Eineindeutige Abbildungen und Meßbarkeit.¹⁾

Von Hans Rademacher in Schloß Bischofstein (Bez. Erfurt).

Einleitung.

Die Methode der modernen Geometrie, eine Eigenschaft eines räumlichen Gebildes dadurch zu charakterisieren, daß man die Gruppe der Transformationen angibt, denen gegenüber sie invariant bleibt, soll in der vorliegenden Arbeit auf die im Sinne von Herrn Lebesgue verstandene Meßbarkeit von Punktmengen angewendet werden. Die Meßbarkeit ist eine Eigenschaft von großer Allgemeinheit, wie aus Sätzen wie denen, daß alle abgeschlossenen und alle offenen Punktmengen und Durchschnitte und Vereinigungsmengen endlich und abzählbar unendlich vieler meßbaren Mengen meßbar sind, hervorgeht. Daß ferner die Meßbarkeit nicht die Ausdehnung, sondern die Struktur der Punktmenge betrifft, erkennt man daran, daß man den Begriff der Meßbarkeit auch auf Mengen von unendlichem äußeren Maß übertragen kann, ohne daß die Sätze der erwähnten Art aufhören gültig zu sein.²⁾

Eine eineindeutige Abbildung, welche die meßbare Menge, in der sie definiert ist, und ihre sämtlichen meßbaren Teilmengen in meßbare Mengen überführt, möge meßbar heißen.³⁾ Von besonderem Interesse werden die stetigen meßbaren Abbildungen sein, da stetige Abbildungen ohnehin Struktureigenschaften wie Offenheit und Abgeschlossenheit von Punktmengen invariant lassen. Während wir für beliebige meßbare Abbildungen nur ein notwendiges Kriterium aufstellen werden, wird es uns gelingen, die Hinlänglichkeit dieses Kriteriums für stetige meßbare Abbildungen zu zeigen und überdies noch ein zweites notwendiges und hinreichendes Kriterium für diese Abbildungen aufzustellen, das sich besonders in der Theorie der Transformation Lebesguescher Integrale, die wir als Anwendung unserer Resultate behandeln werden, fruchtbar

¹⁾ Von der philosophischen Fakultät Göttingen angenommene Inaugural-Dissertation.

²⁾ Über diese Verallgemeinerung des Begriffs der Meßbarkeit siehe vor allem C. Carathéodory, Über das lineare Maß von Punktmengen (Nachrichten der Kön. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse 1914). In der dort gegebenen Definition der Meßbarkeit tritt das Maß der meßbaren Menge selbst gar nicht auf.

³⁾ Hiedurch wird allerdings den bisherigen zwei Bedeutungen des Wortes „meßbar“ („meßbare“ Punktmenge, „meßbare“ Funktion) noch eine dritte hinzugefügt, doch ist die Gefahr der Verwechslung dieser drei Bedeutungen wohl ebenso gering wie die der bisherigen zwei.

erweisen wird. Als Hilfsmittel für unsere Untersuchungen werden wir eine Reihe von Überdeckungssätzen nötig haben, die wir uns im ersten Kapitel verschaffen werden, wobei auch schon bekannte Sätze noch einmal im Zusammenhang abgeleitet werden sollen. Während der erste Teil dieser Arbeit eine allgemeine Theorie der meßbaren Abbildungen enthält, behandelt der zweite eingehender die meßbaren stetigen Abbildungen von Gebieten. Hierin wird die Lipschitzsche Bedingung in Zusammenhang mit den vorher entwickelten Sätzen gebracht und eine Verallgemeinerung eines für Abbildungen mit stetigen partiellen Ableitungen bekannten Satzes aus der Transformationstheorie der Doppelintegrale bewiesen werden.

Erster Teil.

Allgemeine Theorie der meßbaren Abbildungen.

1. Überdeckungssätze.

1. Die Grundlage unserer Beweise wird der folgende Satz von Vitali in der Verallgemeinerung von Lebesgue bilden.¹⁾

Satz I. Ist A eine Menge von endlichem äußeren Maße $\overline{m}A$, deren jedem Punkte P eine Folge abgeschlossener Mengen $\sigma_n(P)$ von der Beschaffenheit zugeordnet ist,²⁾ daß es um P als Mittelpunkt zu jedem n einen Kreis $k_n(P)$ gibt, der $\sigma_n(P)$ enthält, so daß

$$\frac{m \sigma_n(P)}{m k_n(P)} > \vartheta > 0 \quad (1)$$

ist, wo ϑ eine feste von P unabhängige Zahl ist,³⁾ und daß bei jedem P die Radien der zugeordneten Kreise $k_n(P)$ gegen Null konvergieren, so läßt sich A mit endlich oder abzählbar unendlich vielen der $\sigma(P)$ derart überdecken, daß

- a) je zwei dieser $\sigma(P)$ keinen gemeinsamen Punkt haben,
- b) die Vereinigungsmenge S der $\sigma(P)$ die Menge A bis auf eine Nullmenge überdeckt: $m(A - SA) = 0$,⁴⁾
- c) das Maß von S das äußere Maß von A um beliebig wenig übertrifft: $mS < \overline{m}A + \varepsilon$ zu beliebig vorgeschriebenem positiven ε .

¹⁾ Vitali, Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, Vol. 43, 1907/08. — Lebesgue, Sur l'Intégration des Fonctions Discontinues. Annales de l'Ecole Normale Supérieure 1910 (3), T. 27, p. 361—450. In der hier gegebenen Gestalt ist der Satz zuerst von Herrn Prof. Carathéodory in seiner Vorlesung über reelle Funktionen (Göttingen S. S. 1914) ausgesprochen und bewiesen worden.

²⁾ $\sigma_n(P)$ braucht P nicht zu enthalten.

³⁾ Der Satz kann übrigens auf $\vartheta = \vartheta(P) > 0$ erweitert werden.

⁴⁾ Den Durchschnitt mehrerer Mengen schreiben wir formal als Produkt.

Beweis: Ist A eine Nullmenge, so ist nichts zu beweisen. Wir nehmen also an, A sei keine Nullmenge. Es gibt eine offene Punktmenge E , die A enthält, so daß

$$m E < \bar{m} A + \varepsilon \quad (2)$$

ist, wo ε die Zahl der Bedingung c bedeutet. Dann wähle ich für jedes P in A dasjenige $\sigma_n(P)$ aus — es möge kurz mit $\sigma(P)$ bezeichnet werden —, dessen zugehöriger Kreis $k_n(P)$ der größte ganz in E gelegene Kreis der Folge $k_n(P)$ ist, dessen Radius kleiner als 1 ist. Mit diesen $\sigma(P)$ soll zunächst allein operiert werden. Der zu $\sigma(P)$ gehörende Kreis werde mit $k(P)$ und der zu $k(P)$ konzentrische Kreis von dreimal so großem Radius mit $K(P)$ bezeichnet. Wir zerlegen A in abzählbar viele Teilmengen. Es sei A_ν die Menge der Punkte P von A , deren Kreis $k(P)$ einen Radius r

$$\frac{1}{2^{\nu-1}} > r \geq \frac{1}{2^\nu} \quad (3)$$

hat, wo ν die Reihe der positiven ganzen Zahlen durchläuft. Da

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_\nu + \dots,$$

so ist nach einem Satze aus der Theorie der Meßbarkeit¹⁾

$$\bar{m} A = \lim_{\nu=\infty} \bar{m} (A_1 + \dots + A_\nu).$$

Es wird daher ein $\nu = \nu_1$ geben, so daß

$$\bar{m} (A_1 + \dots + A_{\nu_1}) > \frac{\bar{m} A}{2} \quad (4)$$

ist.

Wenn A_1 nicht leer ist, so wähle ich einen Punkt von A_1 , dem die Mengen $\sigma_1^{(1)}$, $k_1^{(1)}$ und $K_1^{(1)}$ zugeordnet sein mögen. Ist A_1 noch nicht ganz in $K_1^{(1)}$ enthalten, so nehme ich weiter einen Punkt von A_1 außerhalb $K_1^{(1)}$ mit den zugeordneten Mengen $\sigma_1^{(2)}$, $k_1^{(2)}$, $K_1^{(2)}$. Wegen der Festsetzung über die Radien von k und K und wegen (3) haben dann $k_1^{(1)}$ und $k_1^{(2)}$ keinen Punkt gemeinsam; a fortiori gilt dies von $\sigma_1^{(1)}$ und $\sigma_1^{(2)}$. Wenn $K_1^{(1)} + K_1^{(2)}$ nicht schon ganz A_1 überdeckt, so wähle ich außerhalb von $K_1^{(1)}$ und $K_1^{(2)}$ einen Punkt von A_1 mit den Mengen $\sigma_1^{(3)}$, $k_1^{(3)}$, $K_1^{(3)}$. Dann haben $\sigma_1^{(1)}$, $\sigma_1^{(2)}$, $\sigma_1^{(3)}$ zu je zweien keinen gemeinsamen Punkt. Dieses Verfahren der Bestimmung von $\sigma_1^{(i)}$, $k_1^{(i)}$, $K_1^{(i)}$ setze ich fort. Es muß nach einer endlichen Anzahl von Schritten abbrechen, denn man hat zufolge von (1) und (3)

$$\sum_i m \sigma_1^{(i)} > \sum_i m k_1^{(i)} \geq \vartheta \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \pi \sum_i 1,$$

¹⁾ Siehe z. B. Carathéodory, Über das lineare Maß, Satz 13.

und andererseits, da die $\sigma_i^{(i)}$ im Innern von E liegen und zu je zweien keinen gemeinsamen Punkt haben,

$$\sum_i m \sigma_1^{(i)} \leq m E,$$

so daß die Anzahl der nach dem angegebenen Verfahren bestimmten Punkte kleiner als

$$\frac{4}{9\pi} m E$$

ist. Es sei V_1 die Vereinigungsmenge der $K_1^{(i)}$ und

$$A'_2 = A_2 - A_2 V_1.$$

Dann kann man zu A'_2 ebenso endlich viele $\sigma_2^{(i)}$, $k_2^{(i)}$, $K_2^{(i)}$ bestimmen, so daß die Vereinigungsmenge der $K_2^{(i)}$ ganz A'_2 überdeckt und daß die $\sigma_2^{(i)}$ untereinander keine gemeinsamen Punkte haben. Da ferner die Radien der $K_2^{(i)}$ kleiner als die der $K_1^{(i)}$ sind, so hat kein k_1 mit einem k_2 und also auch kein σ_1 mit einem σ_2 einen Punkt gemeinsam. Es sei V_2 die Vereinigungsmenge der $K_1^{(i)}$ und der $K_2^{(i)}$. Wir setzen dann

$$A'_3 = A_3 - A_3 V_2$$

und behandeln A'_3 auf dieselbe Weise. So fahren wir fort bis einschließlich

$$A'_{r_1} = A_{r_1} - A_{r_1} V_{r_1-1}.$$

Dann ist die Menge

$$B_1 = A_1 + \dots + A_{r_1}$$

durch die Vereinigungsmenge V_{r_1} der $K_1^{(i)}$, $\dots$, $K_{r_1}^{(i)}$ ganz überdeckt. S_1 sei die Vereinigungsmenge der (endlich vielen) $\sigma_1^{(i)}$, $\dots$, $\sigma_{r_1}^{(i)}$, die sämtlich getrennt liegen. Dann ist

$$\begin{aligned} m S_1 &= \sum_{i, v} m \sigma_v^{(i)} > 9 \sum_{i, v} m k_v^{(i)} = \\ &= \frac{9}{9} \sum_{i, v} m K_v^{(i)} \geq \frac{9}{9} m V_{r_1} \geq \frac{9}{9} \overline{m} B_1 > \frac{9}{18} \overline{m} A. \end{aligned}$$

Wir schätzen nun die nicht überdeckte Restmenge $A - S_1 A$ ab. Da

$$A \prec E, \quad S_1 \prec E,$$

so ist

$$A - S_1 A \prec E - S_1 E = E - S_1,$$

und da E und S_1 meßbar und von endlichem Maße sind, so ist

$$\overline{m}(A - S_1 A) \leq m E - m S_1 < \overline{m} A + \varepsilon - \frac{\vartheta}{18} \overline{m} A. \quad (5)$$

Nun denken wir uns von vornherein

$$\varepsilon \leq \frac{\vartheta}{36} \overline{m} A \quad (6)$$

gewählt, so daß, wenn wir mit λ den echten Bruch $1 - \frac{\vartheta}{36}$ bezeichnen, (5) übergeht in

$$\overline{m}(A - S_1 A) < \lambda \cdot \overline{m} A. \quad (7)$$

Wir haben also einen Bruchteil von A überdeckt. Dieses Verfahren wenden wir nun auf $A^{(1)} = (A - S_1 A)$ an. Die Menge S_1 ist abgeschlossen, da sie aus endlich vielen abgeschlossenen Mengen σ zusammengesetzt ist. Also liegt $A^{(1)}$ in der offenen Punktmenge $E - S_1$. Nun konstruieren wir (wenn nicht schon $\overline{m} A^{(1)} = 0$ ist, in welchem Falle unser Satz bewiesen wäre) eine offene Punktmenge $E^{(1)}$, die $A^{(1)}$ enthält und die analog zu (2) und (6) die Ungleichung

$$m E^{(1)} < \overline{m} A^{(1)} + \frac{\vartheta}{36} \overline{m} A^{(1)}$$

erfüllt. Es sei

$$E_*^{(1)} = E^{(1)} (E - S_1), \quad (8)$$

dann ist auch $E_*^{(1)}$ eine offene Punktmenge, und es ist

$$m E_*^{(1)} < \left(1 + \frac{\vartheta}{36}\right) \overline{m} A^{(1)}, \quad (9)$$

und überdies ist $E_*^{(1)}$ eine Teilmenge von E . Ordnen wir jetzt jedem Punkt P von $A^{(1)}$ dasjenige $\sigma_n(P)$ zu, dessen Kreis $k_n(P)$ der größte ganz in $E_*^{(1)}$ gelegene Kreis der Folge $k_n(P)$ mit einem Radius kleiner als 1 ist, so können wir A_1 zu dem Bruchteil λ mit endlich vielen getrennt liegenden dieser σ überdecken, d. h. wenn S_2 die Vereinigungsmenge dieser σ ist, so ist

$$\overline{m}(A^{(1)} - S_2 A^{(1)}) < \lambda \cdot \overline{m} A^{(1)}. \quad (10)$$

Da alle σ von S_2 wegen (8) in $E - S_1$ liegen, so hat kein σ von S_1 mit einem von S_2 einen Punkt gemeinsam, also liegen die σ von $S_1 + S_2$ sämtlich getrennt.

Nun ist

$$A^{(1)} - S_2 A^{(1)} = (A - S_1 A) - S_2 (A - S_1 A) = A - A(S_1 + S_2),$$

also kann man, wenn man (7) heranzieht, (10) auch schreiben:

$$\overline{m}(A - A(S_1 + S_2)) < \lambda^2 \overline{m} A.$$

Auf $A^{(2)} = A - A(S_1 + S_2)$ wenden wir nun dasselbe Verfahren an und so weiter auf jede bei der Fortsetzung dieses Verfahrens auftretende Restmenge. Entweder tritt einmal eine Restmenge vom Maße Null auf, womit die geforderte Überdeckung geleistet wäre, oder aber das Verfahren bricht nicht ab. Im letzteren Falle mögen sukzessiv die abgeschlossenen Mengen

$$S_1, S_2, S_3 \dots$$

bestimmt werden, und es sei

$$S = S_1 + S_2 + S_3 \dots$$

Dann ist

$$\overline{m}(A - AS) \leq \overline{m}(A - A(S_1 + \dots + S_p)) < \lambda^p \overline{m} A$$

für jedes p , woraus

$$\overline{m}(A - AS) = 0$$

folgt. Die Forderung b ist also erfüllt. Daß ferner a erfüllt ist, folgt aus der Konstruktion der S_p , denn ein σ von S_p hat mit keinem σ der $S_1, S_2, \dots, S_{p-1}$ einen Punkt gemeinsam. Endlich befriedigt S auch die Forderung c , und zwar wegen

$$S \prec E.$$

Damit ist der Beweis geführt.

Anmerkung: Der Satz gilt auch, wenn die $\sigma_n(P)$ quadrierbare Punktmengen sind. Ist dann $\overline{\sigma}_n(P)$ die kleinste abgeschlossene Menge, die $\sigma_n(P)$ enthält, so kann man die Überdeckung mit abzählbar vielen der $\overline{\sigma}_n(P)$ ausführen. Die Überdeckung mit denselben Eigenschaften a, b, c wird dann aber auch durch die entsprechenden $\sigma_n(P)$ geleistet; denn diese liegen getrennt, weil die $\overline{\sigma}_n(P)$ getrennt liegen; da ferner

$$m(\overline{\sigma}_n(P) - \sigma_n(P)) = 0$$

sein soll, überdecken sie gleichfalls A bis auf eine Nullmenge und endlich ist die Vereinigungsmenge der $\sigma_n(P)$ eine Teilmenge der Vereinigungsmenge der $\overline{\sigma}_n(P)$; wenn also diese c erfüllt, so tut es jene erst recht.

Die R_1 sind von den $k_1(P)$ völlig überdeckt. Da alle $k(P)$ in E liegen, so liegen also auch die $R_1(P)$ ganz in E . Alle Punkte von A_1 liegen ferner in den R_1 ; folglich ist auch A_1 ganz von den $k_1(P)$ überdeckt.

Die Netzeinteilung der Ebene soll jetzt festgehalten werden, aber durch Hinzufügung neuer Geraden sollen die Netzquadrate auf die Hälfte ihrer Seitenlänge gebracht werden. Die von den $k_1(P)$ schon einschließlich ihres Randes überdeckten Quadrate bleiben außer Betracht. Unter den übrigen Quadraten (sie haben die Seitenlänge $\frac{1}{2^3}$) suche ich diejenigen Quadrate R_2 aus, in deren Innerm oder auf deren Rande Punkte von A_2 liegen. Jedes R_2 läßt sich dann mit einem Kreise $k_2(P)$, der einem Punkte von A_2 zukommt, überdecken, und wegen (2) gilt wieder

$$m k_2(P) < 60 m R_2.$$

Hiemit sind auch alle Punkte von A_2 überdeckt. So fahre ich durch Verfeinerung der Netzeinteilung fort. Nach abzählbar vielen Schritten ist A ganz mit abzählbar vielen Kreisen $k_\nu(P)$ überdeckt und es ist

$$\Sigma m k_\nu(P) < 60 \Sigma m R_\nu,$$

wo die Summen über alle ν und über die zu jedem ν gehörenden verschiedenen k und R zu erstrecken sind. Nun liegen aber alle $R_\nu(P)$ getrennt oder haben höchstens ihre Seiten, d. h. eine Nullmenge, gemeinsam. Also kann man schreiben

$$\Sigma m k_\nu(P) < 60 m (\Sigma R_\nu(P)).$$

Da aber jedes $R_\nu(P)$ in E liegt, so ist

$$m (\Sigma R_\nu(P)) \leq m E,$$

also schließlich

$$\Sigma m k_\nu(P) < 60 m E < 60 (\overline{m} A + \varepsilon),$$

was bewiesen werden sollte.

Satz II. Ist A eine Menge von endlichem äußeren Maße $\overline{m} A$, deren jedem Punkte P eine Folge von Kreisen mit P als Mittelpunkt und mit gegen Null konvergierenden Radien zugeordnet ist, so läßt sich A mit abzählbar vielen dieser Kreise restlos so überdecken, daß die Summe ihrer Maße kleiner als $\overline{m} A + \delta$ ist, wo δ eine beliebige positive Zahl ist.

Beweis: Nach der Anmerkung zu Satz I kann man, da Kreise quadrierbare offene Punktmengen sind, die Menge mit abzählbar vielen getrennt liegenden Kreisen bis auf eine Null-

menge Z derartig überdecken, daß das Maß ihrer Vereinigungsmenge, d. h. also hier die Summe ihrer Maße, kleiner als $\overline{m} A + \frac{\delta}{2}$ ist. Die Nullmenge Z überdecke ich nun nach dem Hilfssatz völlig durch weitere Kreise, indem ich das ε des Hilfssatzes gleich $\frac{\delta}{120}$ wähle. Dann ist A durch abzählbar viele der Kreise völlig überdeckt, und die Summe der Maße dieser Kreise ist kleiner als

$$\overline{m} A + \frac{\delta}{2} + 60 \left(\overline{m} Z + \frac{\delta}{120} \right) = \overline{m} A + \delta.$$

Anmerkung: Satz I und II gelten unverändert auch für den k -dimensionalen Raum, wenn man den Begriff „Kreis“ durch den Begriff „ k -dimensionale Kugel“ ersetzt. Der im Beweise von Satz I auftretende Zahlenfaktor $\frac{1}{9}$ ist dann nur durch $\frac{1}{3^k}$ zu ersetzen. Für den Beweis des Hilfssatzes muß man eine Würfelseinteilung des k -dimensionalen Raumes vornehmen; die einzige Änderung wird dann darin bestehen, daß der Zahlenfaktor 60 durch einen anderen ersetzt wird.

3. Satz III.¹⁾ Ist A eine Menge von endlichem äußeren Maße $\overline{m} A$, deren jedem Punkte P eine Folge meßbarer Mengen $s_n(P)$ von der Beschaffenheit zugeordnet ist, daß es um P als Mittelpunkt zu jedem n einen Kreis $k_n(P)$ gibt, der $s_n(P)$ enthält, so daß

$$\frac{m s_n(P)}{m k_n(P)} > \vartheta > 0$$

ist, wo ϑ eine feste von P unabhängige Zahl ist, und daß bei jedem P die Radien der zugeordneten Kreise $k_n(P)$ gegen Null konvergieren, so läßt sich A mit endlich oder abzählbar unendlich vielen der $s_n(P)$ bis auf eine Nullmenge überdecken.

Beweis: In jeder meßbaren Menge mit von Null verschiedenem Maß gibt es eine perfekte Teilmenge mit mindestens halb so großem Maß. Also gibt es in jedem $s_n(P)$ ein abgeschlossenes $\sigma_n(P)$, so daß

$$m \sigma_n(P) > \frac{1}{2} m s_n(P),$$

also

$$\frac{m \sigma_n(P)}{m k_n(P)} > \frac{\vartheta}{2} > 0.$$

¹⁾ Siehe Lebesgue, Sur l'Intégration des Fonctions Discontinues, p. 394.

ist. Mit abzählbar vielen der $\sigma_n(P)$ kann man aber nach dem Vitalischen Satz die Menge A bis auf eine Nullmenge überdecken. Die zu diesen ausgewählten $\sigma_n(P)$ gehörenden $s_n(P)$ überdecken also erst recht A bis auf eine Nullmenge.

4. Der nächste Satz bedarf einiger Vorbemerkungen. Es sei A eine meßbare Punktmenge und $K(P; x)$ der Kreis mit dem Radius x um den beliebigen Punkt P . Wir setzen $A \cdot K(P; x) = A(P; x)$ und bilden

$$v(P; a) = \text{obere Genze } \frac{m A(P; x)}{m K(P; x)} \quad 0 < x \leq a \quad (1)$$

und daraus

$$\bar{d}(P) = \text{untere Grenze } v(P; a) \quad a > 0. \quad (2)$$

Wir nennen $\bar{d}(P)$ die obere Dichte der Menge A im Punkte P . Es ist stets

$$0 \leq \bar{d}(P) \leq 1, \quad (3)$$

da

$$0 \leq \frac{m A(P; x)}{m K(P; x)} \leq 1$$

ist. Man kann nun zu jedem P eine monoton gegen Null konvergierende Folge positiver Zahlen $b_1, b_2, b_3, \dots$ finden, so daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m A(P; b_n)}{m K(P; b_n)} = \bar{d}(P) \quad (4)$$

ist. Nach (2) muß es nämlich ein $a_1 < \frac{1}{2}$ geben, so daß

$$v(P; a_1) < \bar{d}(P) + \frac{1}{2}$$

ist und wegen (1) ein $b_1 \leq a_1$, so daß

$$\bar{d}(P) - \frac{1}{2} < \frac{m A(P; b_1)}{m K(P; b_1)} < \bar{d}(P) + \frac{1}{2}$$

ist. Ebenso wird es ein a_2 geben, so daß

$$v(P; a_2) < \bar{d}(P) + \frac{1}{2^2}$$

ist, wo man außerdem $a_2 < b_1$ und zugleich $a_2 < \frac{1}{2^2}$ vorschreiben kann, da $v(P; a)$ seiner Definition gemäß mit abnehmendem a monoton abnimmt. Also gibt es wieder ein $b_2 \leq a_2 < \frac{1}{2^2}$, so daß

$$\bar{d}(P) - \frac{1}{2^2} < \frac{m A(P; b_2)}{m K(P; b_2)} < \bar{d}(P) + \frac{1}{2^2}$$

ist. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens findet man eine monoton abnehmende Folge positiver Zahlen $b_1, b_2, \dots$, die wegen

$$b_n < \frac{1}{2^n}$$

gegen Null strebt, von der verlangten Eigenschaft. Ganz analog kann man eine untere Dichte $\underline{d}(P)$ durch

$$w(P; a) = \text{untere Grenze } \frac{mA(P; x)}{mK(P; x)} \quad 0 < x \leq a$$

$$\underline{d}(P) = \text{obere Grenze } w(P; a) \quad a > 0$$

definieren. Wegen

$$0 \leq w(P; a) \leq v(P; a)$$

hat man

$$0 \leq \underline{d}(P) \leq \bar{d}(P) \leq 1,$$

und man beweist, dem Vorhergehenden entsprechend, daß es zu jedem P eine gegen Null konvergierende Folge positiver Zahlen $c_1, c_2, \dots$ gibt, so daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{mA(P; c_n)}{mK(P; c_n)} = \underline{d}(P) \quad (5)$$

ist.

Satz IV. Ist A eine meßbare Menge, so ist diejenige Teilmenge B von A , in der die untere Dichte $\underline{d}(P)$ kleiner als 1 ist, eine Menge vom Maße Null.¹⁾

Beweis: Es sei zunächst A von endlichem Maße und B_n die Teilmenge von A , in der

$$\underline{d}(P) \leq 1 - \frac{1}{n}$$

ist. Dann gibt es wegen (5) um jeden Punkt P von B_n eine Folge von Kreisen $K_\nu(P)$ mit P als Mittelpunkt und mit gegen Null konvergierenden Radien, so daß für alle ν

$$\frac{m(A \cdot K_\nu(P))}{mK_\nu(P)} < 1 - \frac{1}{2n} \quad (6)$$

ist. Nach dem Vitalischen Satze kann man nun B_n , da es ein endliches äußeres Maß besitzt, mit abzählbar vielen getrennt liegenden dieser Kreise bis auf eine Nullmenge so überdecken, daß,

¹⁾ Vgl. Lebesgue, Sur l'Intégration des Fonctions Discontinues, p. 406, 407, wo dieser Satz für eindimensionale Mengen bewiesen wird.

wenn $K^{(n)}$ die Vereinigungsmenge dieser Kreise und ε eine beliebige positive Zahl ist,

$$m K^{(n)} < \overline{m} B_n + \varepsilon$$

ist. Dann ist ferner

$$\overline{m} B_n = \overline{m} (B_n \cdot K^{(n)}) \leq m (A \cdot K^{(n)}),$$

und da wegen (6)

$$m (A \cdot K^{(n)}) < \left(1 - \frac{1}{2n}\right) m K^{(n)}$$

ist, so folgt

$$\overline{m} B_n < \left(1 - \frac{1}{2n}\right) (\overline{m} B_n + \varepsilon),$$

$$\frac{1}{2n} \overline{m} B_n < \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2n}\right) < \varepsilon,$$

woraus man auf

$$\overline{m} B_n = 0$$

schließt. Da aber B die Vereinigungsmenge aller B_n für $n = 1, 2, 3 \dots$ ist, so ist auch

$$m B = 0.$$

Ist endlich A von unendlichem Maß, so bilden wir die Durchschnitte

$$A \cdot K(r),$$

wo $K(r)$ den Kreis mit dem Radius r um einen festen Punkt der Ebene bedeuten möge. Wenn man $K(r)$ ohne Rand rechnet, so ist die Dichte in jedem Punkte P von $A \cdot K(r)$ gleich der desselben Punktes in A , da ein hinreichend kleiner Kreis um P ganz in $K(r)$ liegt. In $A \cdot K(r)$ ist die untere Dichte nach dem schon Bewiesenen höchstens in einer Nullmenge $B(r)$ kleiner als 1. Da aber

$$B = B(1) + B(2) + \dots \text{ ad inf.}$$

ist, so ist auch hier

$$m B = 0.$$

5. Satz V. Jede Menge läßt sich durch abzählbar viele Mengen, die aus einer meßbaren Menge mit von Null verschiedenem Maße nur durch Translation hervorgehen, bis auf eine Nullmenge überdecken.

Beweis: Es sei A die zu überdeckende Menge und zunächst $\overline{m} A$ endlich. M sei eine meßbare Menge mit von Null verschiedenem Maß. In M gibt es nach Satz IV gewiß einen Punkt P^*

und zu ihm eine Folge von Kreisen $K_n(P^*)$ mit P^* als Mittelpunkt und mit gegen Null konvergierenden Radien, so daß für jedes n

$$\frac{m(M \cdot K_n(P^*))}{m K_n(P^*)} > \frac{1}{2}$$

ist. Jedem Punkte P von A ordne ich nun eine Folge von Kreisen $K_n(P)$ und darin enthaltenen meßbaren Mengen $s_n(P)$ zu, die aus $K_n(P^*)$ bzw. aus $s_n(P^*) = M \cdot K_n(P^*)$ durch diejenige Translation hervorgehen, die P^* in P überführt. Die somit jedem P von A zugeordneten meßbaren Mengen $s_n(P)$ genügen den Bedingungen von Satz III. Also läßt sich A mit abzählbar vielen der $s_n(P)$ bis auf eine Nullmenge überdecken. Die $s_n(P)$ sind aber nur Teilmengen der aus M durch die Translationen hervorgehenden Mengen. Also läßt sich A erst recht durch abzählbar viele aus M nur durch Translation hervorgehende Mengen bis auf eine Nullmenge überdecken.

Ist A von unendlichem äußeren Maße, so kann man A als Vereinigungsmenge abzählbar vieler beschränkter Mengen auffassen, deren jede sich, wie schon bewiesen, bis auf eine Nullmenge in der geforderten Weise überdecken läßt. Also gilt der Satz auch für Mengen A mit beliebigem äußeren Maß.

2. Ein notwendiges Kriterium für die Meßbarkeit von Abbildungen.

6. Wenn es keine nicht-meßbaren Mengen gäbe, so wäre unser Problem erledigt, da dann jede beliebige Abbildung meßbar wäre. Wir setzen dagegen die Existenz nicht-meßbarer Mengen voraus, und in der Tat kann man ja auch unter Zugrundelegung einer Wohlordnung des Kontinuums nicht-meßbare Mengen konstruieren.¹⁾ Unter dieser Voraussetzung beweisen wir folgenden Satz, von dem alle unsere weiteren Überlegungen ausgehen werden:

Satz VI. Jede meßbare Menge mit von Null verschiedenem Maße besitzt eine nicht-meßbare Teilmenge.

Beweis: Es sei A eine meßbare Menge und $m A > 0$; N sei eine nicht-meßbare Menge. Dann kann man nach Satz V die Menge N mit abzählbar vielen aus A durch Translation hervorgehenden Mengen A_n bis auf eine Nullmenge überdecken. Unter den Durchschnitten $N A_n$ muß nun mindestens eine nicht-meßbare Menge enthalten sein. Die Vereinigungsmenge aller $N A_n$ stellt nämlich, bis auf eine Nullmenge, die Menge N dar. Wäre nun jeder dieser Durchschnitte $N A_n$ meßbar, so wäre es auch ihre Vereinigungsmenge und also auch die durch Hinzufügung einer

¹⁾ Siehe z. B. Schönflies, Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen. Erste Hälfte (Leipzig, Teubner, 1913), p. 374–378. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre (Leipzig, Veit, 1914), p. 401.

Nullmenge daraus hervorgehende Menge N . — Anstatt nun A so zu verschieben, daß der Durchschnitt von A mit N nicht-meßbar ist, kann man umgekehrt A festhalten und N der entgegengesetzten Translation unterwerfen. Auf diese Weise erhält man eine nicht-meßbare Teilmenge von A .

7. Damit bei der eindeutigen Abbildung einer meßbaren Menge A die Meßbarkeit sämtlicher meßbaren Teilmengen von A erhalten bleibt, darf offenbar keine Nullmenge auf eine nicht-meßbare Menge abgebildet werden. Gibt es bei $m A \neq 0$ eine solche Nullmenge Z , so wird übrigens nicht nur diese, sondern es werden auch meßbare Teilmengen von A mit von Null verschiedenem Maße auf nicht-meßbare Mengen abgebildet. Man braucht nämlich nur eine meßbare Teilmenge B von A zu wählen, so daß $m B \neq 0$ und ferner BZ leer ist. Entweder ist das Bild von B schon eine nicht-meßbare Menge, oder wenn es meßbar ist, so ist das Bild der meßbaren Menge $B + Z$ nicht-meßbar, da die Vereinigungsmenge einer meßbaren und einer nicht-meßbaren Menge, die keine gemeinsamen Punkte besitzen, nicht-meßbar ist.

Wird nun eine Nullmenge Y auf eine meßbare Menge mit von Null verschiedenem Maße abgebildet, so gibt es nach Satz VI stets eine nicht-meßbare Teilmenge dieser letzteren, die aber das Bild einer Teilmenge von Y , also einer Nullmenge, ist. Dann kann also die Abbildung nicht meßbar sein. Wir haben daher folgenden Satz gewonnen:

Satz VII. Damit eine Abbildung meßbar ist, ist notwendig, daß sie jede Nullmenge in eine Nullmenge überführt.

8. Es gibt eindeutige und stetige Abbildungen, die dieser Bedingung nicht genügen, wie folgendes einfache Beispiel zeigt: In dem abgeschlossenen eindimensionalen Intervall J liege die perfekte nirgends dichte Menge P , in dem abgeschlossenen Intervall J' die perfekte nirgends dichte Menge P' . Die Endpunkte von J und J' seien Punkte von P bzw. P' . Die abzählbar vielen Teilintervalle von J und J' , die keinen Punkt von P und P' enthalten, mögen kurz die „punktfreien“ Intervalle heißen. Dann werde das größte punktfreie Intervall J_1 von J (oder, um Eindeutigkeit zu erzielen, von mehreren gleich großen das am weitesten links gelegene) linear auf das größte punktfreie Intervall J'_1 von J' abgebildet. Darauf werde das zweitgrößte punktfreie Intervall J_2 von J auf das größte derjenigen punktfreien Intervalle von J' linear abgebildet, die auf derselben Seite von J'_1 liegen wie J_2 zu J_1 liegt. Das so bestimmte Bild von J_2 heiße J'_2 . Ebenso soll das lineare Bild J'_3 des drittgrößten Intervalls J_3 von J das größte derjenigen Intervalle von J' sein, die in bezug auf J'_1 und J'_2 ebenso liegen wie J_3 in bezug auf J_1 und J_2 . So werden sukzessiv alle punktfreien Intervalle von J linear auf die von J' abgebildet, und zwar sind die einander entsprechenden Intervalle in J und J' gleich an-

geordnet. Werden dann noch die Häufungspunkte entsprechender Intervalle¹⁾ einander zugeordnet, so ist, da die Punkte der perfekten nirgends dichten Mengen entweder Endpunkte der punktfreien Intervalle oder Häufungspunkte davon sind, J auf J' eineindeutig abgebildet, und zwar ist diese Abbildung, wie aus der Konstruktion unmittelbar hervorgeht, stetig. Ist nun noch $mP = 0$ und $mP' > 0$, so geht bei dieser Abbildung eine Nullmenge in eine Menge mit von Null verschiedenem Maße über, also werden meßbare auf nicht-meßbare Mengen abgebildet.²⁾

9. Daß die in Satz VII aufgestellte Bedingung nicht hinreichend ist, geht aus folgendem Beispiel hervor:

Das lineare Intervall³⁾ I von 0 bis 1 werde linear auf das kongruente Intervall I' abgebildet. Ich zerlege nun I' in zwei nicht-meßbare Teilmengen N_1 und N_2 (was nach Satz VI stets möglich ist) und führe für die Punkte von N_2 die Transformation $\bar{x} = x + 1$ durch; N_2 gehe dadurch in $\bar{N}_2$ über. $N_1 + \bar{N}_2$ ist eine nicht-meßbare Punktmenge, da sie von einer meßbaren Menge in einer nicht-meßbaren geschnitten wird, z. B. von I' in $\bar{N}_1$. I ist jetzt durch die zusammengesetzte Transformation auf die nicht-meßbare Menge $N_1 + \bar{N}_2$ derartig abgebildet, daß jeder Nullmenge eine Nullmenge entspricht. Denn durch die erste Transformation wird eine Nullmenge Z von I auf die kongruente Nullmenge Z' abgebildet und durch die zweite Transformation wird Z' auf die Nullmenge $Z'N_1 + \bar{Z}'N_2$ abgebildet, wenn $\bar{Z}'$ die aus Z' durch die Transformation $\bar{x} = x + 1$ hervorgehende Nullmenge bedeutet.

Durch eine kleine Ergänzung dieser Konstruktion kann man es übrigens erreichen, daß eine meßbare Menge auf eine meßbare Menge so abgebildet wird, daß Nullmengen in Nullmengen übergehen und dennoch gewissen meßbaren Teilmengen nicht-meßbare entsprechen. Die Komplementärmenge von $N_1 + \bar{N}_2$ im Intervall J' von 0 bis 2 besteht nämlich erstens aus dem Punkt 1 und zweitens aus der Menge $N_2 + \bar{N}_1$, wo $\bar{N}_1$ durch die Verschiebung $\bar{x} = x + 1$ aus N_1 hervorgeht. Nun kann ich aber das Intervall von 1 bis 2 auf die nicht-meßbare Menge $N_2 + \bar{N}_1$ (ebenso wie vorhin das Intervall 0 bis 1 auf $N_1 + \bar{N}_2$) abbilden, so daß Nullmengen in Nullmengen übergehen. Ordne ich nun noch den Punkt 1 sich selber zu, so ist das Intervall J von 0 bis 2 so auf das kongruente In-

¹⁾ Ein Punkt ist Häufungspunkt einer Menge von Intervallen, wenn jede seiner Umgebungen mindestens eines dieser Intervalle ganz enthält.

²⁾ Wenn also Herr Lebesgue in seiner Arbeit „Sur l'Intégration des Fonctions Discontinues“ p. 448 folgendermaßen schließt: „Soient E_x, E_y deux ensembles correspondants; supposons E_x mesurable; E_y l'est à cause de la continuité des formules de transformation“, so ist, wie unser Beispiel zeigt, dieser Schluß nicht einwandfrei.

³⁾ Ein Intervall wird hier und im folgenden, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt ist, ohne Rand, also als offene Punktmenge betrachtet.

tervall J' abgebildet, daß jeder Nullmenge eine Nullmenge entspricht, gewisse meßbare Teilmengen aber (z. B. die Intervalle 0 bis 1 und 1 bis 2) auf nicht-meßbare Teilmengen abgebildet werden. — Daß diese Abbildung nicht stetig ist, bedarf kaum der Erwähnung.

3. Hinlänglichkeit des Kriteriums für die Meßbarkeit stetiger Abbildungen.

10. Es soll nun gezeigt werden, daß für stetige Abbildungen die Bedingung von Satz VII hinreicht für die Erhaltung der Meßbarkeit aller abgebildeten meßbaren Mengen. Zunächst einige Vorbemerkungen über die Stetigkeit von Abbildungen.

Eine eindeutige Abbildung der Punktmenge A auf die Menge A' soll stetig in A heißen, wenn folgendes gilt: Ist P_0 ein Häufungspunkt von A , der in A enthalten ist, und ist $P_1, P_2, P_3, \dots$ eine Folge von in A enthaltenen Punkten, die gegen P_0 konvergieren, so konvergiert stets die Bildfolge $P'_1, P'_2, P'_3, \dots$ gegen das Bild P'_0 von P_0 . Über die Abbildung solcher konvergenten Punktfolgen, deren Häufungspunkt nicht in A liegt, soll nichts vorausgesetzt werden.

Aus dieser Definition folgt ohne weiteres, daß bei stetiger Abbildung jede abgeschlossene Teilmenge von A in eine abgeschlossene Teilmenge von A' übergeht.

Zwei weitere Eigenschaften stetiger Abbildungen sprechen wir in folgenden Sätzen aus:

Hilfssatz 1. Ist C' eine abgeschlossene Teilmenge des (abgeschlossenen) Bildes B' der abgeschlossenen Menge B , so ist C' das Bild einer abgeschlossenen Teilmenge C von B .

Beweis: C' ist das eindeutige Bild einer Menge $C \subset B$. Wäre C nicht abgeschlossen, so gäbe es in C eine konvergente Folge von Punkten $P_1, P_2, P_3, \dots$, die gegen einen nicht in C liegenden Punkt P_0 konvergierte. Da aber C Teilmenge der abgeschlossenen Menge B ist, so ist P_0 in B enthalten. Die Bilder $P'_1, P'_2, P'_3, \dots$ von $P_1, P_2, P_3, \dots$ sind Punkte von C' ; das Bild P'_0 von P_0 liegt dagegen nicht in C' , sondern in $(B' - C')$. Da C' abgeschlossen ist, so gibt es um jeden nicht zu dieser Menge gehörenden Punkt eine Umgebung, die keinen Punkt von C' enthält. Also kann P'_0 nicht Häufungspunkt von $P'_1, P'_2, P'_3, \dots$ sein, was der Stetigkeit der Abbildung widersprechen würde.

Hilfssatz 2. Ist E' eine offene Punktmenge und B diejenige Teilmenge von A , deren Bild $B' = E' A'$ ist, so gibt es eine offene Punktmenge E , so daß $B = EA$ ist.

Beweis: Ich schließe die Menge $(A - B)$ ab, d. h. ich füge zu ihr die Menge ihrer Häufungspunkte hinzu. Diese abgeschlossene Menge heiße C . Dann hat die Komplementärmenge E von C die behauptete Eigenschaft. Denn erstens ist die Komplementärmenge einer abgeschlossenen Menge offen. Zweitens enthält E keinen Punkt von $(A - B)$, da $(A - B)$ ganz in C enthalten ist, und drittens enthält E jeden Punkt von B . Sonst müßte nämlich C einen Punkt P von B enthalten, P also Häufungspunkt von $(A - B)$ sein. Dann müßte aber wegen der Stetigkeit der Abbildung das Bild P' von P auch Häufungspunkt von $(A' - B')$ sein. Dies ist aber unmöglich, da P' in E' liegt und jeder Punkt einer offenen Punktmenge einen von Null verschiedenen Abstand von ihrer Komplementärmenge hat.

11. In einer meßbaren Punktmenge A von endlichem Maße gibt es bekanntlich stets eine abgeschlossene Teilmenge, deren Maß von $m A$ um beliebig wenig übertroffen wird. Wir können also eine Folge von abgeschlossenen Mengen $C_1, C_2, C_3 \dots$ konstruieren, die sämtlich in A enthalten sind, so daß

$$m C_n > m A - \frac{1}{n}$$

ist. Bilden wir die Vereinigungsmenge C aller C_n , so ist C als Vereinigungsmenge abzählbar vieler meßbarer Mengen meßbar, und es ist

$$m C = m A, \quad (1)$$

denn einerseits ist wegen $C \prec A$:

$$m C \leq m A, \quad (2)$$

andererseits ist wegen $C_n \prec C$:

$$m C \geq m C_n > m A - \frac{1}{n},$$

und da dies für jedes n gilt, auch

$$m C \geq m A,$$

woraus mit (2) zusammen (1) folgt. Folglich ist:

$$m(A - C) = m A - m C = 0.$$

Eine meßbare Menge von endlichem Maße läßt sich also als Summe einer Nullmenge und einer Vereinigungsmenge abzählbar vieler abgeschlossener Mengen darstellen.

Um dieses Resultat auf eine meßbare Menge A von unendlichem Maße zu übertragen, überdecken wir diese mit abzählbar vielen Kreisen, so daß sie als Vereinigungsmenge abzählbar vieler meßbarer Mengen von endlichem Maße erscheint. Jede dieser ist aber die

Vereinigungsmenge einer Nullmenge und abzählbar vieler abgeschlossener Mengen von endlichem Maße. Also kann man A mit abzählbar vielen abgeschlossenen Teilmengen $C_1, C_2, C_3, \dots$ bis auf eine Nullmenge überdecken. Bilden wir nun noch die abgeschlossenen Mengen

$$B_n = C_1 + C_2 + \dots + C_n,$$

so ist

$$B_n \prec B_{n+1},$$

und die B_n sind auch von endlichem Maße. Damit haben wir den Hilfssatz erhalten:

Jede meßbare Menge ist die Summe einer Nullmenge und einer Vereinigungsmenge abzählbar vieler abgeschlossener Mengen, die ineinander geschachtelt sind und endliches Maß besitzen.

12. Nun ergibt sich leicht die Hinlänglichkeit unseres Kriteriums. Die meßbare Menge A werde auf die Menge A' stetig und unter Erhaltung der Nullmengen abgebildet. Ich konstruiere eine abzählbare Folge von abgeschlossenen Teilmengen $B_1, B_2, B_3, \dots$ von A , deren Vereinigungsmenge C sich von A nur um eine Nullmenge unterscheidet. Durch eine stetige Abbildung werden aber abgeschlossene Mengen in abgeschlossene Mengen übergeführt. Das Bild C' von C ist also als Vereinigungsmenge abzählbar vieler abgeschlossener Mengen meßbar. Nun ist $(A - C)$ höchstens eine Nullmenge. Da Nullmengen auf Nullmengen abgebildet werden sollen, so unterscheidet sich A' von C' höchstens um eine Nullmenge und ist daher meßbar. Was von der Abbildung von A gilt, gilt genau so von der Abbildung aller meßbaren Teilmengen von A . Damit haben wir folgendes Resultat erhalten:

Satz VIII. Damit eine eindeutige stetige Abbildung meßbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie jede Nullmenge in eine Nullmenge überführt.

13. Bei stetiger meßbarer Abbildung können wir auch Aussagen über die Bilder nicht-meßbarer Mengen machen. Dazu bedürfen wir einiger Hilfssätze.

Ist M irgend eine (meßbare oder nicht-meßbare) Menge von endlichem äußeren Maß, so gibt es bekanntlich stets eine meßbare Menge H , die M enthält, so daß

$$mH = \overline{m}M \quad (1)$$

ist. Nach einem Vorschlage von Herrn Zermelo möge H eine „maßgleiche Hülle von M “ genannt werden.

Ist E eine meßbare Menge, so ist EH maßgleiche Hülle von EM (wenn man die leere Menge als Nullmenge auffaßt).

Denn einerseits ist

$$EM \prec EH \quad (2)$$

und andererseits, wenn E' die (meßbare) Komplementärmenge von E bedeutet,

$$E' M \prec E' H. \quad (3)$$

Wegen einer Eigenschaft meßbarer Mengen ist nun

$$\overline{m} M = \overline{m} E M + \overline{m} E' M,$$

ferner

$$m H = m E H + m E' H,$$

also wegen (1)

$$\overline{m} E M + \overline{m} E' M = m E H + m E' H.$$

Mit dieser Gleichung sind aber die aus (2) und (3) folgenden Relationen

$$\overline{m} E M \leq m E H$$

$$\overline{m} E' M \leq m E' H$$

nur verträglich, wenn in ihnen nur das Gleichheitszeichen gilt, also

$$\overline{m} E M = m E H,$$

was bewiesen werden sollte.

Verhalten sich umgekehrt zwei Mengen S und T von endlichem äußeren Maße so zu einander, daß für jede beliebige meßbare Menge E von endlichem Maß SE eine maßgleiche Hülle von TE ist, so ist S maßgleiche Hülle von T . Denn zunächst ist S meßbar, da alle SE meßbar sein sollen. Wählt man nun für die Mengen E im besonderen eine Folge konzentrischer Quadrate $Q_1, Q_2, \dots$ mit den Seitenlängen $1, 2, \dots$, so soll

$$m(SQ_n) = \overline{m}(TQ_n)$$

sein. Da ferner

$$SQ_n \prec SQ_{n+1} \quad \text{und} \quad TQ_n \prec TQ_{n+1},$$

$$S = SQ_1 + SQ_2 + \dots, \quad T = TQ_1 + TQ_2 + \dots,$$

so ist nach bekannten Sätzen

$$\overline{m} T = \lim_{n=\infty} \overline{m}(TQ_n) = \lim_{n=\infty} m(SQ_n) = m S.$$

Überdies ist

$$T \prec S,$$

da

$$TQ_n \prec SQ_n$$

sein soll.

Hiernach können wir den Begriff der maßgleichen Hülle auf Mengen von beliebigem Maße ausdehnen, indem wir definieren: Die Menge H ist eine maßgleiche Hülle der Menge M , wenn für

jede meßbare Menge E von endlichem Maße HE eine maßgleiche Hülle von ME ist.

Wir müssen nur noch zeigen, daß es in diesem Sinne auch zu Mengen von unendlichem äußeren Maße maßgleiche Hüllen gibt. Es habe Q_n dieselbe Bedeutung wie vorhin, und H_n sei eine ganz in Q_n gelegene maßgleiche Hülle von $M_n = MQ_n$. Wir behaupten, daß

$$H = H_1 + H_2 + H_3 + \dots$$

eine maßgleiche Hülle von M ist. Zunächst ist nämlich:

$$M \prec H.$$

Nun ist auch die Menge

$$H_n^* = H_1 + H_2 + H_3 + \dots + H_n$$

eine maßgleiche Hülle von M_n . Für $n=1$ ist diese Behauptung trivial. Es sei nun H_n^* in der Tat maßgleiche Hülle von M_n , dann soll

$$H_{n+1}^* = H_n^* + H_{n+1}$$

maßgleiche Hülle von M_{n+1} sein. Das ist bewiesen, wenn man gezeigt hat, daß

$$H_n^* - H_n^* H_{n+1}$$

vom Maße Null ist. Nun ist nach dem schon Bewiesenen $H_n^* H_{n+1}$ eine maßgleiche Hülle von $M_n H_{n+1}$, also da

$$M_n \prec M_{n+1} \prec H_{n+1},$$

so ist $H_n^* H_{n+1}$ maßgleiche Hülle von M_n , also

$$m H_n^* = \overline{m} M_n = m (H_n^* H_{n+1})$$

$$m (H_n^* - H_n^* H_{n+1}) = 0.$$

Es ist wichtig, daß

$$H_1^* \prec H_2^* \prec \dots$$

ist. Nun sei E irgend eine meßbare Menge von endlichem Maße. Dann ist

$$EM = EM_1 + EM_2 + \dots$$

$$EH = EH_1^* + EH_2^* + \dots$$

Nach unserem Satz über maßgleiche Hüllen von endlichem Maße ist aber

$$\overline{m}(EM_n) = m(EH_n^*)$$

und wegen

$$EM_n \prec EM_{n+1}, \quad EH_n^* \prec EH_{n+1}^*$$

folgt

$$\overline{m}(EM) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{m}(EM_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (EH_n^*) = m(EH),$$

was bewiesen werden sollte.

Ähnliche Überlegungen wenden wir nun auf das innere Maß von Mengen an. Ist M eine nicht-meßbare Menge von endlichem äußeren Maß, so ist ihr äußeres Maß größer als ihr inneres Maß:

$$\overline{m}M > \underline{m}M.$$

Nun gibt es bekanntlich stets eine meßbare Teilmenge K von M , so daß

$$mK = \underline{m}M \quad (4)$$

ist. Die Menge $(M - K)$ kann keine Nullmenge sein, denn sonst wäre M meßbar; es ist also

$$\overline{m}(M - K) > 0.$$

Anderseits ist

$$\underline{m}(M - K) = 0,$$

denn sonst gäbe es in $(M - K)$ eine meßbare Teilmenge K_1 , so daß

$$mK_1 = \underline{m}(M - K) > 0$$

wäre. Da aber das innere Maß einer Menge gleich der oberen Grenze der Maße ihrer meßbaren Teilmengen ist, so wäre

$$\underline{m}M \geq \underline{m}(K + K_1) = mK + mK_1 > mK,$$

was (4) widerspricht. Wenn wir noch mit Herrn Zermelo nicht-meßbare Mengen mit innerem Nullmaß als „Minimalmengen“¹⁾ bezeichnen, so können wir also jede nicht-meßbare Menge von endlichem äußeren Maß in eine Minimalmenge und in eine meßbare Menge (deren Maß übrigens Null sein kann) zerlegen. Dies gilt aber auch für nicht-meßbare Mengen beliebigen äußeren Maßes. Denn es habe Q_n wieder die Bedeutung von vorhin. Dann sei MQ_n zerlegt in die meßbare Menge K_n und die Minimalmenge N_n , und es sei

$$K = K_1 + K_2 + \dots$$

$$N = M - K.$$

Dann ist K meßbar. Es wird behauptet, daß N eine Minimalmenge ist. Denn sonst gäbe es eine meßbare Teilmenge K^* von N , so daß

$$mK^* > 0$$

¹⁾ Siehe W. Alexandrow, Elementare Grundlagen der Theorie des Maßes. Dissertation, Zürich 1915.

wäre; also müßte es ein Q_n geben, so daß auch

$$m(Q_n K^*) > 0$$

wäre. Da aber K^* nicht in K enthalten ist, so auch nicht in K_n , also müßte $Q_n K^*$ in N_n enthalten sein, was aber der Eigenschaft von N_n als Minimalmenge widerspräche. Wir haben somit den Satz gewonnen:

Jede nicht-meßbare Menge ist die Summe einer Minimalmenge und einer meßbaren Menge, wobei das Maß der letzteren übrigens Null sein kann.

Wir definieren nun: Zwei Minimalmengen, die keine gemeinsamen Punkte haben und die sich zu einer meßbaren Menge ergänzen, mögen zueinander konjugiert heißen.

Wir behaupten: Die Summe M zweier konjugierten Mengen N_1 und N_2 ist maßgleiche Hülle von jeder der beiden konjugierten Mengen.

Es sei nämlich H_1 eine ganz in der meßbaren Menge M gelegene maßgleiche Hülle von N_1 . Wenn

$$m(M - H_1) = 0$$

ist, so ist offenbar auch M eine maßgleiche Hülle von N_1 . Nun kann aber nicht

$$m(M - H_1) > 0$$

sein, da $(M - H_1)$ meßbare Teilmenge der Minimalmenge N_2 ist. Aus dem somit bewiesenen Satz zieht man leicht die Folgerung, daß

$$\overline{m} N_1 = m(N_1 + N_2) = \overline{m} N_2$$

sein muß.

Wir behaupten ferner, daß es zu jeder Minimalmenge N_1 eine konjugierte Menge N_2 gibt.

Es sei nämlich M_1 eine maßgleiche Hülle von N_1 . Wir beweisen dann, daß $N_2 = M_1 - N_1$ eine Minimalmenge ist. Denn gäbe es eine meßbare Teilmenge K von N_2 , so daß

$$m K > 0$$

wäre, so müßte es auch eine meßbare Teilmenge K^* von K mit endlichem von Null verschiedenen Maß $m K^*$ geben. Für eine meßbare Menge E von endlichem Maße, die K^* enthält, wäre dann aber EM_1 nicht maßgleiche Hülle von EN_1 , denn es wäre

$$EM_1 - K^* \succ EN_1,$$

also

$$m(EM_1) > m(EM_1) - m K^* \geq \overline{m} EN_1.$$

14. Nach diesen Vorbereitungen aus der Theorie der Meßbarkeit behaupten wir nun:

Satz IX. Durch eine stetige meßbare Abbildung werden konjugierte Mengen entweder auf Nullmengen oder auf konjugierte Mengen abgebildet.

Beweis: Es seien die Mengen N_1 und N_2 zueinander konjugiert, und es sei

$$M = N_1 + N_2,$$

wo also M meßbar ist. Die Bilder dieser Mengen seien bezw. M', N'_1, N'_2 . Wenn M' eine Nullmenge ist, so werden N_1 und N_2 auf Nullmengen abgebildet. Nehmen wir an, M sei keine Nullmenge. Nun gibt es in M nach dem Hilfssatz von § 11 eine Folge ineinander geschachtelter abgeschlossener Teilmengen von endlichem Maße

$$A_1 \prec A_2 \prec A_3 \prec \dots,$$

so daß für ihre Vereinigungsmenge $A \prec M$

$$m(M - A) = 0 \quad (1)$$

gilt, wobei es gleichgültig ist, ob mM endlich oder unendlich ist. Die Bilder A'_n der A_n sind auch abgeschlossen und für die Vereinigungsmenge A' der A'_n gilt, da Nullmengen in Nullmengen übergeführt werden,

$$m(M' - A') = 0. \quad (2)$$

Hätte nun N'_1 ein von Null verschiedenes inneres Maß

$$\underline{m} N'_1 > \mu,$$

wo μ eine endliche positive Zahl ist ($\underline{m} N'_1$ kann endlich oder unendlich sein), so gäbe es eine steigende Folge ineinander geschachtelter abgeschlossener Teilmengen C'_n von N'_1 , so daß

$$m C' = \lim_{n=\infty} m C'_n = \underline{m} N'_1 > \mu > 0 \quad (3)$$

wäre, wo C' die Vereinigungsmenge aller C'_n ist. Dann wäre auch, wenn man noch die Menge $M' - A'$ mit R' bezeichnet,

$$m A' C' = m C' (M' - R') = m C' - m C' R'$$

und folglich nach (2) und (3)

$$m A' C' = m C' = \underline{m} N'_1 > \mu > 0. \quad (4)$$

Wegen

$$A'_n \prec A'_{n+1}, \quad C'_n \prec C'_{n+1} \quad (5)$$

ist aber

$$A' C' = A'_1 C'_1 + A'_2 C'_2 + \dots, \quad (6)$$

denn jeder Punkt von $A'_n C'_n$ ist in A'_n und in C'_n , also in A' und in C' enthalten, und jeder Punkt, der sowohl in A' wie in C' enthalten ist, muß in einem A'_n und in einem C'_m , also wegen (5) sowohl in A'_{n+m} als auch in C'_{n+m} , d. h. in $A'_{n+m} C'_{n+m}$ enthalten sein. Nach einem Satze der Theorie der Meßbarkeit folgt nun aus (4) und (6), wenn man $A'_n C'_n < A'_{n+1} C'_{n+1}$ berücksichtigt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m A'_n C'_n = m A' C' = m N'_1 > \mu;$$

also gibt es einen Index $n = n_0$, so daß, wenn $B'_0 = A'_{n_0} C'_{n_0}$ gesetzt wird,

$$m B'_0 > \mu > 0$$

ist. Nun ist B'_0 eine abgeschlossene Teilmenge der abgeschlossenen Menge A'_{n_0} , und A'_{n_0} ist das Bild der abgeschlossenen Menge A_{n_0} . Also ist B'_0 nach dem Hilfssatz 1 von § 10 das Bild einer abgeschlossenen Menge B_0 , und zwar ist B_0 Teilmenge von N'_1 , da B'_0 Teilmenge von N'_1 ist. Einerseits kann aber B_0 als meßbare Teilmenge der Minimalmenge N'_1 nur das Maß Null besitzen, andererseits wäre es auf die meßbare Menge B'_0 mit von Null verschiedenem Maße abgebildet, was bei meßbaren Abbildungen unmöglich ist. Unsere Annahme, daß das innere Maß von N'_1 größer als Null sei, zieht also einen Widerspruch mit den übrigen Voraussetzungen nach sich. N'_1 und ebenso N'_2 sind also Minimalmengen, wenn sie nicht Nullmengen sind. Ferner muß $M' = N'_1 + N'_2$ als Bild von M meßbar sein. Wenn also N'_1 und N'_2 keine Nullmengen sind, so sind sie zueinander konjugiert, was bewiesen werden sollte.

Aus diesem Satze ziehen wir die wichtige Folgerung:

Wird durch eine meßbare stetige Abbildung eine nicht-meßbare Menge M auf eine meßbare Menge M' abgebildet, so kann dies nur so geschehen, daß jede durch Subtraktion einer meßbaren Teilmenge aus M hervorgehende Minimalmenge N auf eine Nullmenge N' abgebildet wird. Denn das Bild der meßbaren Teilmenge muß wegen der Meßbarkeit der Abbildung meßbar sein. Also muß N' als Differenz zweier meßbaren Mengen meßbar sein. Das ist aber nach dem letzten Satze nur dadurch möglich, daß N' eine Nullmenge ist.

4. Hinlänglichkeit eines zweiten Kriteriums für die Meßbarkeit stetiger Abbildungen.

15. Das bisher aufgestellte Kriterium ist insofern für die Anwendung sehr ungeeignet, als es die Untersuchung des Bildes jeder Nullmenge verlangt. Unser Ziel ist nun, es durch ein leichter

zu handhabendes Kriterium zu ersetzen. Die Betrachtungen, die wir zu diesem Zwecke anstellen werden, werden eine weitere Anwendung in der Transformationstheorie Lebesguescher Integrale finden. Es handelt sich im folgenden, auch wo dies nicht ausdrücklich gesagt wird, nur um stetige eineindeutige Abbildungen.

Es sei A eine meßbare Punktmenge, die auf die Menge A' abgebildet sei. Die Meßbarkeit der Abbildung wird hiebei nicht vorausgesetzt; die Betrachtungen dieses Paragraphen würden sogar für unstetige Abbildungen gültig bleiben. $\bar{K}(P; x)$ sei der Kreis mit P als Mittelpunkt und dem Radius x . Wir setzen $A(P; x) = A \cdot \bar{K}(P; x)$ und bezeichnen mit $A'(P; x)$ das Bild dieser Menge. Im Punkte P ist dann

$$\varphi(P; a) = \text{obere Grenze } \frac{\bar{m} A'(P; x)}{m A(P; x)} \quad 0 < x \leq a \quad (1)$$

eine monoton abnehmende Funktion von a . Hier setzen wir über den Wert des Quotienten noch fest, daß er für

$$m A(P; x) = 0 \quad \begin{cases} \bar{m} A'(P; x) > 0 & \text{den Wert } +\infty \\ \bar{m} A'(P; x) = 0 & \text{den Wert } 0 \end{cases} \quad (1a)$$

habe. Dann ist

$$\bar{\Delta}(P) = \text{untere Grenze } \varphi(P; a) \quad a > 0 \quad (2)$$

eine bestimmte dem Punkte P zukommende Zahl, die wir das obere Vergrößerungsverhältnis der Abbildung nennen; $\bar{\Delta}(P)$ ist hiedurch als Funktion von P definiert, die wir nur für Punkte P von A betrachten.

Aus der Definition von $\bar{\Delta}(P)$ folgt, daß man bei festem P stets eine monoton gegen Null konvergierende Folge positiver Zahlen $b_1, b_2, \dots$ finden kann, so daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{m} A'(P; b_n)}{m A(P; b_n)} = \bar{\Delta}(P) \quad (3)$$

ist. Ist nämlich $\bar{\Delta}(P)$ endlich, so verfährt man zur Bestimmung der b_n genau so wie in § 4. Ist dagegen $\bar{\Delta}(P) = \infty$, so ist für jedes a $\varphi(P; a) = \infty$, da diese Funktion mit abnehmendem a niemals wachsen kann. Es gibt also ein $b_1 < 1$, so daß

$$\frac{\bar{m} A'(P; b_1)}{m A(P; b_1)} > 1$$

ist, und aus demselben Grunde ein $b_2 < b_1$, das zugleich $b_2 < \frac{1}{2}$ erfüllt, so daß

$$\frac{\bar{m} A'(P; b_2)}{m A(P; b_2)} > 2$$

ist. So fortfahrend kann man eine Folge $b_1 > b_2 > b_3 \dots$ finden, wo $b_n < \frac{1}{n}$ ist, welche die verlangte Eigenschaft besitzt.

Wir bemerken ferner noch, daß für jede beliebige monoton gegen Null konvergierende Folge positiver Zahlen $c_1, c_2, \dots$

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\overline{m} A'(P; c_n)}{m A(P; c_n)} \leq \overline{\Delta}(P) \quad (4)$$

ist. Denn nach (1) ist

$$\frac{\overline{m} A'(P; c_n)}{m A(P; c_n)} \leq \varphi(P; c_n),$$

woraus (4) mit Hilfe von (2) unmittelbar folgt. Übrigens ist (4) trivial, wenn $\overline{\Delta}(P)$ unendlich ist.

Ganz analog zu $\Delta(P)$ definieren wir das untere Vergrößerungsverhältnis $\underline{\Delta}(P)$ auf folgende Weise. Es sei

$$\psi(P; a) = \text{untere Grenze } \frac{\overline{m} A'(P; x)}{m A(P; x)} \quad 0 < x \leq a; \quad (5)$$

$\psi(P; a)$ ist eine monoton wachsende Funktion von a . Wir definieren

$$\underline{\Delta}(P) = \text{obere Grenze } \psi(P; a) \quad a > 0. \quad (6)$$

Auch hier gibt es zu jedem P eine monoton gegen Null konvergierende Folge positiver Zahlen $b_1, b_2, b_3, \dots$, so daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{\overline{m} A'(P; b_n)}{m A(P; b_n)} = \underline{\Delta}(P) \quad (7)$$

ist. Ist nämlich $\Delta(P)$ endlich, so geschieht die Bestimmung der b_n ebenso wie in § 4. Ist dagegen $\underline{\Delta}(P) = \infty$, so gibt es wegen (6) ein $a_1 < 1$, so daß

$$\psi(P; a_1) > 1$$

und also wegen (5) ein $b_1 \leq a_1$, so daß

$$\frac{\overline{m} A'(P; b_1)}{m A(P; b_1)} > 1$$

ist. Ebenso gibt es ein $a_2 < b_1$, für das man noch $a_2 < \frac{1}{2}$ vor-schreiben kann, und das

$$\psi(P; a_2) > 2$$

erfüllt; woraus die Existenz eines $\underline{b}_2 \leq a_2$ folgt, so daß

$$\frac{\overline{m} A'(P; b_2)}{m A(P; b_2)} > 2$$

ist. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens bestimmt man eine Folge positiver Zahlen $b_1 > b_2 > b_3 > \dots$, die gegen Null streben und (7) erfüllen.

Ferner ist analog zu (4) für irgend eine monoton gegen Null strebende Folge positiver Zahlen $c_1, c_2, c_3, \dots$

$$\liminf_{n=\infty} \frac{\overline{m} A'(P; c_n)}{m A(P; c_n)} \geq \underline{\Delta}(P), \quad (8)$$

woraus noch in Verbindung mit (4)

$$\underline{\Delta}(P) \leq \overline{\Delta}(P)$$

folgt.

16. Die meßbare Menge A werde eineindeutig auf A' abgebildet; ob die Abbildung stetig ist oder nicht, kommt zunächst nicht in Betracht; über die Meßbarkeit der Abbildung machen wir keine Voraussetzungen. Es sei e eine beliebige Teilmenge von A von endlichem äußeren Maße und in der

$$\overline{\Delta}(P) \leq \beta$$

ist, wo β eine endliche nicht negative Zahl sei. Über die Meßbarkeit von e setzen wir nichts voraus. Zu jedem Punkte P von e gibt es eine Folge von monoton gegen Null konvergierenden positiven Zahlen $b_1, b_2, b_3, \dots$ (die übrigens von P abhängen werden), so daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{\overline{m} A'(P; b_n)}{m A(P; b_n)} = \overline{\Delta}(P) \quad (1)$$

ist. Indem man für jedes P endlich viele dieser b_n streicht, kann man also jedem P von e eine abzählbare Folge von Kreisen mit P als Mittelpunkt und mit gegen Null konvergierenden Radien b_n zuordnen, so daß

$$\frac{\overline{m} A'(P; b_n)}{m A(P; b_n)} \leq \beta + \varepsilon_1 \quad (2)$$

ist, bei beliebig vorgeschriebenem positiven ε_1 .

Mit abzählbar vielen dieser Kreise $K_1, K_2, \dots K_v, \dots$ können wir nun nach Satz II e restlos so überdecken, daß

$$\sum_{v=1}^{\infty} m K_v \leq \overline{m} e + \varepsilon_1 \quad (3)$$

ist. Bezeichnen wir die Vereinigungsmenge dieser K_v mit S_1 , so ist S_1 eine offene, also meßbare Menge, und es ist

$$m S_1 \leq \sum_{v=1}^{\infty} m K_v.$$

$A_1 = A S_1$ ist meßbar; A'_1 sei das Bild von A_1 . Wegen $A_1 \prec S_1$ ist zunächst

$$m A_1 \leq m S_1$$

und also auf Grund der vorhergehenden Ungleichungen

$$m A_1 \leq \bar{m} e + \varepsilon_1. \quad (4)$$

Andererseits ist nach (2) für jedes v

$$(\beta + \varepsilon_1) \cdot m(A K_v) \geq \bar{m}(A K_v)', \quad (5)$$

wenn $(A K_v)'$ das Bild von $A K_v$ ist, und zwar gilt diese Ungleichung nach der Festsetzung (1 a) von § 15 auch für den Fall $m(A K_v) = 0$. Durch Summation folgt aus (5)

$$(\beta + \varepsilon_1) \sum_{v=1}^{\infty} m(A K_v) \geq \sum_{v=1}^{\infty} \bar{m}(A K_v)'. \quad (6)$$

Nun ist aber einerseits

$$m K_v \geq m(A K_v),$$

und andererseits ist A'_1 die Vereinigungsmenge aller $(A K_v)'$, daher

$$\sum_{v=1}^{\infty} \bar{m}(A K_v)' \geq \bar{m} A'_1.$$

Somit erhält man aus (6)

$$(\beta + \varepsilon_1) \sum_{v=1}^{\infty} m K_v \geq \bar{m} A'_1$$

und endlich wegen (3)

$$(\beta + \varepsilon_1) (\bar{m} e + \varepsilon_1) \geq \bar{m} A'_1. \quad (7)$$

Es sei nun $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ eine gegen Null konvergierende Folge positiver Zahlen. Wir bestimmen ein S_2 und damit auch ein $A_2 = A S_2$ ebenso wie vorhin ein S_1 , indem wir nur ε_1 durch ε_2 ersetzen, und fahren so fort. So finden wir eine Folge von meßbaren Mengen $A_1, A_2, A_3, \dots$, die alle e enthalten, so daß analog zu (4)

$$m A_n \leq \bar{m} e + \varepsilon_n$$

ist. Es sei E der Durchschnitt aller A_n ; E ist meßbar, und da für jedes n

$$E \prec A_n$$

ist, so ist auch

$$m E \leq \bar{m} e + \varepsilon_n,$$

also

$$m E \leq \bar{m} e.$$

Andererseits ist e Teilmenge von E , also muß sein

$$m E = \bar{m} e,$$

d. h. E ist eine maßgleiche Hülle von e .

A'_n sei das Bild von A_n . Dann ist analog zu (7)

$$(\beta + \varepsilon_n)(\bar{m} e + \varepsilon_n) \geq \bar{m} A'_n.$$

Bezeichnen wir mit E' den Durchschnitt aller A'_n , so ist E' das Bild von E . Wegen $A'_n \succ E'$ ist dann erst recht

$$(\beta + \varepsilon_n)(\bar{m} e + \varepsilon_n) \geq \bar{m} E',$$

folglich, da diese Ungleichung für jedes n gilt,

$$\beta \cdot \bar{m} e \geq \bar{m} E'.$$

Dieses Resultat sprechen wir in dem Satz aus:

Satz X. Wird die meßbare Punktmenge A eineindeutig abgebildet und ist e eine beliebige Teilmenge von endlichem äußeren Maße von A , in der $\bar{\Delta}(P) \leq \beta$ ist, so gibt es zu e stets eine solche maßgleiche Hülle E , so daß für das Bild E' von E die Ungleichung gilt:

$$\beta \cdot \bar{m} e = \beta \cdot m E \geq \bar{m} E'.$$

Genau so beweist man übrigens diesen Satz für $\Delta(P)$. Denn die Ungleichung (2) läßt sich auch für $\Delta(P) \leq \beta$ befriedigen. Wegen $\Delta(P) \leq \bar{\Delta}(P)$ bedeutet übrigens der Satz für $\Delta(P)$ eine Verschärfung des Satzes für $\bar{\Delta}(P)$.

17. Jetzt beweisen wir leicht den Satz:

Satz XI. Wenn bei einer eineindeutigen Abbildung einer meßbaren Menge A diejenige Teilmenge e_∞ von A , in der $\bar{\Delta}(P) = \infty$ ist, auf eine Nullmenge abgebildet wird, so wird jede Nullmenge in eine Nullmenge übergeführt.

Beweis: Es sei Z eine in A enthaltene Nullmenge. Nach der Voraussetzung des Satzes wird $Z \cdot \bar{e}_\infty$ auf eine Nullmenge abgebildet. Ich zerlege nun $Z - Z \cdot \bar{e}_\infty$ in abzählbar viele Teilmengen $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ von der Beschaffenheit, daß

für jedes $P \prec Z_n$: $n - 1 \leq \bar{\Delta}(P) < n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

ist. Jeder Punkt von $Z - Z \cdot \bar{e}_\infty$ kommt in einem und nur in einem Z_n vor. Nun gibt es nach Satz X zu jedem Z_n eine maßgleiche Hülle $\bar{Z}$, so daß für das Bild $\bar{Z}'$ von $\bar{Z}$ die Ungleichung

$$n \cdot m Z_n \geq m \bar{Z}'_n$$

gilt, woraus

$$m \bar{Z}'_n = 0$$

folgt. Da nun das Bild Z'_n von Z_n in $\bar{Z}'_n$ enthalten ist, so ist a fortiori

$$m Z'_n = 0.$$

Das Bild Z' von Z ist also die Vereinigungsmenge abzählbar vieler Nullmengen, also selbst eine Nullmenge.

Anmerkung: Genau so beweist man, daß jede Nullmenge auf eine Nullmenge abgebildet wird, wenn die Menge e_∞ , in der $\Delta(P) = 0$ ist, auf eine Nullmenge abgebildet wird. Der hiemit ausgesprochene Satz ist übrigens eine Verschärfung von Satz XI, da wegen

$$\bar{\Delta}(P) \geq \Delta(P)$$

e_∞ eine Teilmenge von $\bar{e}_\infty$ ist.

Wenden wir Satz XI mit Hilfe von Satz VIII auf stetige eindeutige Abbildungen an, so erhalten wir ein zweites hinreichendes Kriterium für die Meßbarkeit stetiger Abbildungen:

Satz XII. Hinreichend für die Meßbarkeit einer eindeutigen stetigen Abbildung der meßbaren Menge A ist es, daß diejenige Teilmenge e_∞ von A , in der $\Delta(P) = \infty$ ist, auf eine Nullmenge abgebildet wird.

5. Notwendigkeit des zweiten Kriteriums für die Meßbarkeit stetiger Abbildungen.

18. Um die Notwendigkeit des in Satz XII aufgestellten Kriteriums zu beweisen, gehen wir von folgendem Satz aus:

Satz XIII. Wird die meßbare Punktmenge A eindeutig, stetig und meßbar abgebildet, und ist e

eine beliebige Teilmenge von A von endlichem äußeren Maß, in der $\bar{\Delta}(P) \geq \alpha$ ist, so gilt für jede maßgleiche Hülle E von e , die ganz in A liegt, die Ungleichung:

$$mE' \geq \alpha \cdot \bar{m}e = \alpha \cdot mE, \quad (1)$$

wenn E' das Bild von E ist.

Beweis: Wenn das Bild e' von e von unendlichem äußeren Maße ist, so ist (1) sicher erfüllt. Wir können uns also darauf beschränken, $\bar{m}e'$ endlich anzunehmen. Dann gibt es eine offene Punktmenge U' gleichfalls von endlichem Maß, die e' ganz enthält. Dann gibt es nach Hilfssatz 2 von § 10 eine offene Punktmenge U , so daß $A'U'$ das Bild von AU ist.

Wegen (1) kann man gemäß (3) von § 15 jedem Punkte P von e eine abzählbare Folge von Kreisen mit P als Mittelpunkt und mit gegen Null konvergierenden Radien b_n zuordnen, so daß

$$\frac{\bar{m}A'(P; b_n)}{m(A; b_n)} \geq \alpha - \varepsilon_1 \quad (2)$$

ist, wo ε_1 eine beliebig vorgeschriebene positive Zahl ist. Nach dem Vitalischen Satze kann man dann e mit abzählbar vielen getrennt liegenden dieser Kreise $K_1, K_2 \dots K_v, \dots$ bis auf eine Nullmenge überdecken, wobei man noch erreichen kann, daß diese K_v sämtlich in U liegen und daß für die Vereinigungsmenge S_1 dieser K_v

$$mS_1 \leq \bar{m}e + \varepsilon_1 \quad (3)$$

gilt. $B_1 = AS_1$ enthält e bis auf höchstens eine Nullmenge, so daß

$$mB_1 \geq \bar{m}e \quad (4)$$

ist. AK_v ist für jedes v eine meßbare Punktmenge, wird also auf eine meßbare Punktmenge $(AK_v)'$ abgebildet. Wegen (2) ist

$$m(AK_v)' \geq (\alpha - \varepsilon_1) \cdot m(AK_v),$$

und zwar gilt diese Ungleichung gemäß den Festsetzungen (1a) von § 15 auch für den Fall $m(AK_v) = 0$. Durch Summation folgt

$$\sum_{v=1}^{\infty} m(AK_v)' \geq (\alpha - \varepsilon_1) \sum_{v=1}^{\infty} m(AK_v).$$

Bezeichnen wir noch das Bild von B_1 mit B_1' , so ist, da keine zwei K_v und folglich auch keine zwei AK_v und keine zwei $(AK_v)'$ gemeinsame Punkte besitzen,

$$mB_1 = \sum_{v=1}^{\infty} m(AK_v), \quad mB_1' = \sum_{v=1}^{\infty} m(AK_v)',$$

so daß die letzte Ungleichung mit Hilfe von (4) übergeht in

$$m B'_1 \geq (\alpha - \varepsilon_1) \cdot \overline{m} e. \quad (5)$$

Nun sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ eine gegen Null konvergierende Folge positiver Zahlen. Zu jedem Punkt P von $e_1 = e S_1 = e B_1$ bestimmen wir nun eine Folge von Kreisen mit P als Mittelpunkt, so daß anstatt (2)

$$\frac{\overline{m} A'(P; b_n)}{m A(P; b_n)} \geq \alpha - \varepsilon_2 \quad (6)$$

gilt. Nun überdecken wir e_1 nach dem Vitalischen Satz bis auf eine Nullmenge mit der aus abzählbar vielen getrennt liegenden dieser Kreise bestehenden Punktmenge S_2 , wobei wir noch vorschreiben

$$m S_2 \leq \overline{m} e + \varepsilon_2$$

und zugleich $S_2 \prec S_1$ verlangen. Diese Forderung kann stets erfüllt werden, denn S_1 ist eine offene Punktmenge, die e_1 ganz enthält; zu jedem Punkte P von a_1 wird es also unendlich viele Kreise geben, die (6) genügen und ganz in S_1 liegen; aus diesen Kreisen bilden wir S_2 . $B_2 = A S_2$ enthält e_1 bis auf eine Nullmenge, also auch e bis auf eine Nullmenge; folglich ist

$$m B_2 \geq \overline{m} e.$$

Die zu (5) analoge Ungleichung lautet hier also

$$m B'_2 \geq (\alpha - \varepsilon_2) \cdot \overline{m} e.$$

Nun ist aber $B'_1 \succ B'_2$ wegen $S_1 \succ S_2$. Also kann man (5) verschärfen zu

$$m B'_1 \geq m B'_2 \geq (\alpha - \varepsilon_2) \cdot \overline{m} e.$$

Dies Verfahren kann man fortsetzen und eine Folge ineinander geschachtelter offener Punktmengen

$$S_1 \prec S_2 \prec S_3 \prec \dots$$

finden, die alle e bis auf eine Nullmenge enthalten und die

$$m S_n \leq \overline{m} e + \varepsilon_n$$

erfüllen und für die ferner, wenn man $A S_n = B_n$ setzt,

$$m B'_n \geq (\alpha - \varepsilon_n) \cdot \overline{m} e$$

gilt. Da nun hieraus und aus

$$B_1 \succ B_2 \succ B_3 \succ \dots$$

$$m B'_n \geq m B'_{n+k} \geq (\alpha - \varepsilon_{n+k}) \cdot \overline{m} e$$

für jedes positive ganzzahlige k folgt, so muß

$$m B'_n \geq \alpha \cdot \overline{m} e$$

sein. Nun ist B'_1 von endlichem Maße, da es eine Teilmenge von U ist. Bezeichnen wir noch mit B den Durchschnitt aller B_n und mit B' das Bild von B , so folgt nach einem Satze der Theorie der Meßbarkeit¹⁾

$$m B' \geq \alpha \cdot \overline{m} e. \quad (7)$$

Andererseits ist $B \prec B_n \prec S_n$, also

$$m B \leq m B_n \leq m S_n \leq \overline{m} e + \varepsilon_n$$

und da dies für jedes n gilt, so ist

$$m B \leq \overline{m} e. \quad (8)$$

Nun enthalten aber alle B_n die Menge e bis auf eine Nullmenge, also enthält auch B die Menge e bis auf eine Nullmenge, was

$$m B \geq \overline{m} e$$

und zusammen mit (8)

$$m B = \overline{m} e$$

zur Folge hat.

Nun sei E irgend eine in A enthaltene maßgleiche Hülle von e . (Eine solche gibt es stets, denn der Durchschnitt jeder maßgleichen Hülle von e mit A ist wieder eine maßgleiche Hülle von e .) Dann unterscheidet sich E von B höchstens um eine Nullmenge, d. h.

$$m(E - BE) = 0, \quad m(B - BE) = 0; \quad (9)$$

denn BE enthält e bis auf eine Nullmenge, woraus

$$m(BE) \geq \overline{m} e$$

folgt, und andererseits ist wegen $BE \prec E$

$$m(BE) \leq mE = \overline{m} e,$$

also

$$m(BE) = \overline{m} e,$$

woraus man auf (9) schließt. Da nun jede Nullmenge auf eine Nullmenge abgebildet wird, so folgt aus (9)

$$m(E' - B'E') = 0, \quad m(B' - B'E') = 0$$

oder

$$mE' = mB'E' = mB',$$

¹⁾ Siehe z. B. Carathéodory, Über das lineare Maß, Satz 9.

wodurch man aus (7)

$$m E' \geq \underline{\underline{\alpha}} \cdot \overline{m} e = \underline{\underline{\alpha}} \cdot m E$$

erhält. Damit ist der Beweis erbracht.

Offenbar beweist man den analogen Satz für $\Delta(P)$ auf dieselbe Weise. Denn alle Punkte einer Menge, in der $\underline{\Delta}(P) \geq \alpha$ ist, lassen sich, wie Gleichung (7) von § 15 aussagt, von Folgen von Kreisen umgeben, die unsere Ungleichung (2) erfüllen. Wegen $\underline{\Delta}(P) \leq \overline{\Delta}(P)$ ist der Satz für $\underline{\Delta}(P)$ übrigens eine Folge des Satzes für $\overline{\Delta}(P)$.

Wir bemerken noch, um den Gang der Beweise von Satz X und Satz XIII klarer hervortreten zu lassen, daß es im Beweise von Satz XIII wesentlich darauf ankommt, mit getrennt liegenden Kreisen zu überdecken, da sonst der Schluß auf (5) nicht möglich wäre; auf eine nichtüberdeckte Restmenge vom Maße Null kann es für diesen Beweis nicht ankommen, da ja nach Voraussetzung jede Nullmenge in eine Nullmenge übergeführt wird. Dagegen ist es im Beweise von Satz X notwendig, die betrachtete Menge restlos zu überdecken, da über die Abbildung von Nullmengen nichts vorausgesetzt wird. Der Satz II dient dann dazu, das Maß der Menge der mehrfach überdeckten Punkte nach oben abzuschätzen.

19. Wir wenden Satz XIII zunächst unter der einschränkenden Voraussetzung an, daß A von endlichem Maße sei und auf die Menge A' von endlichem Maße abgebildet werde. Es sei wieder e_∞ diejenige Teilmenge von A , in der $\overline{\Delta}(P) = \infty$ ist. In e_∞ ist also

$$\overline{\Delta}(P) > N,$$

welche positive Zahl N auch sei. Ferner ist e_∞ als Teilmenge von A von endlichem äußeren Maß. Folglich gilt für jede ganz in A gelegene maßgleiche Hülle E von e_∞

$$m E' \geq N \cdot \overline{m} e_\infty,$$

wenn E' das Bild von E ist. Wegen $E' \prec A'$ ist aber

$$m E' \leq m A',$$

also

$$\overline{m} e_\infty \leq \frac{m A'}{N}$$

für jedes positive N , woraus wegen der Endlichkeit von $m A'$

$$\overline{m} e_\infty = 0$$

folgt.

Nun sei A von beliebigem, A' aber noch von endlichem Maß. Q_n sei ein Quadrat mit den Seitenlängen n ; wir setzen $A Q_n = A_n$. Dann ist $m A_n$ endlich und auch das Bild A'_n von A_n besitzt ein endliches Maß. Dann ist also diejenige Teilmenge $\bar{e}_\infty^{(n)}$ von A_n , in der das für die Abbildung von A_n und A'_n definierte obere Vergrößerungsverhältnis unendlich ist, eine Nullmenge. Nun gibt es aber um jeden Punkt von A_n einen Kreis, der ganz in Q_n liegt, da Q_n eine offene Punktmenge ist. Da alle in einem solchen Kreis liegenden Punkte von A auch zu A_n gehören, so stimmt in jedem Punkte von A_n das obere Vergrößerungsverhältnis der Abbildung von A_n auf A'_n mit dem der Abbildung von A auf A' überein. Also ist $\bar{e}_\infty^{(n)} = Q_n \cdot \bar{e}_\infty$, wo $\bar{e}_\infty$ dieselbe Bedeutung wie vorhin hat. Nehme ich nun eine Folge von konzentrischen Quadraten $Q_1, Q_2, \dots$, so ist

$$\bar{e}_\infty = \bar{e}_\infty^{(1)} + \bar{e}_\infty^{(2)} + \dots$$

Folglich ist auch in diesem Falle $\bar{e}_\infty$ eine Nullmenge.

Nun sei endlich auch A' von beliebigem Maße. Es sei Q'_n ein Quadrat mit den Seitenlängen n und

$$B'_n = A' Q'_n.$$

B'_n ist dann von endlichem Maße. B_n sei diejenige Teilmenge von A , deren Bild B'_n ist. Ist $\bar{e}_\infty^{(n)}$ diejenige Teilmenge von B_n , in der das für die Abbildung von B_n auf B'_n definierte obere Vergrößerungsverhältnis unendlich ist, so ist $\bar{e}_\infty^{(n)}$ eine Nullmenge. Nun gibt es aber nach Hilfssatz 2 von § 10 eine offene Punktmenge R_n , so daß $B_n = A R_n$ ist. Wir können daher genau so wie vorhin schließen, daß in jedem Punkte von B_n das obere Vergrößerungsverhältnis der Abbildung von A auf A' mit dem der Abbildung von B_n auf B'_n übereinstimmt. Also ist $\bar{e}_\infty^{(n)} = R_n \bar{e}_\infty$. Die Vereinigungsmenge einer Folge konzentrischer Quadrate $Q'_1, Q'_2, \dots$ überdeckt ganz A' ; folglich wird A von der Vereinigungsmenge aller R_n überdeckt. Daher ist

$$\bar{e}_\infty = \bar{e}_\infty^{(1)} + \bar{e}_\infty^{(2)} + \dots,$$

und $\bar{e}_\infty$ ist als Vereinigungsmenge abzählbar vieler Nullmengen selbst eine Nullmenge.

Da $\Delta(P) \leq \bar{\Delta}(P)$ ist, so ist erst recht e_∞ eine Nullmenge.

Durch eine meßbare Abbildung wird nun jede Nullmenge, also auch $\bar{e}_\infty$ und e_∞ , auf eine Nullmenge abgebildet. Fassen wir dieses Resultat mit Satz XII zusammen, so haben wir

Satz XIV. Notwendig und hinreichend für die Meßbarkeit einer eineindeutigen stetigen Abbildung der meßbaren Menge A ist es, daß diejenige Teilmenge

von A , in der $\bar{\Delta}(P) = \infty$ ist, auf eine Nullmenge abgebildet wird.

Derselbe Satz gilt für $\underline{\Delta}(P)$.

20. Für eine spätere Anwendung beweisen wir noch eine Verschärfung von Satz XIII, die in der Unterdrückung der Gleichheitszeichen seiner beiden Ungleichungen besteht.

Satz XV. Wird die meßbare Punktmenge A eindeutig, stetig und meßbar abgebildet und ist e eine beliebige Teilmenge von A , in der $\bar{\Delta}(P) > \alpha$ ist, und ist $m e$ endlich und von Null verschieden, so gilt für jede maßgleiche Hülle E von e die Ungleichung

$$m E' > \alpha \cdot m E = \alpha \cdot \bar{m} e, \quad (1)$$

wo E' das Bild von E ist.

Beweis: Es sei e_n diejenige Teilmenge von e , in der

$$\bar{\Delta}(P) > \alpha + \frac{1}{n} \quad (n \text{ ganz und positiv}) \quad (2)$$

ist; dann ist e die Vereinigungsmenge aller e_n . Ferner sei D_n eine in A liegende maßgleiche Hülle von e_n . Dann ist auch

$$E_n = D_1 + D_2 + \dots + D_n$$

eine maßgleiche Hülle von e_n . Denn wäre

$$m E_n > m D_n,$$

so müßte es, weil

$$E_n = D_n + (D_1 - D_1 D_n) + (D_2 - D_2 D_n) + \dots \\ \dots + (D_{n-1} - D_{n-1} D_n)$$

ist, einen Index $\nu < n$ geben, so daß

$$m(D_\nu - D_\nu D_n) = m D_\nu - m(D_\nu D_n) > 0 \quad (3)$$

wäre. Nun ist aber wegen (2)

$$e_1 \prec e_2 \prec e_3 \prec \dots \\ e_\nu \prec D_n$$

und also einerseits

$$e_\nu \prec D_\nu D_n,$$

während andererseits wegen (3)

$$m D_\nu > m(D_\nu D_n)$$

sein müßte, was sich widerspricht, da D_v maßgleiche Hülle von e_v ist. Wir haben jetzt also zu den Mengen

$$\begin{aligned} e_1 < e_2 < e_3 < \dots \\ \text{maßgleiche Hüllen} \quad E_1 < E_2 < E_3 < \dots \end{aligned} \quad (4)$$

konstruiert.

Nun sei E die Vereinigungsmenge aller E_n . Dann ist E eine maßgleiche Hülle von e . Denn einerseits ist $e < E$, also

$$\overline{m} e \leq m E.$$

Andererseits ist aber

$$m E_n = \overline{m} e_n \leq \overline{m} e,$$

und da wegen (4) nach einem allgemeinen Satze¹⁾

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m E_n = m E$$

ist, auch

$$m E \leq \overline{m} e,$$

was mit der obigen Ungleichung zusammen

$$m E = \overline{m} e$$

gibt, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Nun setzen wir

$$\begin{aligned} s_n &= e_n - e_n E_{n-1} \quad n \geq 2 \\ s_1 &= e_1, \end{aligned}$$

dann ist in s_n

$$\overline{\Delta}(P) > \alpha + \frac{1}{n}. \quad (5)$$

Ferner ist für $n \geq 2$

$$s_n < E_n - E_{n-1} = S_n. \quad (6)$$

Es kommt nun darauf an, zu zeigen, daß S_n eine maßgleiche Hülle von s_n ist. Wegen (6) ist zunächst

$$\overline{m} s_n \leq m S_n.$$

Wäre nun

$$\overline{m} s_n < m S_n,$$

so bedeutete dies

$$\overline{m} s_n + m E_{n-1} < m E_n,$$

$$\overline{m} (s_n + E_{n-1}) < m E_n,$$

$$\overline{m} (e_n - e_n E_{n-1} + E_{n-1}) < m E_n,$$

¹⁾ Siehe z. B. Carathéodory, Über das lineare Maß, Satz 8.

also a fortiori

$$\overline{m} e_n < m E_n,$$

was aber der Eigenschaft von E_n als maßgleicher Hülle von e_n widerspräche. Daher ist in der Tat

$$\overline{m} s_n = m S_n.$$

Nach Satz XIII ist jetzt aber, da (5) gilt und S_n eine in A enthaltene maßgleiche Hülle von s_n ist,

$$m S'_n \geq \left(\alpha + \frac{1}{n} \right) \cdot m S_n. \quad (7)$$

Nun ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} m S_n = \lim_{n=\infty} m E_n = m E = \overline{m} e > 0,$$

so daß es also mindestens ein S_n mit

$$m S_n > 0$$

geben muß. Dann folgt aber aus (7)

$$\sum_{n=1}^{\infty} m S'_n > \alpha \sum_{n=1}^{\infty} m S_n$$

(unter Ausschluß des Gleichheitszeichens!), und da die S'_n zu je zweien keine gemeinsamen Punkte haben,

$$m E' > \alpha \cdot m E = \alpha \cdot \overline{m} e.$$

Diese Ungleichung gilt nun aber, da Nullmengen auf Nullmengen abgebildet werden, für jede maßgleiche Hülle von e , da sie für eine gilt. Damit ist Satz XI bewiesen.

Genau so beweist man denselben Satz für $\underline{\Delta}(P)$, da Satz XIII auch für $\underline{\Delta}(P)$ gilt.

6. Transformation Lebesguescher Integrale.

21. In der meßbaren Punktmenge A sei die meßbare Funktion $f(P)$ definiert, und die Punktmenge A werde eineindeutig auf die meßbare Menge A' abgebildet. In A' definieren wir nun eine Funktion $\varphi(P')$, indem wir dem Punkte P' von A' den Funktionswert

$$\varphi(P') = f(P)$$

zuordnen, wenn P' das Bild von P ist. Die Aufgabe der Transformationstheorie ist es nun, das Integral

$$I = \int_{A'} \varphi(P') d e',$$

falls es existiert, durch das über A erstreckte Integral einer auf A definierten Funktion auszudrücken. Wir nennen $\varphi(P')$ die Transformierte von $f(P)$.

Zunächst ist klar, daß es eine allgemeine, für alle auf A definierten meßbaren Funktionen gültige Transformationstheorie nur für meßbare Abbildungen von A auf A' geben kann. Bei meßbaren Abbildungen ist nämlich $\varphi(P')$ meßbar, wenn $f(P)$ meßbar ist. Denn die Meßbarkeit von $f(P)$ bedeutet, daß für jede beliebige Zahl α die Punktmenge E_α , in der $f(P) \leq \alpha$ ist, meßbar ist. Dann ist aber auch die Punktmenge E'_α , in der $\varphi(P') \leq \alpha$ ist, meßbar, da sie das Bild von E_α ist.

Es kann zwar auch durch eine nicht-meßbare Abbildung eine meßbare Funktion in eine meßbare Funktion übergehen. Aber zu jeder nicht-meßbaren Abbildung kann man eine meßbare und sogar summierbare Funktion angeben, die in eine nicht-meßbare Funktion übergeht. Wird nämlich A auf A' nicht-meßbar abgebildet, so gibt es der Definition zufolge eine meßbare Teilmenge B von A , die auf eine nicht-meßbare Teilmenge B' von A' abgebildet wird. Folglich gibt es stets eine beschränkte meßbare Menge $C \prec B \prec A$, die auf eine nicht-meßbare Menge $C' \prec B' \prec A'$ abgebildet wird. Die Funktion, welche in C gleich 1 und sonst gleich 0 ist, ist auf A summierbar, wird aber in eine nicht-meßbare Funktion transformiert.

Wir werden im folgenden nur stetige meßbare Abbildungen untersuchen, da wir auf diese die Sätze des vorigen Abschnittes anwenden können.

22. Satz XVI. Die durch eine stetige meßbare Abbildung bestimmten Funktionen $\bar{\Delta}(P)$ und $\underline{\Delta}(P)$ sind meßbar.

Den Beweis dieses Satzes könnte man so führen, daß man zeigt, daß die im § 15 definierten Funktionen $m A(P; x)$ und $m A'(P; x)$ bei meßbaren Abbildungen stetig in x bei festem P und stetig in P bei festem x sind (wobei diese zweite Stetigkeitseigenschaft eine Folge der ersten ist); da die Funktionen $\bar{\Delta}(P)$ und $\underline{\Delta}(P)$ aus diesen durch Division und zwei Grenzübergänge hervorgehen, so könnte man leicht auf die Meßbarkeit von $\bar{\Delta}(P)$ und $\underline{\Delta}(P)$ schließen. — Mit Hilfe der Sätze des vorigen Abschnittes können wir jedoch den Beweis führen, ohne auf die Definition von $\underline{\Delta}(P)$ und $\bar{\Delta}(P)$ zurückzugehen; zugleich wird dabei der Sinn jener Sätze noch klarer hervortreten.

Wäre nämlich $\bar{\Delta}(P)$ nicht meßbar, so gäbe es eine Zahl α_0 , so daß die Menge E_{α_0} aller P , in denen

$$\bar{\Delta}(P) > \alpha_0 \quad (1)$$

ist, nicht-meßbar wäre. E_{α_0} ist die Summe einer meßbaren Menge M und einer Minimalmenge N . Ist nun $Q_1, Q_2, \dots$ eine Folge konzentrischer Quadrate mit gegen unendlich konvergierenden Seitenlängen, so muß es unter diesen eines geben, es sei Q^* , so daß

$$\overline{m}(NQ^*) > 0$$

ist. Da wegen $NQ^* \prec N$

$$\underline{m}(NQ^*) \leq \underline{m}N = 0$$

ist, so ist $N_1 = NQ^*$ eine Minimalmenge von endlichem äußeren Maß. Nun sei H eine maßgleiche Hülle von N_1 . Dann ist auch

$$H^* = Q^*H - MQ^*H$$

eine maßgleiche Hülle von N_1 . Denn einerseits ist $H^* \prec H$ und andererseits $N_1 \prec H^*$. Dann ist auch

$$N_2 = H^* - N_1$$

eine Minimalmenge, und zwar ist, da N_1 und N_2 konjugiert sind,

$$\underline{m}H^* = \overline{m}N_1 = \overline{m}N_2 > 0.$$

Nun enthält aber N_2 keinen Punkt von $E_{\alpha_0} = N \vdash M$. Also ist für jedes P in N_2

$$\underline{\Delta}(P) \leq \alpha_0. \quad (2)$$

Die Ungleichungen (1) und (2) sind aber auf Grund unserer früheren Sätze unverträglich. Denn nach Satz XV folgt aus (1)

$$\underline{m}H^{*'} > \alpha_0 \cdot \overline{m}N_1 = \alpha_0 \cdot H^*, \quad (3)$$

wo $H^{*'}$ das Bild von H^* ist. Nach Satz X folgt dagegen aus (2)

$$\underline{m}H^{*'} \leq \alpha_0 \cdot \overline{m}N_2 = \alpha_0 \cdot \underline{m}H^*, \quad (4)$$

denn die spezielle maßgleiche Hülle von N_2 , deren Existenz in Satz X behauptet wird, kann sich von H^* nur um Nullmengen unterscheiden, und Nullmengen werden ja der Voraussetzung zufolge auf Nullmengen abgebildet. Da (3) und (4) sich widersprechen, kann es eine nicht-meßbare Menge E_α nicht geben. $\underline{\Delta}(P)$ ist folglich eine meßbare Funktion. — Da die Sätze X und XV auch für $\underline{\Delta}(P)$ gelten, so ist Satz XVI bewiesen.

23. Satz XVII. Bei einer stetigen meßbaren Abbildung der meßbaren Menge A ist diejenige Teilmenge von A , in der

$$\underline{\Delta}(P) < \overline{\Delta}(P) \quad (1)$$

ist, eine Nullmenge.

Beweis: Es sei e_n diejenige in dem Quadrat Q_n enthaltene Menge, in der

$$\underline{\Delta}(P) \leq a_1 < a_2 \leq \bar{\Delta}(P) \quad (2)$$

ist, wo a_1 und a_2 positive Zahlen sind. e_n ist als Durchschnitt dreier meßbaren Mengen selbst meßbar, ist also seine eigene maßgleiche Hülle. Nach Satz X gilt dann für das Bild e'_n von e_n

$$m e'_n \leq a_1 \cdot m e_n,$$

da sich die spezielle maßgleiche Hülle dieses Satzes von e_n höchstens um Nullmengen unterscheiden kann und Nullmengen auf Nullmengen abgebildet werden. Aus (2) schließt man andererseits mit Hilfe von Satz XIII auf

$$m e'_n \geq a_2 \cdot m e_n,$$

also

$$0 \geq (a_2 - a_1) \cdot m e_n,$$

und da das Maß einer Menge nicht negativ sein kann,

$$m e_n = 0.$$

Ist nun e die Menge aller Punkte von A , in denen (2) erfüllt ist, so ist e die Vereinigungsmenge abzählbar vieler e_n für ineinandergeschachtelte konzentrische Q_n mit gegen ∞ konvergierender Seitenlänge. Also ist auch e eine Nullmenge.

Nun sei $a_1, a_2, a_3, \dots$ eine Folge von Zahlen, die auf der Zahlenachse von 0 bis ∞ überall dicht liegen, und e_{nm} sei diejenige Nullmenge, in der

$$\underline{\Delta}(P) \leq a_n < a_m \leq \bar{\Delta}(P) \quad (3)$$

ist. Die Vereinigungsmenge E aller e_{nm} ist auch eine Nullmenge, da es nur abzählbar viele Kombinationen der Indizes n und m gibt. Ich behaupte nun, E ist die Menge aller Punkte, in denen (1) gilt. Ist in P nämlich (1) erfüllt, so gibt es, da die a_n überall dicht liegen, zwischen $\underline{\Delta}(P)$ und $\bar{\Delta}(P)$ zwei Zahlen a_n und a_m , die (3) genügen, d. h. P ist Element von e_{nm} und also auch von E .

Auf Grund des bewiesenen Satzes werden wir im folgenden $\underline{\Delta}(P)$ und $\bar{\Delta}(P)$ nicht mehr unterscheiden, sondern

$$\Delta(P) = \underline{\Delta}(P) = \bar{\Delta}(P)$$

einführen, und für die Punkte, in denen diese Gleichung nicht gilt, $\Delta(P)$ willkürlich definieren, indem wir es z. B. gleich Null setzen.

24. Es sei nun die meßbare Menge A von endlichem Maße eindeutig, stetig und meßbar auf die Menge A' von gleichfalls endlichem Maße abgebildet. Durch diese Abbildung werde

die auf A definierte nicht-negative meßbare und beschränkte Funktion $f(P)$ in $\varphi(P')$ transformiert. Dann ist die Existenz der Integrale

$$\int_A f(P) d e \quad \text{und} \quad \int_{A'} \varphi(P') d e'$$

gewährleistet.

Es sei e_k diejenige meßbare Teilmenge von A , in der

$$k \delta \leq f(P) < (k+1) \delta, \quad \delta > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ist. Das Bild e'_k von e_k ist diejenige Teilmenge von A' , in der

$$k \delta \leq \varphi(P') < (k+1) \delta \quad (1)$$

ist. Nach dem Mittelwertsatz ist daher

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \delta \cdot m e'_k \leq \int_{A'} \varphi(P') d e' \leq \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \delta \cdot m e'_k, \quad (2)$$

worin die linke Summe wegen der Existenz des Integrals konvergiert. Ferner ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} m e'_k = m A';$$

wegen der Endlichkeit von $m A'$ konvergiert auch diese Summe und folglich auch die rechte Summe von (2).

Ferner sei s_j diejenige meßbare Teilmenge von A , in der

$$j \delta \leq \Delta(P) < (j+1) \delta \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

ist. Die Menge s_{∞} , in der $\Delta(P) = \infty$ ist, besitzt das Maß Null und wird auf eine Nullmenge abgebildet; wir brauchen sie in unseren Summen daher nicht zu berücksichtigen.

Diejenige Menge, in der (1) und (3) zugleich erfüllt sind, ist $e_k s_j$, und ihr Bild ist $e'_k s'_j$. Aus (3) schließen wir mit Hilfe unserer Sätze X und XIII

$$j \delta \cdot m(e_k s_j) \leq m(e'_k s'_j) \leq (j+1) \delta \cdot m(e_k s_j),$$

wobei wir die Meßbarkeit von $e_k s_j$ wesentlich benutzen. Durch Summation nach j folgt hieraus

$$\delta \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot m(e_k s_j) \leq m e'_k \leq \delta \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \cdot m(e_k s_j), \quad (4)$$

wo die linke Summe wegen der Endlichkeit von $m e'_k$ konvergiert, die Konvergenz der rechten Summe hieraus und aus der Konvergenz von

$$\sum_{j=0}^{\infty} m(e_k s_j) = m e_k$$

folgt. Aus (2) und (4) folgt

$$\begin{aligned} \delta^2 \sum_{k=0}^{\infty} k \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot m(e_k s_j) &\leq \int_{A'} \varphi(P') d e' \leq \\ &\leq \delta^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \cdot m(e_k s_j). \end{aligned} \quad (5)$$

Hierin ist die linke Summe konvergent, wie ohne weiteres aus den benutzten Ungleichungen hervorgeht; sie läßt ferner beliebige Umordnungen zu, da sie (wie alle hier vorkommenden Summen) aus lauter positiven Gliedern besteht. Die Konvergenz der rechten Summe beweisen wir aus der linken und aus der Konvergenz folgender Summen

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} k \cdot m(e_k s_j) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot m e_k \leq \frac{1}{\delta} \int_A f(P) d e \\ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot m(e_k s_j) &= \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot m s_j \leq \frac{1}{\delta} \cdot m A' \\ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} m(e_k s_j) &= m A. \end{aligned}$$

Hieraus folgt zugleich

$$\delta^2 \sum_k \sum_j (k+1)(j+1) \cdot m(e_k s_j) - \delta^2 \sum_k \sum_j k j \cdot m(e_k s_j) \leq \chi(\delta),$$

wo

$$\chi(\delta) = \delta \int_A f(P) d e + \delta \cdot m A' + \delta^2 \cdot m A,$$

also

$$\lim_{\delta=0} \chi(\delta) = 0 \quad (6)$$

ist. Wir können somit (5) ersetzen durch

$$\begin{aligned} \delta^2 \sum_k \sum_j (k+1)(j+1) \cdot m(e_k s_j) - \chi(\delta) &\leq \int_{A'} \varphi(P') d e' \leq \\ &\leq \delta^2 \sum_k \sum_j k j \cdot m(e_k s_j) + \chi(\delta). \end{aligned} \quad (7)$$

In der Punktmenge $e_k s_j$ ist nach der Definition der e_k und s

$$k j \cdot \delta^2 \leq f(P) \cdot \Delta(P) < (k+1)(j+1) \delta^2. \quad (8)$$

Wir bilden nun folgende Mengen

$$u_p = \sum_{k,j=p} e_k s_j \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

$$v_p = \sum_{(k+1)(j+1)=p} e_k s_j \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Dadurch geht (7), wenn man nach den Produkten kj und $(k+1)(j+1)$ ordnet, über in

$$\delta^2 \sum_{p=0}^{\infty} p \cdot m v_p - \chi(\delta) \leq \int_A \varphi(P') d e' \leq \delta^2 \sum_{p=0}^{\infty} p \cdot m u_p + \chi(\delta). \quad (9)$$

Aus (8) und aus der Definition der u_p und v_p folgt, daß

$$\text{in } u_p: \quad p \delta^2 \leq f(P) \cdot \Delta(P) \quad (10 a)$$

$$\text{in } v_p: \quad p \delta^2 > f(P) \cdot \Delta(P) \quad (10 b)$$

ist. Es sei nun t_q die meßbare Menge, in der

$$q \delta^2 \leq f(P) \cdot \Delta(P) < (q+1) \delta^2 \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

ist, wobei wir unter $f(P) \cdot \Delta(P)$ den Wert Null verstehen, wenn ein Faktor verschwindet, mag der andere endlich oder unendlich sein. Da A sich höchstens um die Nullmenge s_{∞} von der Summe aller t_q unterscheidet, so hat man

$$\sum_{q=0}^{\infty} m t_q = m A, \quad (12)$$

und wegen der Endlichkeit von $m A$ ist die Summe konvergent. Nun ist

$$u_p = \sum_{q=0}^{\infty} u_p t_q, \quad v_p = \sum_{q=0}^{\infty} v_p t_q,$$

$$p \cdot m v_p = p \sum_{q=0}^{\infty} m (v_p t_q).$$

Da nun nach (10 b) und (11) diejenigen Glieder dieser Summe, für die $q \geq p$ ist, verschwinden, so gilt

$$p \cdot m v_p = \sum_{q=0}^{\infty} p \cdot m (v_p t_q) \geq \sum_{q=0}^{\infty} q \cdot m (v_p t_q),$$

also

$$\sum_{p=0}^{\infty} p \cdot m v_p \geq \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} q \cdot m (v_p t_q) = \sum_{q=0}^{\infty} q \sum_{p=0}^{\infty} m (v_p t_q) = \sum_{q=0}^{\infty} q \cdot m t_q, \quad (13)$$

wo die Konvergenz der rechten Summe aus der linken Summe folgt. Ferner ist

$$p \cdot m u_p = p \sum_{q=0}^{\infty} m(u_p t_q),$$

und da hierin nach (10 a) und (11) alle Glieder, in denen $q < p$ ist, verschwinden, so ist zunächst rein formal

$$p \cdot m u_p = \sum_{q=0}^{\infty} p \cdot m(u_p t_q) \leq \sum_{q=0}^{\infty} q \cdot m(u_p t_q), \quad (14)$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} p \cdot m u_p \leq \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} q \cdot m(u_p t_q) = \sum_{q=0}^{\infty} q \sum_{p=0}^{\infty} m(u_p t_q) = \sum_{q=0}^{\infty} q \cdot m t_q;$$

wegen (13) ist die letzte Summe aber konvergent, so daß wir aus (9) durch (13) und (14) erhalten:

$$\delta^2 \sum_{q=0}^{\infty} q \cdot m t_q - \chi(\delta) \leq \int_{A'} \varphi(P') d e' \leq \delta^2 \sum_{q=0}^{\infty} q \cdot m t_q + \chi(\delta),$$

oder

$$\int_{A'} \varphi(P') d e' = \delta^2 \sum_{q=0}^{\infty} q \cdot m t_q + \vartheta \chi(\delta) \quad (15)$$

$$1 = \leq \vartheta \leq +1.$$

Anderseits ist nach dem Mittelwertsatz, wenn das Integral existiert,

$$\delta^2 \sum_{q=0}^{\infty} q \cdot m t_q \leq \int_A f(P) \cdot \Delta(P) d e \leq \delta^2 \sum_{q=0}^{\infty} (q+1) \cdot m t_q,$$

da hierin aber die Summen wegen (12) und (13) konvergieren, so existiert das Integral. Diese Ungleichung können wir nach (12) ersetzen durch

$$\int_A f(P) \cdot \Delta(P) d e = \delta^2 \sum_{q=0}^{\infty} q \cdot m t_q + \vartheta' \delta^2 \cdot m A$$

$$0 \leq \vartheta' \leq 1.$$

Da diese Gleichung und Gleichung (15) für jedes δ gelten, so folgt unter Berücksichtigung von (6)

$$\int_{A'} \varphi(P') d e' = \int_A f(P) \cdot \Delta(P) d e.$$

Wir haben nicht nur diese Gleichung für den Fall, daß beide Integrale existieren, bewiesen, sondern wir haben überdies noch die

Existenz des zweiten Integrals aus der des ersten hergeleitet, allerdings nur unter den im Anfang dieses Paragraphen gemachten einschränkenden Voraussetzungen.

25. Unser Ziel ist es nun, diese Einschränkungen aufzuheben und ganz allgemein den Satz zu beweisen:

Satz XVIII. Ist die meßbare Punktmenge A eindeutig, stetig und meßbar auf die Punktmenge A' abgebildet und geht hiedurch die auf A definierte meßbare Funktion $F(P)$ in $\Phi(P')$ auf A' über, so ist

$$\int_{A'} \Phi(P') de' = \int_A F(P) \cdot \Delta(P) de,$$

wo aus der Existenz des einen Integrals die des anderen folgt. Dabei ist unter $F(P) \cdot \Delta(P)$ der Wert Null zu verstehen, wenn ein Faktor verschwindet, mag nun der andere endlich oder unendlich sein.

Beweis: Wir zerlegen A' in abzählbar viele meßbare Teilmengen $A'_1, A'_2, \dots$ von endlichem Maße. Es sei A_n diejenige Teilmenge von A , deren Bild A'_n ist; A_n braucht nicht meßbar zu sein, doch muß bei einer Zerlegung von A_n in eine meßbare Menge E_n und eine Minimalmenge nach § 14 die letztere auf eine Nullmenge abgebildet werden. Das Bild E'_n von E_n ist dann von endlichem Maße, und die Vereinigungsmenge aller E'_n überdeckt A' bis auf eine Nullmenge E'_0 . Ist

$$E_0 = A - (E_1 + E_2 + E_3 + \dots),$$

so ist E_0 als Differenz zweier meßbaren Mengen meßbar und hat E'_0 als Bild. Ich bilde nun die meßbaren Mengen

$$V_n = E_0 + E_1 + \dots + E_n,$$

dann ist das Bild V'_n von V_n von endlichem Maße, und es ist

$$A = V_1 + V_2 + V_3 + \dots$$

$$V_1 \prec V_2 \prec V_3 \prec \dots$$

Es sei ferner $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ eine Folge konzentrischer Quadrate mit den Seitenlängen 1, 2, 3, ... Die Menge

$$C_n = Q_n V_n$$

ist von endlichem Maße und hat ein meßbares Bild C'_n von endlichem Maße. Ferner ist zufolge der Konstruktion

$$C_1 \prec C_2 \prec C_3 \prec \dots$$

$$A = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$$

Nun sei $F(P)$ eine auf A definierte, nicht-negative meßbare Funktion und $\Phi(P')$ ihre Transformierte. Ferner sei $F_n(P)$ definiert durch

$$\begin{cases} F_n(P) = 0 & \text{in } A - C_n \\ F_n(P) = F(P) & \text{in } C_n, \text{ wenn } F(P) \leq n \\ F_n(P) = n & \text{in } C_n, \text{ wenn } F(P) \geq n \end{cases} \quad (2)$$

Dann ist $F_1(P), F_2(P), \dots$ eine monoton wachsende Folge nicht-negativer Funktionen auf A , und es ist

$$\lim_{n=\infty} F_n(P) = F(P).$$

Ebenso bilden die Transformaten $\Phi_n(P')$ von $F_n(P)$ eine monoton wachsende Folge nicht-negativer meßbarer Funktionen mit

$$\lim_{n=\infty} \Phi_n(P') = \Phi(P').$$

$F_n(P)$ ist summierbar in C_n , da es dort beschränkt ist und C_n ein endliches Maß besitzt; $\Phi_n(P')$ ist summierbar in C'_n aus denselben Gründen. Unter diesen Voraussetzungen ist aber nach § 24

$$\int_{C'_n} \Phi_n(P') d e' = \int_{C_n} F_n(P) \cdot \Delta(P) d e,$$

wofür man wegen (2) auch schreiben kann

$$\int_{A'} \Phi_n(P') d e' = \int_A F_n(P) \cdot \Delta(P) d e. \quad (3)$$

Existiert nun

$$\int_{A'} \Phi(P') d e',$$

so ist, da die $\Phi_n(P')$ monoton gegen $\Phi(P')$ konvergieren, nach einem allgemeinen Konvergenzsatz:

$$\lim_{n=\infty} \int_{A'} \Phi_n(P') d e' = \int_{A'} \Phi(P') d e'.$$

Wegen (3) muß dann auch

$$\lim_{n=\infty} \int_A F_n(P) \cdot \Delta(P) d e = \lim_{n=\infty} \int_{A'} \Phi_n(P') d e'$$

existieren, und da die Produkte $F_n(P) \cdot \Delta(P)$ monoton gegen $F(P) \cdot \Delta(P)$ konvergieren, wenn man die Produkte so versteht, daß sie verschwinden, wenn ein Faktor verschwindet, so muß

$$\lim_{n=\infty} \int_A F_n(P) \cdot \Delta(P) d e = \int_A F(P) \cdot \Delta(P) d e$$

sein. Also ist schließlich

$$\int_A F(P) \cdot \Delta(P) de = \int_{A'} \Phi(P') de',$$

wo wir die Existenz des ersten Integrals aus der des zweiten erschlossen haben. Man sieht leicht, daß man wegen (3) ebenso aus der Existenz des ersten Integrals auf die des zweiten würde schließen können.

Es sei endlich $G(P)$ eine meßbare Funktion beliebigen Vorzeichens auf A und $\Psi(P')$ ihre Transformierte auf A' . Dann sind

$$G_1 = \frac{|G| + G}{2}, \quad G_2 = \frac{|G| - G}{2}$$

meßbare, nicht-negative Funktionen auf A , wenn man noch hinzufügt, daß

$$\begin{aligned} G_1(P) &= +\infty, \quad G_2(P) = 0, & \text{wenn } G(P) &= +\infty \\ G_1(P) &= 0, \quad G_2(P) = +\infty, & \text{wenn } G(P) &= -\infty \end{aligned}$$

ist, und es ist

$$G(P) = G_1(P) - G_2(P).$$

Ist entsprechend

$$\Psi_1 = \frac{|\Psi| + \Psi}{2}, \quad \Psi_2 = \frac{|\Psi| - \Psi}{2},$$

so ist Ψ_1 die Transformierte von G_1 und Ψ_2 die von G_2 , und es ist

$$\Psi(P') = \Psi_1(P') - \Psi_2(P').$$

Dann definiert man nach Lebesgue

$$\int_{A'} \Psi(P') de' = \int_A \Psi_1(P') de' - \int_A \Psi_2(P') de'.$$

Hierauf können wir den schon bewiesenen Satz für nicht-negative Funktionen anwenden

$$\begin{aligned} \int_{A'} \Psi(P') de' &= \int_A G_1(P) \cdot \Delta(P) de - \int_A G_2(P) \cdot \Delta(P) de \\ &= \int_A \frac{|G \cdot \Delta| + G \cdot \Delta}{2} de - \int_A \frac{|G \cdot \Delta| - G \cdot \Delta}{2} de, \end{aligned}$$

wobei $|\Delta(P)| = \Delta(P)$ benutzt ist. Wenden wir auf diese Gleichung wieder die Definition an, so erhalten wir

$$\int_{A'} \Psi(P') de' = \int_A G(P) \cdot \Delta(P) de, \quad (4)$$

womit der angekündigte Satz in vollem Umfange bewiesen ist. Auch hier folgt nämlich nicht nur aus der Existenz des linken Integrals die des rechten, sondern auch die Umkehrung gilt, da man die Schlüsse rückwärts durchlaufen kann.

Ist im besonderen $G(P) = 1$ in einer meßbaren Punktmenge $S \prec A$ und Null in den übrigen Punkten von A , so ist $\Psi(P')$ gleich 1 in dem Bilde S' von S und gleich Null in den übrigen Punkten von A' . Dann hat man

$$\int_{A'} \Psi(P') d e' = \int_{S'} d e' = \int_A G(P) \cdot \Delta(P) d e = \int_S \Delta(P) d e, \quad (5)$$

$$m S' = \int_S \Delta(P) d e,$$

wobei wieder aus der Endlichkeit von $m S'$ die Existenz des Integrals folgt und umgekehrt.

26. Den Satz XVIII können wir dadurch noch in bemerkenswerter Weise verallgemeinern, daß wir die Voraussetzung der Meßbarkeit von $F(P)$ aufheben. Wir werden ohne jede weitere Voraussetzung beweisen, daß, wenn von den Integralen

$$\int_{A'} \Phi(P') d e' \quad \text{und} \quad \int_A F(P) \cdot \Delta(P) d e \quad (1)$$

eines existiert, auch das andere existiert und daß dann beide gleich sind.

Zu diesem Zwecke definieren wir in A die Funktion

$$F^*(P) = F(P), \quad \text{wenn } \Delta(P) > 0$$

$$F^*(P) = 0, \quad \text{wenn } \Delta(P) = 0.$$

Wir behaupten, daß $F^*(P)$, unter der Voraussetzung der Existenz eines der beiden Integrale (1), meßbar ist. Nehmen wir dies einmal als bewiesen an, so können wir nach Satz XVIII weiter schließen, daß

$$\int_{A'} \Phi^*(P') d e' = \int_A F^*(P) \cdot \Delta(P) d e, \quad (2)$$

wenn wir mit $\Phi^*(P')$ die Transformierte von $F^*(P)$ bezeichnen und die Existenz eines der Integrale voraussetzen. Nun ist aber nach der Definition von $F^*(P)$, unter Berücksichtigung der Festsetzung, daß das Produkt verschwindet, wenn ein Faktor verschwindet,

$$F^*(P) \cdot \Delta(P) = F(P) \cdot \Delta(P),$$

also

$$\int_A F^*(P) \cdot \Delta(P) d e = \int_A F(P) \cdot \Delta(P) d e. \quad (3)$$

Anderseits unterscheidet sich $\Phi^*(P)$ von $\Phi(P)$ höchstens in einer Nullmenge von A' . Denn $F^*(P) \neq F(P)$ findet höchstens in derjenigen Teilmenge von A statt, in der $\Delta(P) = 0$ ist, und diese Teilmenge wird wegen (5) von § 25 auf eine Nullmenge von A' abgebildet. Es ist also auch

$$\int_{A'} \Phi^*(P') d\epsilon' = \int_{A'} \Phi(P') d\epsilon', \quad (4)$$

so daß also aus (2), (3), (4) folgt

$$\int_{A'} \Phi(P') d\epsilon' = \int_A F(P) \cdot \Delta(P) d\epsilon,$$

wenn eines der Integrale existiert.

Es ist also nur noch nachzuweisen, daß $F^*(P)$ meßbar ist. Dazu brauchen wir gar nicht die ganze Voraussetzung, daß $\Phi(P')$ oder $F(P) \cdot \Delta(P)$ summierbar ist, sondern nur, daß eine von beiden Funktionen meßbar ist.

Sei zunächst $F(P) \cdot \Delta(P)$ meßbar. Dann ist in der meßbaren Teilmenge von A , in der $\Delta(P) > 0$ ist,

$$F^*(P) = \frac{F(P) \cdot \Delta(P)}{\Delta(P)},$$

also als Quotient zweier meßbaren Funktionen, von denen der Nenner nicht verschwindet, meßbar. Da ferner

$$F^*(P) = 0$$

in derjenigen meßbaren Teilmenge von A , in der $\Delta(P) = 0$ ist, so ist $F^*(P)$ überhaupt meßbar in A .

Es sei zweitens $\Phi(P')$ meßbar auf A' . Wäre nun $F^*(P)$ nicht meßbar, so gäbe es ein α , so daß diejenige Teilmenge E_α von A , in der $F^*(P) \geq \alpha$ ist, nicht-meßbar wäre. Das Bild E'_α von E_α ist aber meßbar wegen der Meßbarkeit von $\Phi(P')$. Für $\alpha > 0$ ist nämlich E'_α identisch mit derjenigen Teilmenge M'_α von A' , in der $\Phi(P') \geq \alpha$ ist. Ist ferner E_0 diejenige Teilmenge von A , in der $\Delta(P) = 0$ ist und E'_0 das Bild von E_0 , so ist für $\alpha \leq 0$ E'_α identisch mit der Vereinigungsmenge von M'_α und E'_0 , also meßbar als Vereinigungsmenge zweier meßbaren Mengen. Dagegen müßte die Menge

$$D = E_\alpha - E_\alpha E_0 \quad (5)$$

nicht-meßbar sein, da E_0 meßbar ist. Denn entweder ist $\alpha \leq 0$ und also wegen der Definition von $F^*(P)$

$$E_0 \prec E_\alpha,$$

so daß man schreiben kann

$$D = E_\alpha - E_0,$$

was als Differenz einer nicht-meßbaren und einer meßbaren Menge nicht-meßbar sein muß. Oder aber es ist $\alpha > 0$, dann ist der Durchschnitt $E_\alpha E_0$ leer, also

$$D = E_\alpha$$

auch nicht-meßbar.

Das Bild D' von D ist dagegen meßbar, denn entweder ist

$$D' = E'_\alpha$$

oder aber

$$D' = E'_\alpha - E'_0,$$

wo E'_0 als Bild der meßbaren Menge E_0 meßbar ist. Zerlegt man nun D in eine Minimalmenge N und eine meßbare Menge (vgl. § 13), so muß, weil D' meßbar ist, nach der Folgerung § 14 die Minimalmenge N und damit nach Satz IX auch jede maßgleiche Hülle von N auf eine Nullmenge abgebildet werden. Nun ist in N als Teilmenge von D wegen (5)

$$\Delta(P) > 0.$$

Also gibt es eine maßgleiche Hülle $\bar{N}$ von N , in der gleichfalls

$$\Delta(P) > 0,$$

denn die gesamte Menge $A - E_0$, in der $\Delta(P) > 0$ ist, ist meßbar und enthält N als Teilmenge. Dann müßte nach (5) von § 25

$$m\bar{N}' = \int_{\bar{N}} \Delta(P) de$$

sein, wo $\bar{N}'$ das Bild von $\bar{N}$ ist, also wegen

$$m\bar{N} = \bar{m}N > 0 \quad \text{und} \quad \Delta(P) > 0 \text{ in } \bar{N}$$

$$m\bar{N}' > 0.$$

Es sollte aber $\bar{N}$ als maßgleiche Hülle von N auf eine Nullmenge abgebildet werden. $F^*(P)$ ist also auch unter der zweiten Voraussetzung meßbar, da die entgegengesetzte Annahme auf einen Widerspruch führt. Wir haben somit bewiesen den

Satz XIX. Ist die meßbare Menge A eineindeutig, stetig und meßbar auf die Menge A' abgebildet und ist $\Phi(P')$ die Transformierte der Funktion $F(P)$ auf A , so ist

$$\int_{A'} \Phi(P') de' = \int_A F(P) \cdot \Delta(P) de,$$

wo die Existenz des einen Integrals aus der des anderen folgt. Dabei ist das Produkt $F(P) \cdot \Delta(P)$ so zu verstehen, daß sein Wert Null ist, wenn ein Faktor verschwindet.

27. Aus diesem Satze ziehen wir endlich noch einige Folgerungen über die Zusammensetzung und die Umkehrung meßbarer Abbildungen.

Die meßbare Menge A werde eineindeutig, stetig und meßbar auf die Menge A' und diese ebenso auf die Menge A'' abgebildet. Dann ist hiemit auch A auf A'' eineindeutig, stetig und meßbar abgebildet. Die Vergrößerungsverhältnisse seien

$$\begin{array}{llll} \Delta_1(P) & \text{für die Abbildung von } A & \text{auf } A' \\ \Delta_2(P') & \text{„ „ „ „ „ } A' & \text{„ } A'' \\ \Delta_3(P) & \text{„ „ „ „ „ } A & \text{„ } A''. \end{array}$$

Es sei S eine beliebige meßbare Teilmenge von A und $S' \prec A'$ und $S'' \prec A''$ ihre Bilder. Dann ist nach (5) von § 25

$$m S'' = \int_S \Delta_3(P) \, de \quad (1)$$

$$m S'' = \int_{S'} \Delta_2(P') \, de'. \quad (2)$$

Ist nun $\Delta'_2(P)$ diejenige Funktion auf A , deren Transformierte auf A' gleich $\Delta_2(P')$ ist, so folgt aus (2) nach Satz XIX

$$m S'' = \int_S \Delta'_2(P) \cdot \Delta_1(P) \, de,$$

also wegen (1)

$$m S'' = \int_S \Delta_3(P) \, de = \int_S \Delta'_2(P) \cdot \Delta_1(P) \, de \quad (3)$$

und folglich bei endlichem Maß von S''

$$\int_S \{\Delta_3(P) - \Delta'_2(P) \cdot \Delta_1(P)\} \, de = 0. \quad (4)$$

Daraus folgt aber, daß überall in A , außer höchstens in einer Nullmenge,

$$\Delta_3(P) = \Delta'_2(P) \cdot \Delta_1(P) \quad (5)$$

ist. Denn hätte z. B. diejenige meßbare Teilmenge S_0 von A , in der

$$\Delta_3(P) > \Delta'_2(P) \cdot \Delta_1(P)$$

ist, ein von Null verschiedenes Maß, so besäße wegen (5), § 25, auch das Bild S''_0 von S_0 ein von Null verschiedenes Maß. Folglich gäbe es, da man dieselben Zerlegungen wie im Anfang von § 25

ausführen kann, eine meßbare Teilmenge T_0 von S_0 , deren Bild T_0'' ein endliches, von Null verschiedenes Maß besitzt; es müßte dann wegen der Meßbarkeit der Abbildung auch

$$m T_0 > 0$$

sein. Dann wäre aber

$$\int_{T_0} \{\Delta_3(P) - \Delta'_2(P) \cdot \Delta_1(P)\} de > 0$$

im Gegensatz zu der für endliches $m T_0''$ gültigen Gleichung (4). — Da nun (5) bis auf eine Nullmenge gilt, so schließt man übrigens leicht, daß (4) für jede beliebige meßbare Teilmenge S von A gültig ist.

Ist nun die Abbildung von A auf A' mit dem Vergrößerungsverhältnis $\Delta(P)$ eineindeutig, stetig und meßbar und ist die Umkehrung dieser Abbildung auch stetig und meßbar mit dem Vergrößerungsverhältnis $\delta(P')$, so folgt aus (5), da die Abbildung einer Menge auf sich selbst überall das Vergrößerungsverhältnis 1 besitzt, daß außer höchstens in einer Nullmenge

$$\Delta(P) \cdot \delta'(P) = 1 \quad (6)$$

ist, wenn $\delta(P')$ die Transformierte von $\delta'(P)$ ist. Da dies so zu verstehen ist, daß das Produkt verschwindet, wenn $\Delta(P) = 0$ ist, so kann bei stetiger meßbarer Umkehrung

$$\Delta(P) = 0$$

nur in einer Nullmenge von A stattfinden. — Dies ist auch hinreichend für die Meßbarkeit der stetigen Umkehrung der Abbildung. Denn es sei in S $\Delta(P) \neq 0$ und $\Delta'(P')$ sei die Transformierte von $\Delta(P)$. Dann ist

$$\int_{S'} \frac{de'}{\Delta'(P')} = \int_S \frac{\Delta(P) de}{\Delta(P)} = \int_S de = m S.$$

Jeder Nullmenge S' von A' , in der $\Delta'(P') \neq 0$ ist, entspricht also eine Nullmenge S von A . Ist nun noch diejenige Teilmenge von A , in der $\Delta(P) = 0$ ist, vom Maße Null, so wird jeder Nullmenge von A' eine Nullmenge von A entsprechen. Wir haben somit das Resultat:

Satz XX. Notwendig und hinreichend dafür, daß die stetige Umkehrung einer eineindeutigen, stetigen und meßbaren Abbildung meßbar sei, ist, daß $\Delta(P) = 0$ höchstens in einer Nullmenge stattfindet.