2} (abu)^2 \sum_{x=0}^{x=n-2} ((afu) b_x)^{n-2-x} ((bfu) a_x)^x$$

in eine solche Form:

$$(21) \quad B = Cu_x^2 + D$$

zu bringen, dass die symbolischen Producte, aus denen D besteht, nur die Factoren:

$$f, (abu), (afu), b_x$$

enthalten.

Um diese Aufgabe zu lösen, gehe ich von den Identitäten aus:

$$x^n + y^n = (y + (x-y))^n + (x - (x-y))^n, \\ n(x^{n-1} - y^{n-1}) = n(y + (x-y))^{n-1} - n(x - (x-y))^{n-1}$$

und entwickle die Potenzen rechter Hand nach dem binomischen Lehrsatz. Hierdurch entstehen die Formeln:

$$\begin{aligned}
 n(x^{n-1} - y^{n-1}) &= \sum_{x=2}^{x=n} \binom{n}{x} (y^{n-x} + (-1)^x x^{n-x}) (x-y)^{x-1}, \\
 (26a) \quad n \sum_{x=0}^{x=n-2} x^{n-2-x} y^x &= \sum_{x=2}^{x=n} \binom{n}{x} (y^{n-x} + (-1)^x x^{n-x}) (x-y)^{x-2}, \\
 2n(x^{n-1} - y^{n-1}) &= n \sum_{x=2}^{x=n} \binom{n-1}{x-1} (y^{n-x} + (-1)^x x^{n-x}) (x-y)^{x-1} \\
 &= \sum_{x=2}^{x=n} \binom{n}{x} x (y^{n-x} + (-1)^x x^{n-x}) (x-y)^{x-1}, \\
 (26b) \quad 0 &= \sum_{x=3}^{x=n} \binom{n}{x} (x-2) (y^{n-x} + (-1)^x x^{n-x}) (x-y)^{x-3}.
 \end{aligned}$$

In diesen Identitäten ersetze ich:

$$x \text{ durch } b_x(afu), \quad y \text{ durch } a_x(bfu)$$

also

$$x - y \text{ durch } f(abu) - u_x(abf)$$

und multiplicire Formel (26 a) mit $(abu)^2$ und Formel (26 b) mit $(abu)^2(abf)$. So gelange ich zu den Formeln:

$$\begin{aligned}
 2nB &= (abu)^2 \sum_{x=2}^{x=n} \binom{n}{x} \left((a_x(bfu))^{n-x} + (-1)^x (b_x(afu))^{n-x} \right) \\
 &\quad (f(abu) - u_x(abf))^{x-2}, \\
 0 &= (abu)^2 u_x(abf) \sum_{x=3}^{x=n} \binom{n}{x} (x-2) \left((a_x(bfu))^{n-x} + (-1)^x (b_x(afu))^{n-x} \right) \\
 &\quad (f(abu) - u_x(abf))^{x-3}.
 \end{aligned}$$

In denselben stellen die Symbole a und b dieselbe Form f dar, können also mit einander vertauscht werden; man hat daher:

$$\begin{aligned}
 nB &= (abu)^2 \sum_{x=2}^{x=n} (-1)^x \binom{n}{x} (b_x(afu))^{n-x} (f(abu) - u_x(abf))^{x-2}, \\
 0 &= (abu)^2 u_x(abf) \sum_{x=3}^{x=n} (-1)^x \binom{n}{x} (x-2) (b_x(afu))^{n-x} \\
 &\quad (f(abu) - u_x(abf))^{x-3}.
 \end{aligned}$$

Entwickelt man weiter nach dem binomischen Lehrsatz, so entstehen hieraus die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
nB &= (abu)^2 \sum_{x=2}^{x=n} (-1)^x \binom{n}{x} (b_x(afu))^{n-x} \left\{ (f(abu))^{x-2} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=x-2} (-1)^\lambda \binom{x-2}{\lambda} (f(abu))^{x-2-\lambda} (u_x(abf))^\lambda \right\}, \\
0 &= (abu)^2 u_x(abf) \sum_{x=3}^{x=n} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=x-2} (-1)^{x+\lambda} \binom{n}{x} (x-2) \binom{x-2}{\lambda-1} (b_x(afu))^{n-x} \\
&\quad (f(abu))^{x-2-\lambda} (u_x(abf))^{\lambda-1} \\
&= (abu)^2 \sum_{x=2}^{x=n} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=x-2} (-1)^{x+\lambda} \binom{n}{x} \binom{x-2}{\lambda} \lambda (b_x(afu))^{n-x} (f(abu))^{x-2-\lambda} \\
&\quad (u_x(abf))^\lambda, \\
nB &= (abu)^2 \left\{ \sum_{x=2}^{x=n} (-1)^x \binom{n}{x} (b_x(afu))^{n-x} (f(abu))^{x-2} \right. \\
&\quad \left. - u_x^2(abf)^2 \sum_{x=2}^{x=n} \sum_{\lambda=2}^{\lambda=x-2} (-1)^{x+\lambda} \binom{n}{x} \binom{x-2}{\lambda} (\lambda-1) \right. \\
&\quad \left. (b_x(afu))^{n-x} (f(abu))^{x-2-\lambda} (u_x(abf))^{\lambda-2} \right\}.
\end{aligned}$$

Vergleicht man diese Formel mit der von uns behaupteten Formel:

$$B = Cu_x^2 + D,$$

so folgert man:

$$\begin{aligned}
(27a) \quad nC &= - (abu)^2 (abf)^2 \sum_{x=4}^{x=n} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=x-4} (-1)^{x+\lambda} \binom{n}{x} \binom{x-2}{\lambda+2} (\lambda+1) \\
&\quad (b_x(afu))^{n-x} (f(abu))^{x-4-\lambda} (u_x(abf))^\lambda,
\end{aligned}$$

$$(27b) \quad nD = \sum_{x=2}^{x=n} (-1)^x \binom{n}{x} (b_x(afu))^{n-x} f^{x-2} (abu)^x.$$

Die Formeln (25) und (27) geben die Werthe für A , C und D , welche in der Normalform der Ueberschiebung

$$(afu)^n = (A + Cf)u_x^2 + Df$$

auftreten; trage ich sie in dieselbe ein, so wird sie:

$$n(afu)^n = \left\{ \begin{aligned} & - \frac{n}{6} u_x^2 (abc)^2 \sum (afu)^x (bfu)^\lambda (cfu)^\mu a_x^{n-2-x} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\mu} \\ & - f u_x^2 (abu)^2 (abf)^2 \sum_{x=4}^{x=n} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=x-4} (-1)^{x+\lambda} \binom{n}{x} \binom{x-2}{\lambda+2} (\lambda+1) \\ & \quad (b_x(afu))^{n-x} (f(abu))^{x-4-\lambda} (u_x(abf))^\lambda \\ & + f \sum_{x=2}^{x=n} (-1)^x \binom{n}{x} (b_x(afu))^{n-x} f^{x-2} (abu)^x. \end{aligned} \right.$$

Wir können sie noch weiter vereinfachen, indem wir die Bezeichnung einführen:

$$(28) \quad q = q_y^n = n f_y^n - f \sum_{x=2}^{x=n} (-1)^x \binom{n}{x} f^{x-2} f_y^{n-x} f_{yx};$$

sie wird dann:

$$(29) \quad (a q u)^n = u_x^2 \left\{ \begin{aligned} & -\frac{n}{6} (abc)^2 \sum (a f u)^x (b f u)^\lambda (c f u)^\mu a_x^{n-2-x} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\mu} \\ & - f (a b u)^2 (a b f)^2 \sum_{x=0}^{x=n} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=x-4} (-1)^{x+\lambda} \binom{n}{x} \binom{x-2}{\lambda+2} (\lambda+1) \\ & \quad (b_x (a f u))^{n-x} (f (a b u))^{x-4-\lambda} (u_x (a b f))^\lambda. \end{aligned} \right.$$

§ 8.

Division mit u_x^2 .

Die ersten Glieder der Entwicklungen von p_y^n und q_y^n nach Polaren sind:

$$n^{n-1} f_y^n - n^{n-1} \frac{n-1}{2} f f_y^{n-2} f_{y^2},$$

$$n f_y^n - \binom{n}{2} f f_y^{n-2} f_{y^2},$$

die übrigen haben den Factor f^2 . Hieraus folgt, dass die Differenz:

$$(30) \quad p_y^n - n^{n-2} q_y^n$$

ebenfalls diesen Factor besitzt, dass man also setzen kann:

$$p_y^n = n^{n-2} q_y^n + f^2 r_y^n.$$

Durch Ueberschiebung mit f erhält man die Formel:

$$(31) \quad (a p u)^n = n^{n-2} (a q u)^n + f^2 (a r u)^n;$$

sie zeigt, dass $(a r u)^n$ den Factor u_x^2 hat, dass also nach § 5 die Formeln bestehen:

$$(a_y r_x - r_y a_x)^n = 0,$$

$$(a_y r_x - r_y a_x)^{n-1} (a r u) = 0.$$

Aus denselben lassen sich diese ableiten:

$$0 = ((a b u) r_x - (r b u) a_x)^n = ((a b r) u_x + b_x (a r u))^n,$$

$$0 = ((a b u) r_x - (r b u) a_x)^{n-1} (a b r) u_x = ((a b r) u_x + b_x (a r u))^{n-1} (a b r) u_x,$$

$$0 = b_x^n (a r u)^n + n (b_x (a r u))^{n-1} u_x (a b r)$$

$$+ u_x^2 (a b r)^2 \sum_{x=2}^{x=n} \binom{n}{x} (b_x (a r u))^{n-x} (u_x (a b r))^{x-2},$$

$$\begin{aligned}
0 &= n(b_x(aru))^{n-1}u_x(abr) \\
&\quad + u_x^2(abr)^2 \sum_{x=2}^{x=n} n \binom{n-1}{x-1} (b_x(aru))^{n-x} (u_x(abr))^{x-2}, \\
f(aru)^n &= u_x^2(abr)^2 \sum_{x=2}^{x=n} \binom{n}{x} (x-1) (b_x(aru))^{n-x} (u_x(abr))^{x-2}.
\end{aligned}$$

Trägt man in Formel (31) für $(aqu)^n$ und $(aru)^n$ ihre Werthe ein, so gelangt man zu der Endformel:

$$(aqu)^n = u_x^2 \left\{ \begin{aligned} & -\frac{n}{6} \sum (afu)^x (bfu)^\lambda (cfu)^\mu a_x^{n-2-x} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\mu} \\ & - f(abu)^2 (abf)^2 \sum_{x=4}^{x=n} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=x-4} (-1)^{x+\lambda} \binom{n}{x} \binom{x-2}{\lambda+2} (\lambda+1) \\ & \quad (b_x(afu))^{n-x} (f(abu))^{x-4-\lambda} (u_x(abf))^\lambda \\ & + f(abr)^2 \sum_{x=2}^{x=n} \binom{n}{x} (x-1) (b_x(aru))^{n-x} (u_x(abr))^{x-2}. \end{aligned} \right.$$

Schliesslich will ich noch bemerken, dass die Aufgabe, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen anzugeben, dass eine Raumcurve C in gerade Linien zerfällt, sich leicht auf die hier gelöste zurückführen lässt. Verbindet man nämlich alle Punkte der Curve C mit einem beliebigen Punkte ξ , so bilden die Verbindungslinien einen Kegel K . Zerfällt nun C in gerade Linien, so zerfallen alle Kegel K in Ebenen.

Erlangen, im April 1894.