höchst interessant sind, aber uns nicht zur Annahme neuer Krystallsysteme führen sollen.

VII. *Ueber die Geschwindigkeit des Schalles; von Dr. H. W. Schröder van der Kolk.*

Wiewohl die Bestimmung der Geschwindigkeit des Schalles an und für sich eine interessante Aufgabe ist, so hat doch die genaue Kenntniss dieser Constanten ein doppeltes Interesse erhalten, seit man bemerkte, dass sie geeignet ist, eine der genauesten Bestimmungen des mechanischen Wärme-Aequivalentes zu liefern. Es ist deswegen vom höchsten Interesse, diese Aufgabe näher zu betrachten.

Die angewandten Methoden zur Messung der Schallgeschwindigkeit kann man in directe und indirecte einteilen.

Zu der letzten Gattung gehört die von Wertheim und Masson angewandte mittelst Orgelpfeifen, wobei zunächst die Tonhöhe und die Wellenlänge bestimmt werden. Diese letzte ist aber sehr schwer scharf zu bestimmen, und es hält um so schwieriger genaue numerische Werthe zu erhalten, als die gefundene Grösse noch mit einer grossen Zahl multiplicirt werden muss, um den vom Schall in der Sekunde zurückgelegten Weg zu erhalten, wobei die Beobachtungsfehler in demselben Maasse vergrößert in die Resultate übergehen. Deshalb hat diese Methode bisher keine genaue Resultate geliefert.

Die zweite indirecte Methode ist die von Clément und Desormes, später auch von Gay-Lussac und von Masson angewandte. Bei dieser wird bekanntlich der Werth von $\frac{c}{c_1}$, (wo c und c_1 die specifischen Wärmen bei constantem Druck und constantem Volumen bedeuten), direct bestimmt und dann die Geschwindigkeit mittelst der bekannten Formel für die Schallgeschwindigkeit berechnet.

Diese Methode ist einer größeren Genauigkeit fähig, und scheint wirklich bei Masson zu genauen Resultaten geführt zu haben. Indefs können auch diese Bestimmungen nicht den genauesten Werth liefern, da, soviel mir bekannt, das nähere Detail von diesen Versuchen nicht veröffentlicht worden ist.

Es bleiben uns also nur die directen Methoden übrig.

Die am meisten angewandte Methode besteht in der Bestimmung der Zeit, in welcher der Schall eine gegebene Strecke durchläuft. An einer Station wird, meistens mittelst Kanonen, ein Signal gegeben, und an einer andern Station die Zeit beobachtet, welche zwischen der Lichterscheinung beim Entzünden des Pulvers und der Ankunft des Schalles verstrichen ist.

Eine andere von Dr. Bosscha vorgeschlagene Methode¹⁾ ist vielleicht einer großen Genauigkeit fähig, aber bisjetzt noch nicht in größerem Maasse angewandt worden.

Wir haben also nur die dritte Methode näher zu betrachten.

Von den hierher gehörigen Versuchen sind unstreitig die von Moll und van Beek im Jahre 1823 in Holland angestellten die genauesten. Die von den französischen Akademikern im Jahre 1822 zwischen Monthléry und Villejuif erhaltenen Resultate sind mit diesen gar nicht zu vergleichen. In der ersten Nacht vom 21. Juni 1822 hörte man zu Monthléry 12 Schüsse und zu Villejuif nur 7, und in der folgenden Nacht zu Villejuif nur 1 Schuss womit die Versuche geendigt wurden.

Ueberdies wurden die Signale nicht gleichzeitig an beiden Stationen gegeben, sondern es wurde von fünf zu fünf Minuten ein Schuss auf der einen oder andern Station abgefeuert. Die Correction wegen des Windes war auf dieser Art nicht anzubringen; dieß ist nur möglich wenn die Kanonen gleichzeitig an beiden Stationen abgefeuert werden.

Man fand für die Geschwindigkeit 331,2 Meter pro Se-

1) Pogg. Ann. Bd. 92, S. 485

kunde, was vom später Erhaltenen nicht viel abweicht. Indefs hat diese Bestimmung ein viel geringeres Gewicht als die von Moll und van Beek. Seit dieser Zeit sind solche Versuche in so ausgedehntem Maafstabe nicht mehr wiederholt worden.

Parry und Rofs in den Nordpolgegenden und Bravais und Martins auf dem Faulhorn in der Schweiz fanden ziemlich übereinstimmende Resultate. Die ersten sind aber weniger genau, und bei der letzten lassen sich jedenfalls einige Correctionen nicht so genau anbringen.

Es bleiben also nur die Bestimmungen von Moll und van Beek zu betrachten übrig. Wiewohl sie ihre Versuche mit der grössten Sorgfalt angestellt haben, ist doch das von ihnen erhaltene Resultat unzulässig, da die Reductionscoëfficienten damals noch nicht genau bekannt waren und überdies bei der Berechnung einige Correctionen vernachlässigt wurden. Der Genauigkeit der Versuche wegen schien es mir aber der Mühe werth, die Berechnung so genau wie möglich zu wiederholen.

Indessen war ich von vornherein überzeugt, dafs mittelst der so erhaltenen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Werth von $\frac{c}{c_1}$ und folglich der des mechanischen Wärme-Aequivalentes nicht genau zu erhalten sey. Es läfst sich nämlich folgende Einwendung machen. *A priori* ist es schon nicht unwahrscheinlich, dafs diese intensive Luftwellen sich schneller als schwächere fortpflanzen, und die Angabe von Rofs, dafs im hohen Norden bei Versuchen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles an der anderen Station erst der Schufs und darauf das gegebene Commando gehört wurde, schien diese Muthmafsung zu rechtfertigen. Wäre dem so, so würde die Bestimmung mittelst Kanonenschüsse eine gröfsere Geschwindigkeit ergeben als die mittelst weniger intensive Luftwellen, und demzufolge würde man bei ungleicher Intensität verschiedene Werthe für $\frac{c}{c_1}$ finden, und die genaue Bestimmung des mechanischen Wärme - Aequivalentes unmöglich werden.

Experimentell ist dieß nicht ausgemacht worden; Versuche zu diesem Zweck sind nie unternommen, denn die Bemerkung, daß man eine Melodie gleich gut in der Nähe als in größerer Entfernung erkennt, zeigt nur daß dieser Einfluß sehr gering ist, da erstens die Entfernung und zweitens der Intensitäts-Unterschied der Töne in diesem Falle niemals beträchtlich ist.

Wenn ich es also im Folgendem wage, diesen Einfluß genauer zu berechnen, so muß ich sogleich hinzufügen, daß ich keineswegs eine vollständige Theorie des Schalles zu geben unternehme. Es mag seyn, daß die Theorie der Elasticität zu andern Grundformeln führt; wie sich aber der Einfluß eines Factors mittelst vergleichender Versuche oft genau bestimmen läßt bei experimentellen Untersuchungen, welche die gesuchte Größe selbst nur ungenau ergeben, so glaube ich auch, daß der unten berechnete Einfluß der Intensität sich als der nämliche herausstellen wird, wenn auch die Grundformeln der Wellenbewegung in der Luft auf anderer Art entwickelt werden.

Theoretische Entwicklung.

Für die Fortpflanzungs-Geschwindigkeit longitudinaler Wellen hat man im Allgemeinen die Formel $s = \sqrt{\frac{e}{d}}$, wo s die Geschwindigkeit, e die Kraft, mit welcher die Molecüle sich anziehen, wenn sich der Abstand verdoppelt hat, und d die Dichtigkeit des Mediums bezeichnet. Ist also ein Theilchen um die Größe δ in der Richtung zweier Molecüle verschoben, so ist die Kraft, welche es zurückzuführen strebt $= e\delta$.

Bei der Luft ist $e = H\beta$ und $d = \frac{b}{g}$, wenn H den Barometerstand, g die Constante der Schwerkraft und β und b die specifischen Gewichte von Quecksilber und Luft bedeuten, und die Formel wird $s = \sqrt{\frac{gH\beta}{b}}$.

Diese Formel würde nun auch die Geschwindigkeit der Luftwellen angeben, wenn hier nicht bei der Zusammen-

drückung im Wellenberge Wärme entwickelt, und im Wellenthale absorbirt würde; im ersten Falle wird hier die Elasticität oder die Druckhöhe, mittelst welcher sie gemessen werden kann, vergrößert, im zweiten Falle verringert, jedenfalls also der Druckunterschied, der die Ursache der Fortpflanzung der Wellen ist, vergrößert.

Bei einer Verschiebung $= \delta$, ist die Kraft also nicht $= e\delta$ sondern um $e\delta k$ vergrößert, wo k eine noch unbekannte Gröfse ist. Die Kraft ist also $= e\delta(1+k)$, und die oben genannte Formel wird ¹⁾:

$$s = \sqrt{\frac{e}{d}(1+k)} = \sqrt{\frac{g\beta H}{b}(1+k)} \quad . \quad . \quad (1).$$

Die Wärmetheorie giebt die Formel:

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^\gamma = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

für den Fall, dafs eine Luftmasse von dem Druck p_0 , dem Volumen V_0 und der Temperatur T_0 , diese vom absoluten Nullpunkte abgerechnet, zusammengedrückt wird bis die genannten Gröfsen $= p_1$, V_1 und T_1 werden, wenn nämlich weder Wärme fort- oder zugeführt wird. γ ist hier $= \frac{c}{c_1}$. Beim Schalle geschehen die Zusammendrückungen so schnell, dafs wir diese Formel hier zweifelsohne anwenden können.

Sey nun H der abgelesene Barometerstand, so wird der Druck im Wellenberge gröfser seyn.

Sey die Zusammendrückung $\Delta V = V_0 - V_1$, so hat man

$$h_1 = H \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^\gamma,$$

wo h_1 den Barometerstand im Wellenberge bezeichnet.

Diefs ist aber nicht der Druck, der in Rechnung gebracht werden mufs. Die Formel $\sqrt{\frac{g\beta H}{b}}$ würde richtig

1) Bis hieher bin ich der Auseinandersetzung der Wellenbewegung von Dr. Wüllner gefolgt. Experimental-Physik, Bd. I, Abth. I, S. 386 u. s. f. und 470.

seyn, wenn die Zusammendrückung ohne Wärme-Entwicklung stattfände; dann wäre aber der Druck im Wellenberge auch nicht $= H$, sondern $= h_2 = H \frac{V_0}{V_1}$ dem Mariotte'schen Gesetze zufolge.

Was also, wegen der Wärme-Entwicklung hinzukommt ist:

$$= h_1 - h_2 = H \left\{ \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^\gamma - \frac{V_0}{V_1} \right\},$$

welcher Druck der Gröfse $e \delta k$ oder $H \delta k$ gleich ist, die gleichfalls die Zunahme des Druckes durch die Wärme bezeichnet.

Man hat also

$$k = \frac{\left(\frac{V_0}{V_1} \right)^\gamma - \frac{V_0}{V_1}}{\delta}$$

δ ist hier die Gröfse um welche die Molecüle einander genähert sind, nach dem ursprünglichen Abstände gerechnet, und ist also $= \frac{V_0 - V_1}{V_0}$. Diefes einführend, und $V_1 = V_0 - \Delta V$ setzend, findet man:

$$\begin{aligned} k &= \frac{\left\{ 1 - \left(1 - \frac{V_1}{V_0} \right) \right\}^{-\gamma} - \frac{V_0}{V_1}}{\frac{V_0 - V_1}{V_0}} = \frac{\left(1 - \frac{\Delta V}{V_0} \right)^{-\gamma} - \left(1 - \frac{\Delta V}{V_0} \right)^{-1}}{\frac{\Delta V}{V_0}} \\ &= \frac{1 + \gamma \frac{\Delta V}{V_0} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{\Delta V}{V_0} \right)^2 \dots - \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0} + \left(\frac{\Delta V}{V_0} \right)^2 + \dots \right)}{\frac{\Delta V}{V_0}} \\ &= \gamma + \frac{\gamma(\gamma+1)}{1 \cdot 2} \frac{\Delta V}{V_0} \dots - 1 - \frac{\Delta V}{V_0}. \end{aligned}$$

Vernachlässigt man die höheren Potenzen von $\frac{\Delta V}{V_0}$, so ergibt sich:

$$k = \gamma - 1 + \left\{ \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} - 1 \right\} \frac{\Delta V}{V_0}$$

und

$$1 + k = \gamma + \left\{ \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} - 1 \right\} \frac{\Delta V}{V_0}$$

und durch Substitution in Formel (1)

$$s = \sqrt{\frac{gH\beta}{b} \left\{ \gamma + \left[\frac{\gamma(\gamma+1)}{2} - 1 \right] \frac{\Delta V}{V_0} \right\}}$$

oder mittelst binomischer Entwicklung des zweiten Factors

$$s = \sqrt{\frac{gH\beta}{b}} \left\{ 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)-2}{4V\gamma} \cdot \frac{\Delta V}{V_0} \right\} \quad (2).$$

Wenn man ΔV vernachlässigt, erhält man die gewöhnliche Formel, welche also als erstes Glied der Reihe zu betrachten ist.

Bei dieser Ableitung wurde vorausgesetzt, daß ein Wellenberg bei der Fortpflanzung vorangehe; es hält aber nicht schwer einzusehen, daß die Formel auch beim vorangehenden Wellenthal gültig bleibt. Die Fortpflanzung der Welle ist eine Fortpflanzung der Bewegung der Lufttheilchen, welche durch einen Druckunterschied veranlaßt wird, in einem Falle zwischen dem Wellenberg, und der umgebenden Luft, im andern zwischen dieser Luft und dem Wellenthal. Da nun aus den Formeln folgt, daß diese Differenzen einander gleich sind, so sind auch beide Fälle identisch.

Die Geschwindigkeit ändert sich demzufolge mit der Intensität.

Wenn der Schall sich in einer Röhre fortpflanzt, so bleibt die Intensität fast ungeändert, und die Formel (2) wird dann die Geschwindigkeit angeben.

Breitet die Welle sich dagegen im Raume aus, so nimmt die Intensität ab, und die Geschwindigkeit ist also an jedem Augenblicke eine andere. Die Zeit, in welcher sie eine gegebene Strecke durchläuft, findet sich leicht auf folgende Art.

Sei der Radius der Schallwelle, die in diesem Falle eine Kugel ist, $= R$ für die Zusammendrückung $\frac{\Delta V}{V_0}$, so fragt es sich, nach wie viel Zeit die Welle den Radius r erhalte, d. i. in wie viel Zeit sie die Strecke $r - R$ durchlaufen werde. Die bei der Zusammendrückung gethane Arbeitsgröße oder die Energie der Welle ist $= 4 R^2 \pi p \Delta V$, wenn p der Druck ist bei dem stattfindenden Barometerstand.

Die Energie der Welle mit dem Radius ϱ ist $= 4\varrho^2\pi p dV$ und da diese Energie dieselbe bleibt für jede Welle, so hat man

$$4R^2\pi p dV = 4\varrho^2\pi p dV$$

$$dV = \frac{R^2}{\varrho^2} dV$$

und die Formel (2) wird also:

$$s = \sqrt{\frac{gH\gamma}{\beta}} \gamma \left\{ 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)-2}{4\sqrt{\gamma}} \cdot \frac{dV R^2}{V_0 \varrho^2} \right\}$$

wo dV die Zusammendrückung in der Schallwelle R ist und nur ϱ sich ändert.

Setzen wir jetzt zur Vereinfachung:

$$\sqrt{\frac{gH\beta}{b}} \gamma = \mu \frac{\gamma(\gamma+1)-2}{4\sqrt{\gamma}} \cdot \frac{dV}{V_0} = \lambda^2$$

so wird

$$s = \mu \left(1 + \lambda^2 \frac{R^2}{\varrho^2} \right).$$

Aus der Formel:

$$\frac{d\varrho}{dt} = \mu \left(1 + \lambda^2 \frac{R^2}{\varrho^2} \right)$$

findet sich dann t mittelst Integration:

$$t = \int_R^r \frac{d\varrho}{\mu \left(1 + \lambda^2 \frac{R^2}{\varrho^2} \right)} = \frac{r-R}{\mu} - \frac{\lambda R}{\mu} b g \operatorname{tg} \frac{\lambda(r-R)}{\lambda^2 R + r}.$$

Legt also der Schall den Weg $r-R$ zurück, so ist die Zeit wenn die Fortpflanzung in einer Röhre stattfindet

$$t_1 = \frac{r-R}{\mu(1+\lambda^2)},$$

und im Raum

$$t_2 = \frac{r-R}{\mu} - \frac{\lambda R}{\mu} b g \operatorname{tg} \frac{\lambda(r-R)}{\lambda^2 R + r}.$$

Prüfen wir diese Formel für einen bestimmten Fall.

Für $\mu = \sqrt{\frac{gH\beta}{b}} \gamma$ nehme ich den Mittelwerth der Wertheim'- und Masson'schen Versuche $= 331$ Meter; dieser Werth ist gefunden mittelst Orgelpfeifen, wobei die Inten-

sität nicht groß ist. Hieraus folgt mit der gewöhnlichen Formel $\gamma = 1,398$ und $\lambda^2 = 0,2857 \frac{\Delta V}{V_0}$.

Der Werth $\frac{\Delta V}{V_0}$ ist nur angenähert zu finden; folgenderweise habe ich versucht, die Formel auf die Moll- und van Beek'schen Versuche anzuwenden.

Den Regnault'schen Angaben (*Cours de Chimie*, T. II, p. 291) zufolge nehme ich für das Volumen des Pulverdampfes bei 0° und 0,760 Meter Druck das 329fache vom Volumen des Pulvers, und da die Temperatur viel höher ist, so hat man jedenfalls das Dreifache dieses Werthes zu nehmen. Das spezifische Gewicht des Pulvers mit Regnault = 1 setzend, wird das Volumen eines Kilogrammes Pulverdampfes $= 329 \times 0,003 = 0,987$ Kub.-Meter. Bei obengenannten Versuchen war die Quantität des verbrauchten Pulvers immer gleich 3 Kilogrammen, und das entwickelte Volumen demgemäß 2,961 Kub.-Meter.

Nun ist die Wellenlänge noch zu bestimmen. Da ich nicht Gelegenheit hatte, diese direct zu ermitteln, so nahm ich für die Tonhöhe eines Kanonenschusses den tiefsten in Orchestern vorkommenden Ton A_{II} von $27\frac{1}{2}$ Schwingungen in der Secunde. Die Wellenlänge ist dann $\frac{331}{27,5} = 12,04$

Meter. Es bildet sich jetzt an der Mündung des Geschützes ein halber Wellenberg, wie in nebenstehender

Figur angedeutet ist. Dessen Länge ist ungefähr 3 Meter, und das Volumen einer Kugel mit diesem Radius $= 113,1$ Cub.-Meter. Entwickelt sich in diesem Raum ein Volumen Gas von 2,961 Kub.-

Meter, so ist die Verdichtung $= \frac{2,961}{113,1} = \frac{1}{38}$ ungefähr.

Ferner ist $R = 3$, r bei Moll und van Beek $= 17669$ Meter, $\lambda^2 = 0,2857 \times \frac{1}{38} = 0,00752$ und $\lambda = 0,0872$.

Obengenannte Formeln geben dann:

$$t_1 = 52,974, \quad t_2 = 53,371.$$

Das zweite Glied ist $= 0,0000687$ und also unmerklich.

Es ergibt sich also für den Unterschied der Fortpflanzungszeit in einer Röhre und im Raume für diesen Fall 0,4 Secunden, oder für den in derselben Zeit zurückgelegten Weg 132,4 Meter.

Das Unmerklichwerden des zweiten Gliedes im Werthe von t_2 hat Interesse. Es bleibt dann $t_2 = \frac{r-R}{\mu}$, d. i. die gewöhnliche Formel. Bei der Fortpflanzung im Raum ist demzufolge sogar bei Kanonenschüssen der Einfluss der Intensität unmerkbar.

Ich hatte anfangs gedacht, die Bemerkung von Rofs, von der oben die Rede war, würde sich mittelst dieser Formel erklären lassen. Dieß ist aber nicht der Fall, da der Unterschied viel zu unbedeutend ist. Dagegen scheint sie noch ganz unerklärt zu seyn, und auch Le Conte in seiner Abhandlung über den Schall (*Phil. Mag. Jan. 1864*) nimmt keine weitere Rücksicht auf sie als eine ganz isolirte Erscheinung, die überdies nicht hinreichend bestätigt sey. In den »Fortschritten der Physik« (Berlin 1860, S. 167) wird sie für eine psychologische Sinnestäuschung erklärt.

Das erhaltene Resultat der ungleichen Geschwindigkeit widerstreitet keineswegs der Poisson'schen Theorie. Freilich fand er die Geschwindigkeit unabhängig von der Intensität; allein bei seiner Entwicklung hat er die Vibrationsgeschwindigkeit, auf die es eben ankommt, vernachlässigt, um die partiellen Differential-Gleichungen integrieren zu können.

Da also der Einfluss der Intensität auf die Geschwindigkeit bei Kanonenschüssen ganz verschwindet, hat es sein besonderes Interesse, die genauesten auf diese Art angestellten Versuche, welche, wie oben gesagt, die von Moll und van Beek sind, aufs neue zu berechnen, um hieraus den Werth von γ und sodann das mechanische Wärme-Aequivalent abzuleiten.

Berechnung der Versuche von Moll und van Beek.

Diese Versuche wurden angestellt am 27. und 28. Juni 1823. Die beiden Stationen waren zwei Hügel, Kooltjes-

berg und Zevenboomen in der Nähe von Amersfoort, 5 Meilen von Amsterdam. An der ersten Station war Moll, an der anderen van Beek.

Die Signale waren Kanonenschüsse, welche gleichzeitig an beiden Stationen abgefeuert wurden. Alle nicht gleichzeitigen Beobachtungen wurden ausgeschlossen, um den Einfluß des Windes zu eliminiren.

Die Beobachtungsdata sind

Tag	Anzahl der Bestimm.	Geschw. per Sec.	Barom. m	Therm. ° C.	Dampfdruck in Meter
27	44	340,06	0,74475	11,16	0,00925307
28	28	339,34	0,74815	11,00	0,00840465

Die Barometer und Thermometer wurden fortwährend an beiden Stationen abgelesen, und obenstehende Werthe sind die Mittel aus allen Bestimmungen. Die Barometerstände sind corrigirt für Temperatur und Capillarität.

Die Temperaturangabe am 28. Juni ist um 0,21 von der bei der früheren Reduction angewandten verschieden, da hierbei ein Rechnungsfehler begangen worden ist.

Es ergab sich hieraus für die Schallgeschwindigkeit in trockner Luft bei 0° und 0,760 Meter Druck.

27. Juni	332,38
28. „	331,72
	<hr/> 332,05.

Da hierbei einige Correctionen vernachlässigt, und die Reductionsconstanten später von Regnault viel genauer bestimmt worden sind, so mag hier die ganze Berechnung wiederholt seyn. Für die Länge der Basis fanden Moll und van Beek 17669,28 Meter, welcher Werth mittelst Triangulation bestimmt war, wobei von der Krayenhoff'schen Vermessung ausgegangen wurde. Mein hochverehrter Lehrer, Prof. van Rees in Utrecht, theilte mir jedoch mit, bei einer Ueberrechnung unter Anwendung der verschiedenen Bedingungsgleichungen der Dreiecke, welche nicht in Rechnung gezogen waren, aus den vier von Moll früher berechneten Dreieckscombinationen die folgenden Resultate erhalten zu haben:

17669,510

17669,498

17669,510

17669,518

Mittel: 17669,509 Meter

Die directen Zeitbestimmungen geschahen mittelst Tertienuhren mit konischen Pendeln. Diese wurden während der Beobachtungen fortwährend mit zwei Chronometern verglichen, von denen sich einer auf jeder Station befand.

Von der Station Zevenboomen werden 89 Vergleichungen mitgetheilt, und hieraus der Werth einer Minute mittlerer Zeit = 69,63 Umdrehungen des Zeigers der Tertienuhren abgeleitet. Für den wahrscheinlichen Fehler dieses Mittels ergab sich 0,0036 oder $\frac{0,0036}{69,63} = \frac{1}{23000}$ dieses Werthes.

Von der Station Kooltjesberg werden 21 Vergleichungen angegeben. Es ergab sich eine Minute = 69,433 Umdrehungen mit dem wahrscheinlichen Fehler = 0,023 oder $\frac{1}{3400}$.

Der Gang der Chronometer war an den vorhergehenden Tagen, aber nicht während den Beobachtungen, bestimmt worden. Der Chronometer am Zevenboomen gab fast genau die mittlere Zeit, der andere retardirte aber täglich ungefähr 14 Secunden. Diese Verzögerung ist damals nicht in Rechnung gebracht; es ergibt sich aber deren Einfluß als ganz unmerkbar, da dieser $\frac{14}{24 \times 60} = \frac{1}{100}$ Sec. per Minute beträgt, was ungefähr die für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gebrauchte Zeit ist.

Hieraus ergibt sich auch, daß eine kleine Veränderung im täglichen Gange ohne Einfluß auf das Resultat ist.

Die Meinung, der Einfluß des Windes werde mittelst gleichzeitiger Schüsse eliminirt, ist unrichtig. Dieß ist schon der Fall, wenn die Richtung des Windes mit der Basis zusammenfällt, und in noch höherem Maasse gilt es, wenn die Richtungen verschieden sind.

In einer Abhandlung (Garnier und Quetelet, *Correspondance math. et phys.* 1826, T. II p. 22) hat Prof. van Rees dieß schon bemerkt, und den Einfluß des Windes folgenderweise berechnet.

A und B sind die beiden Stationen, CE und DF giebt die Windesrichtung an.

Der Schall pflanze sich jetzt in ruhiger Luft von A bis C fort in der Zeit t ; in derselben Zeit werde aber das Lufttheilchen C vom Winde nach B geführt, so wird der Beobachter in B den Schall aus A nach der Zeit t hören, und ebenso hört der Beobachter in A den Schall aus B nach der Zeit t' , wenn der Schall sich in dieser Zeit bis D ausbreitet, und der Wind das Theilchen D in derselben Zeit nach A führt.

Sei s die Geschwindigkeit des Schalles in ruhiger Luft
 v die Geschwindigkeit des Windes

$AB = \alpha$ $\angle BAF = \varphi$, dann ist

$AC = st$, $CB = vt$, $BD = st'$, $AD = vt'$

Es geben nun die Dreiecke:

$$s^2 t^2 = \alpha^2 + v^2 t^2 - 2\alpha vt \cos \varphi \quad . \quad . \quad (1)$$

$$s^2 t'^2 = \alpha^2 + v^2 t'^2 + 2\alpha vt' \cos \varphi \quad . \quad . \quad (2)$$

woraus folgt nach Elimination von s^2

$$v = \frac{\alpha(t' - t)}{2tt' \cos \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

α , t , t' und φ sind bekannt, und die Geschwindigkeit des Windes läßt sich also nach dieser Formel berechnen. Mit-
 telst Substitution in 1 oder 2 findet sich dann

$$s = \alpha \sqrt{\frac{1}{tt'} + \frac{(t' - t)^2}{4t^2 t'^2 \cos^2 \varphi}} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Nach dieser Formel sind alle Beobachtungen überrechnet.

Für jede Beobachtung ist für jede Station die Richtung des Windes in Theilen der Windrose mitgetheilt. Das Azimuth der Basis war in der Richtung Zevenboomen-Kooltjesberg $32^\circ 30' 55''.8$ westlich vom Norden. Der Winkel φ war somit bekannt.

War die Richtung des Windes an beiden Stationen einigermaßen verschieden, so wurde die mittlere genommen.

Auf diese Art findet man für den 27. Juni die folgenden Bestimmungen.

Zevenb.	Kooltj.	φ	s	Zevenb.	Kooltj.	φ	s
52,90	51,17	$32\frac{1}{2}^0$	52,02	52,99	51,07	$32\frac{1}{2}^0$	52,01
69	50,89	$43\frac{3}{4}$	51,77	90	08	55	51,96
71	68	$26\frac{1}{2}$	51,67	64	28	$59\frac{1}{2}$	51,93
92	80	$37\frac{1}{2}$	51,83	90	21	$59\frac{1}{2}$	52,02
84	86	$43\frac{3}{4}$	51,83	87	18	$59\frac{1}{2}$	51,99
53,04	89	$32\frac{1}{2}$	51,93	92	33	$59\frac{1}{2}$	52,08
52,89	51,01	$43\frac{3}{4}$	51,93	91	38	$43\frac{3}{4}$	52,13
79	00	$49\frac{1}{2}$	51,87	64	35	55	51,96
83	50,99	$48\frac{1}{2}$	51,89	57	32	55	51,93
77	96	$32\frac{1}{2}$	51,83	90	14	$37\frac{1}{2}$	52,01
79	51,10	$48\frac{1}{2}$	51,92	96	01	$43\frac{3}{4}$	51,96

Im Mittel $51^s,94$, woraus für die Geschwindigkeit per Secunde folgt 340,37 Meter.

Für den 28. Juni findet man:

Zevenb.	Kooltj.	Mittel	Zevenb.	Kooltj.	Mittel
51,81	52,12	51,96	52,18	50,17	51,17
94	10	52,02	40	52,19	52,30
77	51,28	51,52	27	62	44
98	52,51	52,24	27	51,66	51,96
52,17	46	52,32	23	52	88
15	28	52,22	49	99	52,25
25	53,10	52,67	56	60	08
		Mittel: 52,18			51,97
					52,07

Wiewohl für diesen Tag die Windesrichtung auch angegeben ist, so war es doch unmöglich die Correction, wie am 27. Juni unmittelbar an jeder Beobachtung anzubringen, da die Windkraft nicht beobachtet, sondern aus den Zeitbeobachtungen abgeleitet ward; die Correction wird deshalb völlig unsicher, wenn die Beobachtungsfehler beträchtlich sind. Diefs war am 28. Juni der Fall, an welchem Tage nicht so gut beobachtet wurde als am vorhergehenden. Wiewohl die Bestimmung an den Zevenboomen

der Windesrichtung wegen stets gröfser als am Kooltjesberg seyn mußte, so findet doch häufig das Umgekehrte statt, was nur aus Beobachtungsfehler hervorgehen kann. Deshalb habe ich die Correction am Mittel angebracht mit der mittleren Windesrichtung. Man findet dann $52^s,08$, woraus sich für die Geschwindigkeit ergibt: 339,27 Meter.

Diese zwei Bestimmungen müssen nun reducirt werden auf trockne Luft, auf 0° C. und auf 0,760 Meter Druck.

Die mittlere Spannung p des Wasserdampfes war

27. Juni 0,00925307

28. » 0,00840467

Wenn man für die Dichtigkeit des Wasserdampfes den Werth von Gay-Lussac $= \frac{5}{8}$ der Luft annimmt, welche Bestimmung mit der Regnault'schen fast zusammenfällt, so giebt die Formel $s_0 = s \sqrt{\frac{h - \frac{5}{8}p}{h}}$ für die zwei Bestimmungen

339,57 und 338,55,

welche nun noch wegen Temperatur und Druck corrigirt werden müssen.

Aus der Formel $s = \sqrt{\frac{H\beta g}{b} \frac{c}{c_1}}$ folgt nun für die Geschwindigkeit der Luft bei zwei verschiedenen Zuständen wenn die Veränderungen von $\frac{c}{c_1}$ als unmerklich vernachlässigt werden:

$$s : s_0 = \sqrt{\frac{H}{b}} : \sqrt{\frac{H_0}{b_0}} = \sqrt{pv} : \sqrt{p_0v_0} = \sqrt{kT} : \sqrt{k_0T_0}$$

H ist nämlich dem Druck p in Kilogr. per Quadratmeter direct, und b dem Volumen v umgekehrt proportional, und ferner ist $pv = kT$, wenn T die absolute Temperatur und k eine von der Temperatur und dem Druck abhängige Constante ist, wie früher angegeben worden ist ¹⁾.

Nimmt man für H corrigirt für den Wasserdampf im Mittel 0,744, so findet man nach der früher angegebenen Formel:

1) Pogg. Ann. Bd. 116, S. 429. Ueber die Abweichungen der wirklichen Gase vom Mariotte'schen Gesetze.

$$k_{\lambda}^4 = 1,00032 \quad k_{\lambda}^{100} = 1,00065, \text{ also } k_{\lambda}^{11} = 1,00034$$

$$k_{0,76}^{\lambda} = 1,00029 \quad k_{0,76}^{100} = 1,00065, \quad k_{0,76}^0 = 1,00028$$

wodurch die Abweichungen vom Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze berücksichtigt werden.

Die absolute Temperatur, wie sich diese am genauesten aus dem Wasserstoff ableiten läßt¹⁾, — 273,15 setzend, hat man:

$$27. \text{ Juni } T = 284,31$$

$$28. \text{ „ } T = 284,15$$

Mittelst Substitution dieser Werthe findet sich:

$$27. \text{ Juni } 332,82 \text{ Meter}$$

$$28. \text{ „ } 331,91$$

$$\text{Differenz} = 0,91$$

Um die Werthe dieser Bestimmungen einigermaßen vergleichen zu können, sind für beide die wahrscheinlichen Fehler berechnet. Für den 27. Juni wurden diese aus der Spalte s und für den 28. Juni aus der letzten Spalte abgeleitet. Es ergibt sich dann für die Summe der Quadrate:

27. Juni	28. Juni
2210	18715

woraus für den wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung in Secunden folgt:

0,069	0,256
-------	-------

und für die der Mittel:

0,0147	0,0684
--------	--------

Dies ist der wahrscheinliche Fehler in der Bestimmung der Fortpflanzungszeit von 52 Secunden, und also für eine Secunde:

0,00028	0,0684
---------	--------

und in Metern:

0,096	0,442
-------	-------

Wegen dieser Unterschiede der wahrscheinlichen Fehler darf man hier nicht das arithmetische Mittel der beiden Bestimmungen nehmen, sondern muß die Gewichte berechnen. Diese verhalten sich wie:

1) Pogg. Ann. Bd. 116 S. 434.

$$\frac{1}{96^2} : \frac{1}{442^2} = 20 : 1 \text{ ungefähr.}$$

Man hat also:

		wahrsch. Fehler	Gewicht
27. Juni	332,82	0,096	20
28. »	331,91	0,442	1

woraus für die Geschwindigkeit des Schalles in trockner Luft bei 0° C. und 0,760 Meter Druck folgt:

$$332,77 \pm 0,093 \text{ Meter.}$$

Man findet also 0,72 Meter mehr als bei der früheren Berechnung.

In einer Hinsicht ist dieser gefundene wahrscheinliche Fehler noch etwas zu groß. Während der Beobachtungen jedes Tages waren nämlich Temperatur und Druck nicht constant, sondern ein wenig veränderlich. Nimmt man das Mittel dieser Ablesungen, so bleibt das Endresultat un geändert, aber der wahrscheinliche Fehler würde einen etwas geringeren Werth haben, wenn man jede Beobachtung erst auf dieselbe Temperatur und denselben Druck reducirt hätte. Andererseits ist aber in dieser Angabe der Fehler der Reductionselemente, so wie ein möglicher, aus einen unrichtigen Gang der Uhren hervorgegangener constanter Fehler nicht einbegriffen. Die ersten folgen aber aus Regnault's Bestimmungen, die mit einer viel größeren Genauigkeit als $\frac{1}{2000}$ bekannt sind, und auch der letzte Einfluß kann schwerlich einen größeren Fehler hervorrufen.

Ist es jedoch auch nicht völlig sicher, daß der wirkliche Werth zwischen den vom wahrscheinlichen Fehler angegebenen Gränzen liege, so scheint mir doch der gefundene Werth jedenfalls auf $\frac{1}{1000}$ sicher, und mit Bestimmtheit läßt sich demzufolge behaupten, daß der wahre Werth zwischen 333,10 und 332,44 liegen müsse.

Von einer Prüfung dieses Werthes an der Theorie kann keine Rede seyn, da $\frac{c}{c_1}$ bei weitem nicht mit gleicher Genauigkeit bekannt ist.

Umgekehrt läßt sich aber dieser Werth aus der Formel

$s = \sqrt{\frac{H\beta g}{b} \frac{c}{c_1}}$ berechnen.

$$s = 332,77$$

$$H = 0,760$$

$$\beta = 13,59593$$

$$g = 9,8096$$

$$b = 0,001293187$$

woraus folgt: $\frac{c}{c_1} = 1,4128 \pm 0,0008$, mit Berücksichtigung des wahrscheinlichen Fehlers der Schallgeschwindigkeit.

Nimmt man für die äußerste Fehlergränze der Schallgeschwindigkeit wieder $\frac{1}{1000}$, so findet man dafs der Werth von $\frac{c}{c_1}$ jedenfalls zwischen 1,4104 und 1,4152 liegen mufs.

Eigentlich mufs dieser Werth noch eine kleine Correction erfahren, da hierbei angenommen wurde, dafs der Werth von $\frac{c}{c_2}$ derselbe sey bei Luft und Wasserdampf. Die Masse des letzteren war zur Zeit der Beobachtungen ungefähr $\frac{1}{131}$ von der der Luft. Der Werth von $\frac{c}{c_1}$ für Wasserdampf ist nicht bekannt; nimmt man aber dafür den Werth 1,2, welchen Du Long bei leicht condensirbarem Gase, wie schweflige Säure, gefunden hat, so ergiebt sich eine Berichtigung $= 0,0026$ und man hat dann für trockne Luft $\frac{c}{c_1} = 1,4144$. Diese Berichtigung bleibt aber ziemlich unsicher.

Hieraus läßt sich dann das mechanische Wärme-Aequivalent berechnen, worauf ich in einer folgenden Abhandlung zurückzukommen denke.

Zütphen, 19. November 1864.