Bemerkungen zur Struktur einer linearen perfekten nirgends dichten Punktmenge.*)

Von

Konrad Knopp in Berlin.

§ 1.

Ist M eine beliebige meßbare lineare Punktmenge, so bezeichnen wir mit Herrn Lebesgue**) als die *mittlere Dichte* $D(\alpha, \beta)$ von M in $\alpha \cdots \beta$ $(\alpha \gtrless \beta)$ den Quotienten des Maßes der in $\alpha \cdots \beta$ gelegenen Punkte von M durch die Länge $|\beta - \alpha|$ dieses Intervalles. Hält man den linken Endpunkt x_0 eines solchen Intervalles fest, während man den rechten Endpunkt x desselben gegen x_0 rücken läßt, so kann dabei $D(x_0, x)$ einem bestimmten Grenzwerte zustreben, der dann als *rechtsseitige Dichte von M in x_0* bezeichnet wird; und analog sei die *linksseitige Dichte* definiert. Haben beide denselben Wert, ist also

$$\lim_{x = x_0 \pm 0} D(x_0, x)$$

vorhanden, so sei sein Wert schlechtweg als *Dichte von M in x_0* bezeichnet.

Im folgenden wollen wir die Punkte einer speziellen Menge bezüglich ihrer rechts- und linksseitigen Dichte untersuchen.

Herr Lebesgue hat in seiner oben erwähnten Arbeit den sehr allgemeinen Satz bewiesen, daß die Dichte einer meßbaren Menge in „fast allen"***) ihren Punkten $= 1$ ist. Sein Beweis ist aber — wie übrigens der Beweis der meisten Sätze, in denen das Lebesguesche „fast alle" vorkommt —

*) Die nachfolgenden Untersuchungen sind in engem Anschluß an gemeinsam von Herrn E. Jacobsthal und mir gemachte „Bemerkungen zur Struktur linearer Punktmengen" entstanden, die in den Sitzungsberichten der Berliner Mathematischen Gesellschaft Jhrg. XIV, S. 121—129, gleichzeitig mit dieser Arbeit erscheinen.

**) Sur l'intégration des fonctions discontinues, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure (3), 27 (1910) 361—450, S. 406.

***) D. h. in allen Punkten außer etwa in denen einer Menge vom Maße 0.

von so allgemeiner Natur, daß in einem konkret vorgelegten Falle meist nicht ein einziger Punkt angegeben werden kann, der die fragliche Eigenschaft besitzt. Es ist daher eine vielleicht nicht ganz uninteressante Ergänzung jener Untersuchungen, wenn im folgenden bei einer bestimmten perfekten nirgends dichten Menge P das Verhalten von $D(x_0, x)$ bei der Annäherung von x an einen beliebigen Punkt x_0 — zur Menge gehörig oder nicht — festgestellt wird.

Die in Rede stehende perfekte nirgends dichte Menge P werde folgendermaßen konstruiert:

1. Aus der Mitte der Strecke $0 \cdots 1$ werde ein Intervall i_1 von der Länge $\vartheta_1 = \frac{1}{4}$ herausgeschnitten, so daß zwei gleichlange Intervalle e_1 rechts und links zurückbleiben, deren Gesamtlänge $= 1 - \frac{1}{4}$ beträgt, deren jedes also die Länge $e_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right)$ hat.

2. Aus der Mitte beider Intervalle e_1 werde je ein Intervall i_2 herausgeschnitten, dessen Länge den Bruchteil $\vartheta_2 = \frac{1}{9}$ von ihm ausmacht. Es ist also $i_2 = \frac{1}{9} e_1$ und es bleiben 2^2 gleichlange Intervalle e_2 zurück, deren Gesamtlänge $= \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)$ beträgt, deren jedes also die Länge

$$e_2 = \frac{1}{2^2}\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)$$

hat.

3. Aus der Mitte aller e_2 werde je ein Intervall i_3 herausgeschnitten, dessen Länge den Bruchteil $\vartheta_3 = \frac{1}{16}$ von jedem ausmacht. Es ist also

$$i_3 = \vartheta_3 \cdot e_2 = \frac{1}{16} e_2$$

und es bleiben 2^3 gleichlange Intervalle e_3 zurück, deren Gesamtlänge

$$= \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)$$

beträgt, deren jedes also die Länge

$$e_3 = \frac{1}{2^3}\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)$$

hat.

Fährt man so unter Benutzung der Brüche

$$\vartheta_n = \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{(n+1)^2}, \cdots$$

fort, so lautet der n^{te} Schritt:

n. Aus der Mitte aller 2^{n-1} Intervalle e_{n-1} werde je ein Intervall i_n herausgeschnitten, dessen Länge den Bruchteil $\vartheta_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ von jedem e_{n-1}

ausmacht. Es ist also $i_n = \vartheta_n \cdot e_{n-1}$ und es bleiben 2^n gleichlange Intervalle e_n zurück, deren Gesamtlänge

$$= \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

beträgt, deren jedes also die Länge

$$e_n = \frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

hat. Übrigens ist

$$e_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

und also

$$i_n = \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Setzt man dies unbegrenzt fort, so bilden bekanntlich die Endpunkte der herausgeschnittenen Intervalle i_n zusammen mit deren Häufungspunkten in $0\cdots 1$ eine perfekte nirgends dichte Menge. *Dies sei unsere Menge P.* Ihr Maß ist bekanntlich gleich dem Komplement der herausgeschnittenen Intervalle, also

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} i_n = 1 - \frac{1}{2}\sum_n \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{2}$$

oder kürzer

$$= \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\cdots = \frac{1}{2}\ *).$$

Die Punkte von P teilen wir wie üblich in zwei Gruppen und bezeichnen als

Punkte erster Art die Endpunkte der Intervalle i_n, der sogenannten *Lückenintervalle* von P, und als

Punkte zweiter Art alle übrigen Punkte von P.

---

*) Ich bemerke sogleich (vgl. § 2), daß die folgenden Untersuchungen ohne wesentliche Änderung auch für jede analog konstruierte Menge von vorgeschriebenem Maße $\mu > 0$ gelten. Man hat dann lediglich die Bruchteile ϑ_n so zu wählen, daß das Komplement der entfernten Intervalle $= \mu$ ist, was z. B. folgendermaßen geschehen kann: Es sei m eine ganze Zahl, für die $1 - \frac{1}{m} > \mu$ ($\mu = 1$ kann ausgeschlossen werden, da sonst P mit der *vollen* Strecke $0 \ldots 1$ identisch wäre) und nehme nun der Reihe nach die Bruchteile

$$1-\mu\frac{m}{m-1},\ \frac{1}{m^2},\ \frac{1}{(m+1)^2},\ \cdots.$$

Dann hat P das Maß

$$\left[1-\left(1-\mu\frac{m}{m-1}\right)\right]\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\left(1-\frac{1}{(m+1)^2}\right)\cdots = \mu.$$

Da die Punkte erster Art ersichtlich abzählbar sind, so sind „fast alle" Punkte der Menge P von der zweiten Art. — Wir beweisen nun die folgenden Tatsachen:

Satz 1: *Ist* x_1 *ein Punkt erster Art, so hat* $\lim D(x_1, x)$ *den Wert* 1, *wenn sich* x *dem Punkte* x_1 *von außerhalb desjenigen Lückenintervalls nähert, dessen Endpunkt* x_1 *ist.* Da bei Annäherung von innerhalb des Lückenintervalls selbstverständlich $D(x_1, x) = 0$ ist, so besitzen also die Punkte erster Art sowohl eine rechtsseitige als eine linksseitige Dichte; beide sind aber verschieden, indem die eine 0, die andere 1 ist.

Satz 2: *Die Punkte* x_2 *der zweiten Art zerfallen ihrerseits in zwei Klassen,* von denen keine leer ist, und die wir weiter unten rein arithmetisch in ziemlich einfacher Weise genau charakterisieren werden. *Für die Punkte* x_2' *der einen Klasse ist die beiderseitige Dichte gleich* 1 *und für die Punkte* x_2'' *der anderen Klasse bleibt* $D(x_2'', x)$ *bei Annäherung von* x *gegen* x_2'' *mindestens auf der einen Seite* — und auf welcher, wird ebenfalls genau angegeben werden — *durchaus unbestimmt.*

Da für die Punkte der Komplementärmenge von P, d. h. für die inneren Punkte der Lückenintervalle die Dichte natürlich vorhanden ist und (beiderseits) den Wert 0 hat, so wäre für jeden einzelnen Punkt x_0 der Strecke $0 \cdots 1$*) das Verhalten $D(x_0, x)$ für $x \to x_0$ genau festgestellt.

Beweis des Satzes 1: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, daß x_0 der rechte Endpunkt eines bestimmten Lückenintervalles i_k ist. Da dann $\lim\limits_{x = x_0 - 0} D(x_0, x) = 0$ trivial ist, ist lediglich für die rechtsseitige Annäherung

$$\lim_{x = x_0 + 0} D(x_0, x) = 1$$

zu beweisen. Es sei nun $n > k$ und in der Figur 1 das von x_0 ausgehende Intervall e_{n-1} angedeutet, dessen Endpunkte (für jedes $n > k$)

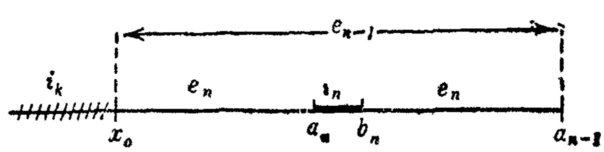

Fig 1.

x_0 und a_{n-1} heißen mögen. Beim n^{ten} Schritt wird nun aus der Mitte von e_{n-1} des Intervalls i_n herausgeschnitten, dessen Endpunkte a_n und b_n heißen mögen, so daß

$$a_n - x_0 = a_{n-1} - b_n = e_n$$

*) Die Punkte 0 und 1 spielen die Rolle eines rechten bzw. linken Endpunktes eines Lückenintervalles.

ist. Da das Maß der auf e_n entfallenden Teilmenge von P ersichtlich $= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2}$ ist, so ist

$$D(x_0, a_n) = \frac{2^{-n-1}}{e_n} = \frac{n+1}{n+2};$$

es folgt also sofort

$$\lim_{n=\infty} D(x_0, a_n) = 1,$$

und wir haben nur noch zu zeigen, daß, während x von a_{n-1} gegen a_n rückt, $D(x_0, x)$ nicht erheblich sinken kann. Da aber, wenn x einen Punkt dieser Strecke bedeutet, das Maß der auf $x \cdots a_{n-1}$ entfallenden Teilmenge von P nicht größer als die Länge dieser Strecke sein kann, also

$$\leqq a_{n-1} - x = e_n + i_n - (x - a_n)$$

ist, so ist

$$D(x_0, x) \geqq \frac{2^{-n} - e_n - i_n + (x - a_n)}{e_n + (x - a_n)},$$

wo das erste Glied des Zählers das Maß von P auf e_{n-1} angibt. Da nun ein echter Bruch verkleinert wird, wenn man in Zähler und Nenner dieselbe positive Größe fortläßt, so ist

$$D(x_0, x) \geqq \frac{2^{-n} - e_n - i_n}{e_n} = 2 \cdot \frac{n+1}{n+2} - 1 - \frac{i_n}{e_n};$$

aber auch diese untere Schranke von $D(x_0, x)$ rückt mit wachsendem n gegen 1, so daß allgemein

$$\lim_{x = x_0 + 0} D(x_0, x) = 1$$

sein muß. Damit ist Satz 1 schon vollständig bewiesen. —

Bevor wir den zweiten Satz präzisieren und beweisen können, müssen wir einige Bemerkungen über die Lagebezeichnungen der Punkte zweiter Art machen:

Ein bestimmter Punkt zweiter Art liegt niemals im Innern oder auf dem Rande eines der Lückenintervalle i_n; daher liegt er bei jedem der Schritte, die uns zur Konstruktion von P geführt haben, im Innern eines der Intervalle e_n. Er liegt also insbesondere beim ersten Schritt entweder in dem linken oder in dem rechten der beiden Intervalle e_1, dann wieder in dem linken oder in dem rechten derjenigen beiden Intervalle e_2, in das das vorige Intervall e_1 beim zweiten Schritte zerlegt wird; dann wieder in dem linken oder in dem rechten derjenigen beiden Intervalle e_3, in das das vorige Intervall e_2 beim dritten Schritt zerlegt wird, usw. Der Punkt x_2 gibt somit zu einer ganz bestimmten Sukzession der Entscheidungen „rechts“ und „links“ Anlaß, und zwei verschiedene Punkte x können nicht dieselbe Sukzession liefern. Ferner überzeugt man sich sofort, daß die Entscheidung von keiner Stelle an dauernd „rechts“ noch auch dauernd „links“ lauten kann, da sonst entgegen der Annahme x_2 der Endpunkt eines Lückenintervalles wäre, nämlich desjenigen, von dem bei der unmittelbar vor der konstanten Sukzession stehenden Entscheidung die Rede war.

Schreiben wir statt „links“ und „rechts“ bequemer 0 und 1, so haben wir also das Ergebnis: jedem Punkt x_2 entspricht die Mantisse eines bestimmten dyadischen Bruches

$$x_2 \sim 0{,}10110\cdots,$$

die von keiner Stelle an *dauernd* 1 oder *dauernd* 0 hat, und zwei verschiedenen x_2 entsprechen auch zwei verschiedene solche Brüche.

Verbindet man mit der Entscheidung „0“ („links“) nicht die linke Hälfte des *geteilten* Intervalles e, sondern den linken Endpunkt des *teilenden* (Lücken-)Intervalles i, und ebenso mit der Entscheidung „1“ den rechten Endpunkt eines solchen, so erscheint x_2 als Grenzwert der solchergestalt ausgezeichneten Endpunkte der i_n. Auf diese Weise sind die Punkte zweiter Art umkehrbar eindeutig den dyadischen Brüchen mit unendlich vielen Nullen *und* unendlich vielen Einsen zugeordnet.*) Bei diesen folgt also auf jede Null immer wieder einmal eine Eins, und umgekehrt. Es werde nun für jedes n mit p_n die Anzahl der auf die n^{te} Ziffer der Mantisse folgenden *entgegengesetzten* Ziffern bezeichnet, so daß $p_n \geqq 0$ eine bestimmte ganze Zahl ist.**) Steht also z. B. an n^{ter} Stelle eine 1, so folgen genau p_n Nullen und dann wieder eine 1. Wir wollen überdies die Zahl p_n als $p_n^{(0)}$ und $p_n^{(1)}$ unterscheiden, je nachdem an der n^{ten} Stelle selbst eine 0 oder eine 1 steht. Nach diesen Vorbereitungen läßt sich nun der Satz 2 folgendermaßen präzisieren:

Satz 2: *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß im Punkte x_2 zweiter Art die Dichte eine bestimmte sei, besteht darin, daß für den der Zahl x_2 entsprechenden dyadischen Bruch*

$$\lim_{n=\infty} \frac{2^{p_n}}{n^2} = 0$$

ist. Die Dichte hat dann stets den Wert 1. *Ist die genannte Bedingung nicht erfüllt, und ist also mindestens einer der Werte*

---

*) Die analog sich vollziehende Zuordnung zwischen den Punkten *erster* Art und den dyadischen Brüchen ist ebenfalls — jedoch nur formal — eine umkehrbar eindeutige; es liefern nämlich die beiden Endpunkte ein und desselben i_k zwei ihrem Zahlenwert nach übereinstimmende Brüche, z B. die beiden Endpunkte von i_1

$$0{,}01111\cdots \text{ und } 0{,}10000\cdots.$$

**) Für $x_1 \sim 0{,}10110\cdots$ wäre also $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 0, \cdots$.

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\, \frac{2^{p_n^{(0)}}}{n^2} \quad \text{und} \quad \overline{\lim_{n=\infty}}\, \frac{2^{p_n^{(1)}}}{n^2}$$

nicht 0, *so bleibt* $D(x_2, x)$ *bei rechtsseitiger bzw. linksseitiger Annäherung von* x *an* x_2 *unbestimmt, je nachdem der erste oder der zweite der genannten Werte nicht* 0 *(also positiv) ist.*

Beweis: Ich wende mich zunächst dem zweiten Teil des Beweises zu. In diesem Falle gibt es also eine positive Zahl γ, so daß unendlich oft

$$2^{p_n} > \gamma(n+1)^2$$

ist; dann muß entweder $2^{p_n^{(0)}}$ oder $2^{p_n^{(1)}}$ unendlich oft $> \gamma(n+1)^2$ sein. Es finde etwa das letztere statt; dann werde ich zeigen, daß für *links*seitige Annäherung $D(x_2, x)$ unbestimmt bleibt. Wenn nämlich unendlich oft $2^{p_n^{(1)}} > \gamma(n+1)^2$ ist, so heißt dies: in dem dyadischen Bruch dem x_2 entspricht, gibt es unendlich viele Einsen, auf die relativ viele Nullen hintereinander folgen. Es bezeichne jetzt n die Stellenzahl einer solchen 1; und es werde in der nur schematisch gezeichneten Figur 2, wie vorhin, dasjenige i_n angedeutet, dessen rechter Endpunkt zu der oben erwähnten gegen x_2 konvergierenden Punktfolge gehört; x_2 selbst liegt dann in den *rechts* davon gelegenen e_n. Bei den nächsten p_n Schritten, die zur Kon-

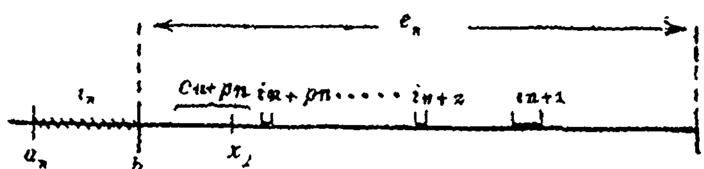

Fig. 2.

struktion von P führten, liegt aber nun x_2 jedesmal in der *linken* Hälfte des geteilten e, was — allgemein zu reden — bedeutet, das x_2 relativ dicht an dem genannten Endpunkt von i_n liegt. Gerade dies wird zur Folge haben, daß $D(x_2, a_n)$ nicht beliebig nahe an 1 kommt, wenn a_n den linken Endpunkt eines solchen i_n bedeutet.

In der Tat, es seien a_n und b_n linker und rechter Endpunkt des Intervalles i_n; da auch nach dem $(n+p_n)^{\text{ten}}$ Schritte x_2 noch links von i_{n+p_n}, beim nun folgenden $(n+p_n+1)^{\text{ten}}$ Schritte aber rechts von i_{n+p_n+1} liegt, so ist

$$e_{n+p_n+1} < x_2 - b_n < e_{n+p_n}.$$

Folglich ist, da i_n leer ist,

$$D(a_n, x_2) = \frac{\text{Maß von } P \text{ in } (b_n, x_2)}{i_n + (x_2 - b_n)} < \frac{x_2 - b_n}{i_n + (x_2 - b_n)}$$

$$< \frac{1}{1 + \dfrac{i_n}{x_2 - b_n}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{i_n}{x_2 - b_n} > \frac{i_n}{e_{n+p_n}} = \frac{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{2^{n+p_n+1}}\left(1+\frac{1}{n+p_n+1}\right)} > \frac{2^{p_n}}{(n+1)^2} > \gamma$$

und also

$$D(a_n, x_2) < \frac{1}{1+\gamma}.$$

Andererseits besagte der Beweis des Satzes 1, daß allgemein die Dichte von P auf einer Strecke, die von einem Endpunkt eines e_n bis zu einem beliebigen anderen Punkte desselben reicht, oberhalb einer mit wachsendem n gegen 1 rückenden Zahl liegt. Folglich ist dies mit $D(b_n, x_2)$ der Fall.

Da nun aber solche Intervalle, wie das eben behandelte i_n, vom Punkte x bei Annäherung von links an x_2 unendlich oft passiert werden, so kommt hierbei $D(x_2, x)$ einerseits beliebig dicht an 1 heran, sinkt aber andererseits dabei immer wieder unter $\frac{1}{1+\gamma}$ herab. Es kann also

$$\lim_{x = x_2 - 0} D(x_2, x)$$

nicht vorhanden sein. — Entsprechend verläuft unter der Annahme, daß

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{2^{p_n^{(0)}}}{n^2} > 0$$

ist, der Nachweis, daß bei *rechtsseitiger* Annäherung von x an x_2 die Dichte keinem Grenzwert zustrebt.

Nun macht auch der Beweis des ersten Teiles unseres Satzes keine Schwierigkeit mehr:

Ich zeige zunächst, daß bei der nunmehrigen Voraussetzung

$$\lim_{n=\infty} \frac{2^{p_n}}{n^2} = 0$$

auch

$$\lim_{n=\infty} D(a_n, x_2) = 1$$

ist. In der Tat darf ja, wie soeben hervorgehoben,

$$D(b_n, x_2) = \delta_n \quad \text{mit} \quad \delta_n \longrightarrow 1$$

gesetzt werden. Daher ist

$$D(a_n, x_2) = \frac{\delta_n (x_2 - b_n)}{i_n + (x_2 - b_n)} = \frac{\delta_n}{1 + \frac{i_n}{x_2 - b_n}}.$$

Jetzt ist aber

$$\frac{i_n}{x_2 - b_n} < \frac{i_n}{e_{n+p_n+1}} < \frac{8 \cdot 2^{p_n}}{n^2},$$

rückt also mit $\frac{1}{n}$ gegen 0, so daß $D(a_n, x_2) \longrightarrow 1$ strebt.

Aus dieser speziellen Feststellung ergibt sich aber sofort die allgemeine Behauptung, da $D(a_n, x_2)$ sozusagen der ungünstigste Wert von $D(x_2, x)$ in der Nähe von x_2 ist.

Man erkennt dies so: Es sei x irgend ein in der Nähe von x_2 (rechts oder links) gelegener Punkt; dann liegt er mit x_2 zusammen auf einem wohlbestimmten e von geringster Länge, und der Index dieses e — er werde mit $n-1$ bezeichnet — wächst mit $x \longrightarrow x_2$ über alle Grenzen. Auf diesem e_{n-1} sind aber x und x_2 durch i_n getrennt, weil sie andernfalls auf dem noch kleineren e_n zusammenlägen. Wir haben also eine zu Fig. 2 ähnliche Situation (oder die dazu spiegelbildliche), wenn wir uns dort x auf dem *links* anstoßenden e_n gelegen denken. Nach dem zu Satz 1 gegebenen, und soeben entsprechend interpretierten Beweise darf dann aber $D(x, a_n) = 1 - \eta_n$ gesetzt werden, wobei η_n mit $n \longrightarrow \infty$, d. h. also mit $x \longrightarrow x_2$, gegen 0 rückt. Soeben sahen wir, daß entsprechend

$$D(a_n, x_2) = 1 - \varepsilon_n$$

mit $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ gesetzt werden darf. Dann ist aber

$$D(x, x_2) = \frac{(1-\varepsilon_n)\cdot(x_2 - a_n) + (1-\eta_n)(a_n - x)}{x_2 - x} = 1 - \zeta_n,$$

wo nun ζ_n zugleich mit ε_n und η_n, also mit $x \longrightarrow x_2$ unendlich klein wird. Es ist also

$$\lim_{x = x_2 \pm 0} D(x, x_2) = 1,$$

womit nun auch Satz 2 in allen Teilen vollständig bewiesen ist.

§ 2.

Es ist nicht ohne Absicht, daß wir die Sätze des vorigen Paragraphen nur für eine so spezielle Menge, wie die von uns betrachtete, bewiesen haben. Denn das merkwürdige des Satzes 2 liegt gerade darin, daß bei einer so regelmäßig gebauten Menge, wie P es ist, die Punkte zweiter Art einen so ganz verschiedenartigen Charakter besitzen, nämlich zu einem Teile Punkte mit der bestimmten Dichte 1, zum übrigen Teile Punkte mit durchaus unbestimmter Dichte zu sein. Es ist daher a priori sehr wahrscheinlich, daß bei *weniger* regelmäßig gebauten Mengen *um so eher*

Punkte mit unbestimmter Dichte existieren werden, (während aber nach dem eingangs erwähnten Satze von Lebesgue doch in „fast allen“ Punkten die Dichte bestimmt und gleich 1 ist). Auf der anderen Seite wird man nicht erwarten können, daß man eine so einfache *notwendige und hinreichende* Bedingung für das Vorhandensein einer bestimmten Dichte, wie in Satz 2, wird aussprechen können, ohne auf die genauere Bauart der Menge selbst einzugehen. Will man also in dieser Richtung nicht gar zu komplizierte Sätze aufstellen, so wird man entweder die Menge von relativ einfacher Bauart annehmen, oder auf eine die Frage so vollständig erledigende Abrundung des Satzes verzichten müssen.

Auf dem ersten und einfacheren dieser Wege gelangt man z. B. zu folgendem Resultate:

Konstruiert man eine perfekte nirgends dichte Menge P, indem man genau so wie in § 1 verfährt, nur daß die $i_1, i_2, i_3, \cdots$ nicht die speziellen Bruchteile $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \cdots$ der $e_0 = 1, e_1, e_2, \cdots$ sind, sondern allgemeiner je den Bruchteil $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \cdots$ von ihnen ausmachen $(0 < \vartheta_\lambda < 1)$, so erhält P das Maß

$$m(P) = (1-\vartheta_1)(1-\vartheta_2)(1-\vartheta_3)\cdots = \prod_{n=1}^{\infty}(1-\vartheta_n)$$

und wird also $= 0$ oder > 0 sein, je nachdem $\sum \vartheta_n$ divergiert oder konvergiert. Nehmen wir das letztere an, *so gilt unverändert der Satz* 1 (während er für die bei divergenter $\sum \vartheta_n$ resultierende Nullmenge natürlich nicht gilt). Diese Behauptung ergibt sich wörtlich wie in § 1: Setzt man das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-\vartheta_n) = \Theta \quad (>0)$$

und die Partialprodukte

$$\prod_{\nu=1}^{n}(1-\vartheta_\nu) = \Theta_n \quad (>0),$$

so ist jetzt

$$e_n = \frac{1}{2^n}\Theta_n, \qquad i_n = \vartheta_n \cdot e_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}\Theta_{n-1}\cdot\vartheta_n,$$

und also

$$D(x_0, a_n) = \frac{\Theta}{\Theta_n}, \quad \text{was} \quad \lim_{n=\infty} D(x_0, a_n) = 1,$$

und

$$D(x_0, x) \geqq \frac{\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\Theta - e_n - i_n + (x - a_n)}{e_n + (x - a_n)} > \frac{\frac{1}{2^{n-1}}\Theta - e_n - i_n}{e_n} = 2\cdot\frac{\Theta}{\Theta_n} - 1 - \frac{i_n}{e_n},$$

was allgemein

$$\lim_{x=x_0+0} D(x_0, x) = 1$$

zur Folge hat, da ja auch hier $\frac{i_n}{e_n} = \frac{2\vartheta_n}{1-\vartheta_n}$ gegen 0 strebt. Für diese Menge gilt dann auch in allem wesentlichen ungeändert der Satz 2, der jetzt die Form bekommt:

Satz 2': *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß in einem Punkte zweiter Art die Dichte eine bestimmte — und dann notwendig gleich* $= 1$ — *ist, besteht darin, daß*

$$\lim_{n=\infty} 2^{p_n} \cdot \vartheta_n = 0$$

ist. Ist sie nicht erfüllt, so bleibt $D(x_2, x)$ *bei rechtsseitiger bzw. linksseitiger Annäherung von* x *an* x_2 *unbestimmt, je nachdem*

$$\overline{\lim}\, 2^{p_n^{(0)}} \cdot \vartheta_n \quad \textit{oder} \quad \overline{\lim}\, 2^{p_n^{(1)}} \cdot \vartheta_n$$

nicht 0 *ist*, (bleibt insbesondere also auf *beiden* Seiten unbestimmt, wenn *beide* $\overline{\lim} > 0$ sind).

Auch hier ist der Beweis in allem wesentlich derselbe. Man hat genau wie vorhin — zum Beweise des zweiten Teiles des jetzigen Satzes —

$$D(a_n, x_2) < \frac{1}{1 + \frac{i_n}{x_2 - b_n}}$$

und es ist jetzt

$$\frac{i_n}{x_2 - b_n} > \frac{i_n}{e_{n+p_n}} = \frac{\frac{1}{2^{n-1}}\,\Theta_{n-1} \cdot \vartheta_n}{\frac{1}{2^{n+p_n}} \cdot \Theta_{n+p_n}} > 2^{p_n} \cdot \vartheta_n,$$

was nun eben für unendlich viele n oberhalb einer festen positiven Zahl γ liegt, so daß in jeder Nähe von x_2 immer wieder

$$D(x_2, x) < \frac{1}{1+\gamma}$$

ist, während man genau wie dort erkennt, daß in jeder Nähe von x_2 der Wert $D(x_2, x)$ auch jede noch so nah unterhalb 1 gelegene Zahl immer wieder übersteigt. — Und zum Beweis des ersten Teiles des Satzes hat man jetzt

$$D(a_n, x_2) = \frac{\delta_n (x_2 - b_n)}{i_n + (x_2 - b_n)} = \frac{\delta_n}{1 + \frac{i_n}{x_2 - b_n}}.$$

mit $\delta_n \rightarrow 1$ und

$$\frac{i_n}{x_2 - b_n} < \frac{i_n}{e_{n+p_n+1}} < \frac{4}{\Theta} \cdot 2^{p_n} \cdot \vartheta_n,$$

so daß auch jetzt $D(a_n, x_2) \rightarrow 1$, woraus dann durch identisch dieselben Schlüsse die allgemeine Richtigkeit des Satzes 2′ sich ergibt.

Auf dem zweiten, erheblich allgemeineren und darum auch schwierigeren der oben erwähnten Wege zur Erweiterung der gewonnenen Resultate gelangt man noch leicht zu dem folgenden

Satz 3: *Bei jeder perfekten nirgends dichten Menge P, für die der Satz* 1 *gilt,* für die also die Punkte erster Art *sämtlich* auf der dem Lückenintervall abgewandten Seite die Dichte 1 haben*), *existieren in jeder Nähe jedes Punktes der Menge stets Punkte zweiter Art mit unbestimmter Dichte.*

Beweis: In jeder Nähe eines jeden Punktes x_0 unserer Menge läßt sich ein nicht leeres Intervall α_0 abgrenzen; im Innern desselben gibt es dann notwendig Lückenintervalle. Es sei a_0 der rechte Endpunkt eines solchen, b_0 sein linker. Da dann nach Annahme

$$\lim_{x = a_0 + 0} D(a_0, x) = 1$$

sein soll, so läßt sich in beliebiger Nähe von a_0 ein nicht leeres ganz innerhalb α_0 gelegenes Intervall α_1 angeben, so daß für alle Punkte x desselben

$$D(a_0, x) > \vartheta_1 \qquad (0 < \vartheta_1 < 1)$$

ist. Wir denken uns dabei α_1 so klein und so dicht an a_0 gewählt, daß zugleich für alle diese x

$$D(b_0, x) < \varepsilon_1 \qquad (0 < \varepsilon_1 < 1)$$

ist, welch beiden Bedingungen ersichtlich *zugleich* genügt werden kann.

---

*) Daß dies nicht bei jeder perfekten nirgends dichten Menge der Fall zu sein braucht, zeigen einfachste Beispiele. Markiert man z. B. auf der Strecke $0 \ldots 1$ die Punkte $\frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ $(n = 4, 5, \cdots)$, und tut in die entstandenen Intervalle

$$0 \cdots \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \cdots \frac{3}{10} \cdots$$

je eine Menge, die zu der in § 1 konstruierten Menge P geometrisch ähnlich ist, läßt man ferner $\frac{1}{2} \cdots \frac{3}{4}$ leer und tut endlich in $\frac{3}{4} \cdots 1$ wieder eine zu P ähnliche Menge, so ist

$$\lim_{x = \frac{1}{2} - 0} D\left(x, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

wie man ohne Schwierigkeit nachweist.

Verfährt man nun mit α_1 ebenso, so findet man darin ein Lückenintervall $b_1 \cdots a_1$ und rechts von a_1 ein Intervall α_2 für dessen sämtliche Punkte x

$$D(a_1, x) > \vartheta_2 \qquad (0 < \vartheta_2 < 1),$$

$$D(b_1, x) < \varepsilon_2 \qquad (0 < \varepsilon_2 < 1)$$

ist. Fährt man so fort, so konvergieren die ineinander geschachtelten Intervalle α_λ gegen einen bestimmten Punkt x_2 von der zweiten Art,*) für den, da er in jedem α_n liegt, bei jedem n

$$D(a_n, x_2) > \vartheta_n,$$

und

$$D(b_n, x_2) < \varepsilon_n$$

ist. Hat man also etwa die $\vartheta_n \longrightarrow 1$, die $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ konvergierend gewählt, so zeigt sich, daß x_2 ein Punkt ohne linksseitige Dichte ist. Die entsprechende Konstruktion von Punkten ohne rechtsseitige Dichte liegt nun auf der Hand.

Durch die bisherigen Sätze ist es zwar wahrscheinlich gemacht, aber noch nicht entschieden, ob bei *jeder* perfekten nirgends dichten Menge Punkte zweiter Art mit unbestimmter Dichte existieren oder nicht. Unter Zugrundelegung des Lebesgueschen Satzes, daß „fast alle" Punkte einer Menge die Dichte 1 haben, läßt sich dies in der Tat beweisen. Genauer gilt der

Satz 4: *Ist P irgend eine perfekte nirgends dichte Menge, die in jedem,* (nicht mit einem Lückenintervall identischen) *Teilintervall eine positive Dichte hat***), *so besitzt sie in jeder Nähe eines jeden ihrer Punkte stets Punkte zweiter Art mit unbestimmter Dichte.*

Der Beweis verläuft ganz ähnlich wie beim vorigen Satze: Ich wähle wie dort das Intervall α_0; nach dem erwähnten Lebesgueschen Satze gibt es in seinem Innern einen Punkt mit der Dichte 1. Es sei p_1 ein solcher. Dann können wir *rechts* von p_1 ein ganz innerhalb α_0 gelegenes nicht leeres Intervall α_0' so wählen, daß für jeden Punkt x desselben

$$D(p_1, x) > \vartheta_1$$

ist. Im Innern von α_0' liegt dann mindestens ein Lückenintervall; l_1 sei der *linke* Endpunkt eines solchen. *Rechts* von ihm wähle ich dann noch ganz innerhalb α_0', ein neues Intervall α_1, jedoch so dicht *rechts* vom

---

*) Daß er wirklich von zweiter Art ist, ergibt sich eben aus dem Verhalten von $D(x_2, x)$ bei $x \longrightarrow x_2$.

**) Diese Einschränkung ist selbstverständlich notwendig.

rechten Endpunkt des genannten Lückenintervalles, daß für jeden Punkt x von α_1

$$D(l_1, x) < \varepsilon_1$$

ist. Verfährt man mit α_1 ebenso, usw., so gelangt man wie vorhin zu einem Punkte zweiter Art x_2, für den bei jedem n

$$D(p_n, x_2) > \vartheta_n,$$
$$D(l_n, x_n) < \varepsilon_n$$

ist. Dies bedeutet aber wieder bei geeigneter Verfügung über die ϑ_n und ε_n, daß x_2 keine bestimmte *links*seitige Dichte besitzt.