CENNI DI ALCUNE ESPERIENZE SULLE SUPERFICIE DI CAPILLARITA';
DI R. FELICI.

§ 1. In questo anno, a Pisa, un mio amico e collega scelse la teoria della capillarità per soggetto delle sue lezioni di fisica-matematica, ed io parlando con lui delle esperienze che furono già fatte e di quelle che si sarebbero potute fare per assicurarci della esattezza della teoria fui condotto a provarmi a determinare experimentalmente la forma di alcune superficie di capillarità, disegnandone ingrandite le linee di intersezione con piani verticali. Speravo così che la teoria analitica e la esperienza si sarebbero utilmente riavvicinate, in quel campo molto interessante e non troppo limitato. La prima idea che mi venne, per raggiungere quello scopo, fu di proiettare con un microscopio solare, e sopra un piano bianco e verticale, la immagine ingrandita della superficie capillare che contorna un tubo, o una lamina immersa in un liquido, e feci appunto così: ma dapprima non avevo gran fiducia in tal mezzo, perchè mi aspettavo di avere troppe e delicate correzioni da fare al primo risultato ottenibile direttamente dalla esperienza, per ottenere il disegno della vera curva desiderata; ed infatti a tutto rigore quelle correzioni son molte, ma non così difficili come le temevo, anzi permettono con molta approssimazione il confronto fra la teoria e la esperienza.

Il microscopio solare di Soleil, che si adopera generalmente nelle esperienze dei corsi, non mi avrebbe potuto servire che con grande difficoltà; ma io avevo già da qualche tempo provveduto il Gabinetto di Pisa di un altro genere di microscopio solare, cioè dell'*apparecchio di ingrandimento* (*appareil grandissant*) che il Duboscq immaginò e costruì, e che è adoperato dai fotografi per ottenere da una comune *prova negativa* dei ritratti molto più grandi; quest'apparecchio, di cui posso per brevità tralasciare una minuta descrizione, rende molto più utili ed eleganti diverse esperienze dei corsi. Nel comune microscopio solare, deve esser talmente piccolo l'oggetto da ingrandirsi che io non avrei potuto mettere al foco di quell'apparecchio il tubo e la lastra e il liquido da sperimentarsi, e per ottenere la immagine di cui ho parlato avrei dovuto porre tali oggetti nel cono luminoso divergente fuori dell'apparecchio; ma nell'*apparecchio di ingrandimento* (1) io avevo posto sufficiente per disporvi i miei oggetti, ed avevo molta più luce e precisione nell'immagine.

Astrazione fatta da alcune lenti che servono a compensare le diverse aberrazioni o ad ingrandire maggiormente le immagini, tanto nel microscopio solare antico, fatto per oggetti microscopici e per forti ingrandimenti, quanto nel nuovo apparecchio di ingrandimento, il quale è fatto per oggetti non microscopici, ma non eccedenti circa i dieci centimetri, l'artificio ottico si riduce a produrre con una lente, sulla quale cadono i raggi solari, un cono luminoso che ha il suo vertice al foco della lente nell'interno della stanza oscura dove si sperimenta; così quel foco, quel punto, è il vertice di un doppio cono il quale da una parte ha per base quella lente, e dalla parte opposta si allarga nella stanza fino alla parete opposta alla lente, o fino ad incontrare un grande diaframma, che nelle mie esperienze era fatto da un foglio bianco teso sopra una tavoletta da disegno verticale, e perpendicolare all'asse ottico dell'apparecchio, ossia all'asse di quel doppio cono. Se un corpo opaco, o semi-trasparente, viene immerso in un luogo qualunque del cono luminoso egli intercetta, ossia leva dal cono, una

(1) Lo chiamerò così, come lo chiama il suo Autore.

porzione di raggi, e perciò sul diaframma, nel disco luminoso, si vede una macchia nera; la linea di contorno di questa macchia è la linea di intersezione del piano del diaframma con la superficie generata da tutte insieme le linee rette che partendo dal vertice del doppio cono sono tangenti alla superficie del corpo opaco. Se questo corpo è colorato e trasparente in diverso grado, come una lastra preparata per microscopii, o come una lastra fotografica, quella macchia mostra non solo la immagine dei bordi ma ancora la immagine amplificata di tutto l'oggetto; però gioverà ricordarci che l'ufficio di quella lente non è propriamente di illuminare l'oggetto, e che quella così detta immagine vien formata per *deficienza* di raggi, ed i raggi che servono a formarla non partono dall'oggetto, ma tutti partono da un punto solo

§ 2. Nel microscopio solare l'oggetto si pone molto vicino a quest'ultimo punto, e perciò l'ingrandimento è forte ma l'oggetto deve esser piccolissimo; invece nell'*apparecchio a ingrandimento* si pone lontano dal foco e vicino alla lente, e perciò l'ingrandimento è minore che nel primo caso, ma le correzioni di aberrazione delle lenti sono più facili, l'oggetto può avere una discreta superficie, e una piccola e sensibile differenza di posizione di un punto dell'oggetto dal foco, non ha, come nel primo caso, una eccessiva influenza per deformare la immagine. Cominciai dunque a disporre i miei oggetti nell'interno del nuovo apparecchio di Duboscq, accanto alla grande lente. Quegli oggetti consistevano prima di tutto in una vaschetta rettangolare di zinco, larga in centimetri 7,0 nel verso orizzontale e in un piano parallelo alla lente; profonda 2,5; larga 3,5 in senso normale al piano della lente: poi avevo un tubo di vetro grosso 0,3 e l'avevo adattato ad un piccolo pezzo metallico col quale potevo alzarlo, abbassarlo ed inclinarlo a volontà, sull'acqua che riempiva la vaschetta. Avevo poi il modo di muovere parimente la vaschetta senza smuovere veruna altra parte dell'apparecchio.

Versavo acqua nella vaschetta fino a che il livello essendo più alto dei bordi vi si mantenea per capillarità, e facevo in modo che tal superficie di livello fosse di poco più bassa del-

l'asse ottico ed orizzontale dell'apparecchio. Regolando con la vite di richiamo il sistema di lenti che non ho descritto, e che sta presso il foco di quella prima lente, ottenevo ben presto a circa 5^m,92 da quel foco, e sul diaframma bianco, la immagine oscura di una parte della vaschetta, ed una linea di demarcazione finissima mi indicava il livello superiore ed orizzontale del liquido. Tal linea di demarcazione variava un poco di apparenza a seconda che io regolavo quella vite, e in generale mi attenevo, per disegnare una orizzontale sul diaframma, alla prima linea oscura per diffrazione. Ma tal linea non era esattamente dritta che per più di due terzi del campo, e diveniva sensibilmente curva approssimandosi ai bordi laterali della vaschetta; di ciò tenevo conto, e ad ogni modo mi rimaneva un campo utile sufficiente, purchè non adoperassi tubi di troppo forte diametro.

La determinazione del punto ove l'asse ottico dell'apparecchio incontrava il diaframma non mi diede molta noia, perchè mi bastò farla per approssimazione, e perchè feci uso dell'artificio seguente:

Poniamo che il raggio solare cada normale alla lente, ossia nella direzione dell'asse dell'apparecchio; e l'anzidetta vite di richiamo sia regolata in modo che sul diaframma siano ben decisi i contorni dell'immagine di un oggetto collocato nell'apparecchio, come ad esempio quel tubo di vetro immerso nell'acqua della vaschetta. Se tutto sarà così bene centrato, vedremo sul diaframma, nel mezzo del campo illuminato, diversi anelli colorati e concentrici, centrati essi pure esattamente nel mezzo del campo. Questo sistema di anelli ha nell'apparecchio una causa qui inutile a dirsi, e non è per le nostre esperienze di alcun nocumento; ma appena che si sposta il raggio solare dall'asse ottico si vede quel sistema dividersi in due, l'uno di essi più sbiadito dell'altro, e si vedono col raggio solare muoversi sul diaframma in due versi opposti, vieppiù separandosi. Dunque per *centrare* il raggio solare, ossia per dirigerlo nell'asse ottico, facendo uso del semplice eliostato a mano di Soleil, basta far sì che que' due sistemi di anelli si sovramettano perfettamente; e così è ugualmente facile trovar con bastante approssimazione il punto che è il centro del campo, ossia il

punto di riscontro dell'asse ottico sul diaframma, e quindi è pur facile collocare il diaframma normalmente a quell'asse, e l'asse del tubo di vetro esattamente nel piano verticale che passa parimente per l'asse ottico medesimo. Non voglio già dire che a quel modo si ottenga una esatissima centrazione, e che non sia desiderabile e non difficile il farne una migliore, ma per ora e per il nostro scopo basta; perchè a momenti vedremo come difenderci dalla cattiva influenza che un errore di centrazione potrebbe avere nelle nostre esperienze.

Debbo avvertire che se il mezzo del campo non è adombrato que' pallidi anelli poco o nulla si vedono; ma allora per renderli visibilissimi basterà intercettare la parte interna del cono luminoso, e in vicinanza dell'apparecchio, con un piccolo disco, o con un corpo opaco qualunque, che si leva appena fatta la centrazione. Io feci uso di un eliostata a mano, e mi conveniva andar continuamente, ad intervalli piccoli di tempo, a centrare il raggio; e con l'eliostata fornito del suo movimento di orologeria, avrei potuto fare le esperienze più comodamente, ma siccome avrei dovuto prepararlo e montarlo da me solo, e nell'ore calde di Luglio, così, conti fatti, scelsi il partito di non farne uso. Mi propongo di provare un semplice lume a gas od a petrolio, se mai riprenderò a fare simili esperienze.

Proiettando sul diaframma la immagine di corpi di forme conosciute, mi assicurai che nei limiti del campo che dovevo adoperare, l'apparecchio non mi deformava sensibilmente le immagini; e viddi ancora che alla distanza circa di 5^m,92 dal foco l'ingrandimento era 40.

§ 3. Se la superficie di livello della vaschetta sarà di poco lontana dall'asse ottico, e un poco più in basso, e se il raggio dell'eliostata sarà ben centrato come si è detto, si vedrà il campo del diaframma diviso in due grandi parti, l'una bianca e l'altra nera; la linea che dividerà queste parti l'una dall'altra sarà più o meno ben definita a seconda che si sarà regolato il foco dell'apparecchio con la vite di richiamo. Se la vaschetta avesse nel senso dell'asse ottico una maggior larghezza della nostra, o se il raggio dell'eliostata fosse inclinato in

modo che l'asse del cono luminoso volgesse in basso, e così cadesse obliquamente sull'acqua della vaschetta, allora si vedrebbe sul diaframma la immagine della superficie orizzontale dell'acqua, ma collocato che sarà il tubo, o la lamina di vetro nell'apparecchio, e resa così visibile sul diaframma la proiezione ingrandita della superficie di capillarità sarà ben presto acquistata dall'esperimentatore pratica sufficiente per collocare la vaschetta più o meno lontana dall'asse ottico, e per registrare la vite di richiamo in modo che sul diaframma si disegni nettamente e decisa la proiezione cercata. E quando tutto sarà discretamente aggiustato si vedranno lungo la linea curva di proiezione, delle belle e nitide linee di diffrazione che serviranno di guida per disegnarla poi con molta esattezza.

Ma qual'è la proiezione cercata, e qual'è quella che è realmente data dall'apparecchio sul diaframma? Sia il caso della lamina, e sia questa verticale e nel piano che passa per l'asse ottico. Io avevo una lamina di vetro di quindici millimetri di larghezza ed uno di grossezza, e ne vedevo per costola, la immagine sul diaframma; l'acqua che aderiva alla lamina cadendo simmetricamente da ambi i lati, formava, proiettata essa pure sul diaframma, due curve uguali fra di loro e simmetriche, e che a poco a poco, a certa distanza, venivano a confondersi col livello orizzontale. Quelle due curve, cioè quelle due linee di separazione fra il bianco e il nero sul diaframma potevano essere ben definite, ben nette per disegnarsi, ben caratterizzate da quelle anzidette di diffrazione, regolando la vite di richiamo, e così bene non lo potevano essere in pari tempo che le linee dei bordi della lamina; fra queste linee non correva una troppo grande ed imbarazzante differenza di precisione, ma mi dovevo curar delle linee curve date dalla proiezione della superficie capillare e porre esse *al fuoco*. Or queste linee sono le intersezioni, o la intersezione di due superficie, l'una delle quali è il piano verticale del diaframma, e l'altra è la superficie conica che nasce dal moto di una retta infinita che passando sempre per il foco dell'apparecchio si appoggia costantemente nel suo movimento, sulla superficie capillare. La linea di appoggio di quella retta, ossia di contatto e di tangenza della superficie conica con la capillare, è in generale a doppia curvatura, ed

ha per proiezione, ingrandita, la curva piana visibile sul diaframma.

La curva di cui cerchiamo la proiezione ingrandita, è differente da quella curva di tangenza di quelle superficie; essa è la curva di intersezione del piano verticale che passa per il mezzo e normalmente alla lamina, con la superficie di capillarità; ma siccome il foco dell'apparecchio, che è il vertice di quella siffatta superficie conica, è molto lungi dalla superficie di capillarità, e siccome le dimensioni di quest'ultima sono relativamente piccole, e i raggi limiti che danno l'immagine di quelle curve fanno piccoli angoli con l'asse ottico, così sperai che quella curva di tangenza a doppia curvatura e la linea di cui cercavo la proiezione di poco differissero fra di loro, od almeno che la proiezione sul diaframma di quella prima linea mi potesse dar la seconda, mediante una semplice correzione.

Per eseguire quella correzione, o per verificare fino a che punto la curva disegnabile sul diaframma mi poteva rappresentare la proiezione cercata, aggiunsi all'apparecchio un ago molto acuminato e sottile che stava nell'apparecchio al disopra e vicino alla superficie capillare, rivolto verso di essa, e in un piano verticale normale alla lamina di vetro; e circa nel mezzo, si potea muovere avvicinandosi od allontanandosi dalla superficie capillare per mezzo di due viti micrometriche, delle quali una lo movea verticalmente e l'altra secondo la orizzontale. Nel caso del tubo facevo in modo che l'ago si muovesse nel piano verticale parallelo alla lente e passante per l'asse del tubo. Quest'ago era saldato all'estremità di una verghetta metallica che potea ricevere diverse inclinazioni, in guisa che l'ago potea sempre incidere normalmente sulla superficie capillare. Potevo valutare il movimento dell'ago con quelle viti stesse micrometriche, oppure osservandone la immagine sul diaframma.

Ciò disposto, si trattava di verificare se la curva ottenuta sul diaframma era o no, o di quanto differiva dalla curva di intersezione del piano verticale sul quale si muoveva l'ago, con la superficie capillare. A quest'oggetto, mentre tutto era bene centrato, avvicinavo la punta dell'ago alla superficie capillare dell'acqua con le viti micrometriche osservando quella punta sul diaframma. Se vedevo la punta dell'immagine dell'ago inol-

trarsi e nascondersi dentro l'ombra della superficie capillare senza che la curva di divisione, fra l'ombra e il campo bianco, si deformasse ne concludevo che la curva cercata non era quella che vedevo; ma continuando ad avanzare l'ago una subitanea deformazione alfine si produceva, ed ognun vede come con la vite micrometrica avrei potuto eseguire la sopra indicata correzione. Se poi al contrario vedevo deformarsi sul diaframma quella curva, e l'acqua aderire e salire sull'ago, prima che l'ombra dell'ago toccasse quella della superficie capillare, ne traevo la stessa conclusione, e potevo fare quella stessa correzione. Ma se poi vedevo che sensibilissimamente succedeva una deformazione nella curva sul diaframma appena quelle due ombre apparivano a contatto, allora concludevo potersi senz'errore sensibile prendere la curva visibile sul diaframma per la vera proiezione cercata. Quando nelle mie esperienze ero troppo lontano da quest'ultimo caso, modificavo la proiezione della vaschetta, ed arrivavo così a determinare lungo la curva quali erano le piccole correzioni da farsi, e in ciò mi servivano di guida molto utilmente le curve di diffrazione.

Però in tale esperienza vi è cosa che può imbarazzare; ed è che per essere sicuri dell'istante in cui l'ombra dell'ago e della superficie capillare si toccano bisogna che esse siano al fuoco dell'apparecchio contemporaneamente: nel caso di un tubo ciò si può ottenere con molta facilità, ma nel caso della lamina bisogna contentarsi talora di prendere una media fra i due fuochi, e talora di porre al fuoco esattamente il solo ago, contentandoci che una linea di diffrazione rimanga sempre assai distinta sul diaframma per indicare il cammino della curva. Anche questo è un inconveniente che spero di levare in seguito facilmente.

Ora non ci rimane altro che a disegnare la curva sul diaframma; questo è facile, si fa prestissimo e con molta esattezza. Prima di tutto mi assicuravo che tutto era ben centrato, e poi stendevo con la mano un foglio sul diaframma ove era la curva da disegnarsi, e rapidamente ne marcavo col lapis tre o quattro punti soltanto, assai lontani fra di loro; ciò fatto ritoccavo o facevo ritoccare l'eliostata per rimediare alla scentrazione prodotta in quel tempo dal movimento del sole, e su-

bito riapplicando il foglio e quei quattro punti sulla curva ne rimarcavo degli altri, e via dicendo. Quando i punti marcati erano sufficienti, segnavo col lapis per continuità la curva, e poi la portavo sul diaframma per vedere se coincideva esattamente; e se così era tenevo fermo il foglio e col mezzo di una linea orizzontale che, come già lo dissi, avevo già tracciata sul diaframma, segnavo sul foglio volante due punti appartenenti alla stessa orizzontale, e poi col filo a piombo vi segnavo, per riprova, la verticale. Questo disegno era poi tirato in penna il meglio possibile, ed era confrontato con la curva del diaframma nei giorni seguenti, fino a che non mi restasse alcun dubbio sulla sua esattezza sufficiente. Per trasparenza disegnavo la curva nell'altra faccia del foglio, e così me ne potevo servire per verificare la curva di capillarità dall'altra parte della lamina o del tubo, onde difendermi da un errore di centrazione, che, se fosse stato sensibile, avrebbe cagionata una differenza di forma fra le curve, a dritta ed a sinistra del tubo o della lamina, nell'immagine sul diaframma.

§ 4. In questo genere di esperienze vi è una causa di errore che può essere talvolta non avvertita, e grave: è la difficoltà che ha l'acqua per aderire perfettamente al vetro. Nel caso del tubo è più facile ripararvi; ma per la lamina mi fu così difficile che per evitare un errore tagliai una lunga striscia di carta larga come la lamina od un poco meno, e poi la stesi su di una faccia della lamina già bagnata di acqua nel verso della lunghezza della lamina, e poi ripiegandola sotto la lamina ne coprii l'altra faccia, e in modo che la carta stesse bene aderente al vetro anche quando tutto era immerso nell'acqua. Le due estremità della striscia di carta erano fissate stabilmente alla parte superiore della lamina. Con tal mezzo l'acqua aderiva sempre alla lamina, perchè inzuppava la superficie immersa; ma del resto, senza la carta, la superficie capillare faceva quasi sempre un angolo con la parete della lamina, e non vi era tangente; nè mi servì il tenere quel vetro in una soluzione saturata di potassa caustica bollente, o nell'acido nitrico, nè mi servirono tutte le altre cure che mi diedi; ottenevo soltanto che l'acqua vi aderisse bene per i primi istanti dell'esperienza,

ma appena il vetro cominciava ad asciugare nella parte emersa, vedevo formarsi un angolo là dove la curva doveva essere tangente alla parete. Del resto mi risultò che la curva rimaneva la stessa sia che la lamina fosse di vetro o di carta o di metallo.

La superficie capillare non può certo, analiticamente parlando, cangiar di natura passando dall'uno di que' casi all'altro; ma siccome è difficile la misura dell'angolo anzidetto, così io volevo pormi nelle condizioni le più semplici, e più atte al confronto fra la teoria e la esperienza; e quando la equazione della superficie capillare per un dato caso particolare sia dedotta dalle formule generali, quel confronto può sempre servire a decidere sulla verità della teoria, e la miglior cosa che si possa fare è quella di non rendere incerte le condizioni dell'esperienza, assoggettandola a far molte misure, impossibili rigorosissimamente.

Io offro qui come primo saggio (*Tav. I.*) la curva ingrandita di intersezione di un piano verticale con la superficie di capillarità, che si forma simmetricamente da un lato e dall'altro di una lamina immersa nell'acqua. Questa curva si determina meno facilmente di quella che si potrebbe ottenere prendendo un tubo invece della lamina, perchè nel primo caso è assai più che nel secondo piccolo l'errore che può derivare dalla differenza di distanza focale fra l'ago e la curva che è proiettata sul diaframma. Ma pel caso del tubo non è ancor nota la equazione della superficie capillare, mentre che lo è per la lamina; e così potremo confrontare utilmente la teoria alla esperienza. Vero è che nel calcolo si è dovuto supporre infinita la lamina; ma siccome aumentando la larghezza della lamina io non vidi variare sensibilmente la forma della curva, così quel confronto potrà aver luogo con tutta la desiderabile approssimazione. Per non fare una tavola troppo grande, ho tralasciato di riportar qui il disegno della parte estrema della curva che finirebbe coll'essere sensibilmente orizzontale.

La figura non mostra che una parte sola della curva, ossia un solo suo ramo, perchè l'altro che corrisponderebbe all'altra faccia della lamina gli sarebbe perfettamente uguale, ma rivolto in senso contrario. La linea Oz rappresenta la faccia bagnata della

lamina che sarebbe normale al piano della figura; e la linea Ox rappresenta il livello orizzontale del liquido.

In quelle due linee, od assi, e nella posizione del punto in cui termina la curva sull'asse verticale esiste un'incertezza piccola sì ma pressochè inevitabile; perchè è impossibile di precisare quel punto di tangenza della curva entro limiti minori di uno o due millimetri, per la ragione che la curva è appunto tangente all'asse, e non vi termina bruscamente a un tratto formandovi un angolo sensibile; poi e per la causa precedente e perchè i limiti della lamina non possono, come lo dicemmo, essere esattamente al fuoco contemporaneamente all'ago ed alla curva, così un errore di un millimetro circa nella posizione dell'asse verticale della z è possibile anch'esso; finalmente l'asse delle x , l'orizzontale, è anch'esso leggermente incerto di un millimetro. Ma nulladimeno la curva si presta già ad un alto grado di precisione, perchè nel confronto con il calcolo è agevole il tener conto di così piccoli errori e perchè la forma della curva rimane sempre esattamente determinata. Nella tavola qui unita si unirà a quegli errori citati anche l'errore che sarà avvenuto nel copiare la curva; ma ad onta di tutto ciò l'errore totale rimarrà compreso nei limiti di un millimetro circa.

Dalla già nota teoria della capillarità si deduce per quella curva la equazione seguente, riferita agli assi oz , ed ox .

$$x = -\frac{a}{\sqrt{2}} \log \tan^{\frac{1}{2}} \phi - \sqrt{2} \cdot a \cos \phi + c,$$

avendosi

$$\frac{z}{a\sqrt{2}} = \sin \phi.$$

Io fin ora non ebbi la pazienza di cercare quale valore deve darsi alla a perchè la curva si accordi il più possibile coi valori di quell'equazione; mi contentai di assicurarmi che facendo $a = 118,5$ millimetri, e poi mettendo per z ed x nell'equa-

zione i valori che trovavo nella curva, avevo successivamente per c dei valori poco differenti fra di loro, e che potevano esser ridotti a coincidere variando z od x di quantità così piccole che mi persuasi che quella equazione era conforme al vero; ma il valor vero di a non sarà precisamente quello. Del resto i valori di quella costante devono variare per i diversi liquidi, e per le diverse temperature.