IV. *Mathematische Theorie der Gleitstellen elektrischer Ströme;*

von Dr. Most,

Ordentl. Lehrer an d. Friedrich-Wilhelmsschule zu Stettin.

I. Elektromotorische Wirkung der Gleitstellen.

Gleitstelle ist diejenige Stelle eines elektrischen Stromes, in welcher derselbe eine plötzliche Aenderung seiner Geschwindigkeit erleidet; es ist gewissermaßen, um das Bild des Stromes festzuhalten, eine Cascade im elektrischen Strome. Diese plötzliche Aenderung der Stromgeschwindigkeit wird bekanntlich dadurch bewirkt, daß Leiterstücke des Stromes mit verschiedener Bewegung an einander entlang gleiten. Ist $ABCD$ (Fig. 1 Taf. I) die Bahn eines geschlossenen Stromes und bewegt sich das Stück α mit einer Geschwindigkeit c , das Stück β mit der Geschwindigkeit c_1 , so sind die Stellen A , B und C Gleitstellen, und zwar, wie Neumann unterscheidet, A und C Gleitstellen mit ruhender Unterlage, dagegen B eine Gleitstelle mit beweglicher Unterlage. Neumann hat, ein eigenes Inductionsgesetz aufstellend, den Ausdruck für die Induction eines geschlossenen Stromes mit Gleitstellen auf einen geschlossenen Leiter zu einem eleganten Theorem ¹⁾ entwickelt; indess fand er Schwierigkeit, sein durch das Experiment beglaubigtes Resultat aus dem Weber'schen Grundgesetze abzuleiten. Weber hat diese Schwierigkeit gehoben ²⁾, freilich nur für Gleitstellen mit fester Unterlage und unter der Voraussetzung, daß an den Gleitstellen keine scharfen Winkel wären; um die Rechnung der Beobachtung entsprechen zu lassen, hat Weber außerdem ein Glied des Resultates unterdrückt, doch, unserer Meinung nach, aus nicht zurei-

1) Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme von F. E. Neumann S. 1 und ff.

2) Elektrodynamische Maassbestimmungen von Wilh. Weber S. 327 ff.

chenden Gründen. Denn, wenn in dem gefundenen Ausdruck ¹⁾

$$- \frac{a}{4} \frac{i\alpha\alpha'}{r^2} u \tau (\cos \vartheta^2 - 2 \sin \vartheta^2) \cos \vartheta' - \frac{1}{2} \frac{\alpha\alpha'}{r} a i \cos \vartheta \cos \vartheta'$$

τ die Zeit bezeichnet, in welcher die plötzliche Aenderung der Geschwindigkeit in der Gleitstelle vor sich geht, und τ deshalb als verschwindend klein anzusehen ist, so braucht darum noch nicht das ganze Stück zu verschwinden, denn neben der kleinen Gröfse τ steht der unendlich grofse Factor u , welcher die Geschwindigkeit der Elektrizität bezeichnet; τ müfste also eine unendlich kleine Gröfse zweiter Ordnung seyn, wenn das erste Glied wirklich verschwinden sollte; ob diefs unter allen Umständen geschieht, mufs das Experiment feststellen. In den von Neumann ²⁾ und ebenso in den von Weber ³⁾ angestellten Experimenten hat sich das besagte Glied freilich nicht bemerkbar gemacht, allein das ist kein Beweis, denn in den Apparaten beider Beobachter ist der Weg der Gleitstelle eine geschlossene Curve und es läfst sich beweisen, dafs für diesen Fall der neben τ auftretende Factor

$$\iint \frac{\alpha\alpha'}{r^2} (\cos \vartheta^2 - 2 \sin \vartheta^2) \cos \vartheta'$$

verschwinden mufs.

Die experimentellen Untersuchungen derjenigen Fälle, in denen die Gleitstelle nicht geschlossene Bahnen zurücklegt, verschieben wir auf eine spätere Untersuchung; hier sollen zunächst die allgemeinen Ausdrücke für die inducto-
rische Wirkung einer Gleitstelle entwickelt werden.

B bezeichne den Ort einer Gleitstelle mit beweglicher Unterlage, α (Fig. 1 Taf. I) habe in dem Punkte B die Geschwindigkeit c , β in demselben Punkte die Geschwindigkeit c_1 ; der von α nach β übergelende positive Strom, dessen Stromgeschwindigkeit $+u$ ist, setzt also in der Gleitstelle seine seitliche Geschwindigkeit c in die Geschwindig-

1) E. M. S. 330.

2) M. Th. i. Str. S. 59 ff.

3) E. M. S. 317. ff.

keit c_1 um, dagegen giebt der von β nach α mit der Geschwindigkeit — u fließende negative Strom seine Geschwindigkeit c_1 auf und nimmt die Geschwindigkeit c an. Man bezeichne nun mit s_0 die Richtung, in welcher die Elektrizität in der Gleitstelle aus einem Draht in den andern überfließt; diese Richtung wird erklärlicher Weise durch die Lage der beiden gleitenden Drähte und durch die Berührungsstelle beider bestimmt; gleitet z. B. eine Feder an einem Messingstreifen entlang, wie es in den Apparaten von Neumann und Weber geschah, so fällt s_0 mit der Richtung von α und β an der Berührungsstelle zusammen; wird aber α auf β gedrückt und gleiten beide Drähte unter diesem Druck an einander entlang, so würde s_0 eine quer durch α und β gehende Richtung haben.

Somit erhalten wir bei der Gleitstelle für eine Zeit zwischen 0 und τ , d. h. zwischen dem Eintritt und Austritt des Stromes

$$(1) \quad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds_0} u + \frac{dr}{do} \gamma + \frac{dr}{do_1} \gamma_1,$$

wo γ kleiner als c , γ_1 kleiner als c_1 ist und o und o_1 die Richtungen von c und c_1 bezeichnen; r bezeichnet, wie gebräuchlich, die Verbindungslinie von der Gleitstelle nach dem Leiterelemente $d\sigma$, t stellt die Zeit dar. Berechnet man den zweiten Differentialquotienten mit der Rücksicht, daß alle Größen außer u variable sind, so erhalten wir den Ausdruck

$$\begin{aligned} (2) \quad 2r \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{dr^2}{dt^2} &= 2r \frac{dr}{do} \frac{d\gamma}{dt} + 2r \frac{dr}{do_1} \frac{d\gamma_1}{dt} \\ &+ u^2 \left(2r \frac{d^2 r}{ds_0^2} - \frac{dr^2}{ds_0^2} \right) + \gamma^2 \left(2r \frac{d^2 r}{do^2} - \frac{dr^2}{do^2} \right) \\ &+ \gamma_1^2 \left(2r \frac{d^2 r}{do_1^2} - \frac{dr^2}{do_1^2} \right) + 2u\gamma \left(2r \frac{d^2 r}{ds_0 do} - \frac{dr}{ds_0} \frac{dr}{do} \right) \\ &+ 2u\gamma_1 \left(2r \frac{d^2 r}{ds_0 do_1} - \frac{dr}{ds_0} \frac{dr}{do_1} \right) + 2\gamma\gamma_1 \left(2r \frac{d^2 r}{do do_1} - \frac{dr}{do} \frac{dr}{do_1} \right). \end{aligned}$$

Wenn nun obige Ausdrücke für den positiven Strom gelten, so ist zu berücksichtigen, daß für den negativen Strom u , $\frac{d\gamma}{dt}$ und $\frac{d\gamma_1}{dt}$ das Zeichen wechseln; von dem Letzteren über-

zeugt man sich leicht, wenn man bedenkt, daß der positive Strom die Geschwindigkeit aufgibt, welche der negative annimmt und umgekehrt; zu gleicher Zeit erkennt man aus dieser Reflexion, daß der positive und negative Strom dieselben Werthe γ und γ_1 durchmachen. Multiplicirt man also den Ausdruck (2) mit $+e$ und den nach den letzten Andeutungen aus jenem abgeleiteten Ausdruck mit $-e$ und addirt beide Ausdrücke, so erhält man

$$\Sigma e \left(2r \frac{d^2 r}{ds^2} - \frac{dr^2}{dt^2} \right) = e \left[4r \frac{dr}{ds} \frac{d\gamma}{dt} + 4r \frac{dr}{ds_1} \frac{d\gamma_1}{dt} \right. \\ \left. + 4u\gamma \left(2r \frac{d^2 r}{ds_0 ds} - \frac{dr}{ds_0} \frac{dr}{ds} \right) + 4u\gamma_1 \left(2r \frac{d^2 r}{ds_0 ds_1} - \frac{dr}{ds_0} \frac{d\gamma_1}{ds_1} \right) \right].$$

Dieser Ausdruck ist nun noch für die Zeit des Geschwindigkeitsumsatzes, also von o bis τ zu integrieren; man erhält

$$\int_{\tau}^0 \frac{d\gamma}{dt} d\tau = -c \qquad \int_0^{\tau_1} \frac{d\gamma_1}{dt} d\tau = c, \\ \int_0^{\tau} \gamma d\tau = \frac{c\tau}{2} \qquad \int_0^{\tau_1} \gamma_1 d\tau = o, \frac{\tau}{2};$$

in den letzten Integralen ist angenommen, wie es schon Weber als das Natürlichste hingestellt hat, daß γ und γ_1 sich proportional der Zeit ändern, streng genommen wäre für den positiven Strom das Integral $\int_{\tau}^0 (c - \gamma) d\tau$ zu nehmen, wo γ auch proportional der Zeit zu nehmen ist, allein man erkennt, daß auch dieses Integral, wie von vorn herein zu vermuthen war, den Werth $c \frac{\tau}{2}$ giebt. Man erhält also für die Zeit τ :

$$(2) \int e d\tau \left(2r \frac{d^2 r}{ds^2} - \frac{dr^2}{dt^2} \right) = e \left[-4r \frac{dr}{ds} c + 4r \frac{dr}{ds_1} c_1 \right. \\ \left. + 2uc\tau \left(2r \frac{d^2 r}{ds_0 ds} - \frac{dr}{ds_0} \frac{dr}{ds} \right) + 2uc_1\tau \left(2r \frac{d^2 r}{ds_0 ds_1} - \frac{dr}{ds_0} \frac{dr}{ds_1} \right) \right].$$

Da nun in der Zeit dt eine Elektricitätsmenge $u dt$ durch die Gleitstelle geht, so hat man obigen Ausdruck, indem man noch die nach dem Weber'schen Gesetze nöthigen

Factoren hinzufügt und die elektromotorische Kraft auf ein Leiterstück $d\sigma$ bezieht, mit

$$+ \frac{a^2}{8} \frac{u dt}{r^2} d\sigma \frac{dr}{d\sigma}$$

zu multipliciren. Hierbei ist mit e' bereits dividirt, da die elektromotorische Kraft gewöhnlich auf die Einheit der Elektrizitätsmenge in der Längeneinheit bezogen wird.

Berücksichtigen wir zunächst den Ausdruck

$$- \frac{dr}{do} c dt + \frac{dr}{do_1} c_1 dt:$$

α und β (Fig. 2 Taf. I) mögen in der Zeit dt in die beliebigen Lagen α' und β' übergegangen seyn, so daß BE die Größe $c dt$ und BF die Größe $c_1 dt$ darstellt; die beiden Stromelemente EG und GF , welche durch diese Bewegung neu eingetreten sind, mögen mit $d\alpha$ und $d\beta$ bezeichnet werden, so ergibt sich, wenn wir das Viereck $EGFB$ in der eben bezeichneten Richtung auf r projectiren, daß

$$d\alpha \frac{dr}{d\alpha} + d\beta \frac{dr}{d\beta} - c_1 dt \frac{dr}{do_1} + c dt \frac{dr}{do} = 0$$

ist, so daß wir für den zu betrachtenden Ausdruck

$$d\alpha \frac{dr}{d\alpha} + d\beta \frac{dr}{d\beta}$$

schreiben können; setzen wir ferner für aeu die Stromintensität i ein, so erhalten wir für die elektromotorische Kraft, welche die Gleitstelle in der Zeit dt auf das Leiterelement $d\sigma$ ausübt, den Werth:

$$(4) \quad \frac{a}{2} i \frac{d\alpha}{r} d\sigma \frac{dr}{d\alpha} \frac{dr}{d\sigma} + \frac{a}{2} i \frac{d\beta}{r} d\sigma \frac{dr}{d\beta} \frac{dr}{d\sigma} \\ + \frac{a}{4} \frac{i dt}{r^2} d\sigma \frac{dr}{d\sigma} u \tau \left[c \left(2r \frac{dr}{ds_0} \frac{dr}{do} - \frac{dr}{ds_0} \frac{dr}{do} \right) \right. \\ \left. + c_1 \left(2r \frac{dr}{ds_0} \frac{dr}{do_1} - \frac{dr}{ds_0} \frac{dr}{do_1} \right) \right].$$

Führt man in den beiden ersten Stücken die cosinus der Winkel ϑ , ϑ_1 und η ein, welche $d\alpha$, $d\beta$ und $d\sigma$ mit r , respective mit der verlängerten r bilden, so ist:

$$\frac{dr}{d\alpha} = -\cos \vartheta \quad \frac{dr}{d\beta} = -\cos \vartheta, \quad \frac{dr}{d\sigma} = \cos \eta$$

wodurch die besprochenen Stücke übergehen in:

$$-\frac{a}{2} \frac{id\alpha}{r} d\sigma \cos \vartheta \cos \eta - \frac{a}{2} \frac{id\beta}{r} d\sigma \cos \vartheta, \cos \eta.$$

Dieser Ausdruck giebt aber bekanntlich auch die elektromotorische Kraft für den Fall an, wenn in $d\alpha$ und $d\beta$ die Stromintensität von o auf i steigt. Man erkennt hieraus also, daß auch bei einer Gleitstelle mit beweglicher Unterlage sich die Vermuthung Neumanns ¹⁾ bestätigt, welche Weber ²⁾ bereits für eine Gleitstelle mit fester Unterlage bewiesen hat, daß nämlich der Einfluß der Gleitstelle die elektromotorische Kraft der ein- oder austretenden Stromelemente verdoppelt. Für austretende Elemente verwandelt sich in den obigen Ausdrücken das Zeichen in das entgegengesetzte, wie man leicht sieht, wenn man sich die der Fig. 2 Taf. I entsprechende Figur vorstellt.

Wichtig für Rechnungen allgemeiner Art ist aber noch die Bemerkung, daß die Vermuthung Neumanns nicht volle Geltung behält, wenn die Stromintensität i variabel ist, oder wenn der Leiter σ bewegt wird, oder wenn beides der Fall ist.

Der Kürze wegen betrachten wir gleich den letzten allgemeinen Fall: die Geschwindigkeit des Leiterelements $d\sigma$ werde durch v ausgedrückt und die Richtung dieser Geschwindigkeit durch ω , so erkennt man, daß sich Gleichung (1) nur um das Stück $\frac{dr}{d\omega} v$ vermehrt, Gleichung (2) aber um den Ausdruck:

$$2r \frac{dr}{ds_0} \frac{du}{dt} + 2uv \left(4r \frac{d^2r}{ds_0 d\omega} - \frac{dr}{ds_0} \frac{dr}{d\omega} \right) \\ + 2\gamma v \left(2r \frac{d^2r}{d\sigma d\omega} - \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{d\omega} \right) + 2\gamma_1 v \left(2r \frac{d^2r}{d\sigma_1 d\omega} - \frac{dr}{d\sigma_1} \frac{dr}{d\omega} \right).$$

Nimmt man nun mit den so erweiterten Gleichungen die im Vorigen angedeuteten Operationen vor, so erhält man schließ-

1) M. Th. i. Str. S. 62.

2) E. M. S. 330.

lich an Stelle der Gleichung (4) für die elektromotorische Kraft der Gleitstelle in der Zeit dt , in welcher die Stromintensität um $\frac{di}{dt} dt$ steigt und der Leiter aus der Lage σ' in die Lage σ'' übergeht:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \frac{a}{2} i \frac{d\alpha}{r} d\sigma \frac{dr}{d\alpha} \frac{dr}{d\sigma} + \frac{a}{2} i \frac{d\beta}{r} d\sigma \frac{dr}{d\beta} \frac{dr}{d\sigma} \\
 & + \frac{a}{2} \frac{1}{r} \frac{di}{dt} dt d\sigma \frac{dr}{ds_0} \frac{dr}{d\sigma} u\tau \\
 & + \frac{a}{2} \frac{idt}{r^2} d\sigma \frac{dr}{d\sigma} u\tau \left[\frac{c}{2} \left(2r \frac{d^2r}{ds_0 d\sigma} - \frac{dr}{ds_0} \frac{dr}{d\sigma} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{c_1}{2} \left(2r \frac{d^2r}{ds_0 d\sigma_1} - \frac{dr}{ds_0} \frac{dr}{d\sigma_1} \right) + v \left(2r \frac{d^2r}{ds_0 d\omega} - \frac{dr}{ds_0} \frac{dr}{d\omega} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Aus diesem Ausdruck sieht man, daß die neueintretenden Stromelemente $d\alpha$ und $d\beta$, in Bezug auf die durch die Gleitstelle hervorgebrachte Induction, auf den Anfangswerth i der Stromintensität und die Anfangslage σ' des Leiters zu beziehen sind; dagegen liegt es auf der Hand, daß diese Elemente, in Bezug auf ihre eigene Induction, sich auf den Endwerth $i + \frac{di}{dt} dt$ der Stromintensität und die Endlage σ'' des Leiters beziehen müssen, so daß also allgemein von einer Verdoppelung der Inductionswirkung durch die Gleitstelle nicht die Rede seyn kann.

Was nun die mit $u\tau$ behafteten Glieder anbetrifft, so läßt sich die Klammergröße des zweiten bedeutend einfacher schreiben, wenn man die Resultante aus $\frac{c}{2}$, $\frac{c_1}{2}$ und $-v$, wo $-v$ eine dem $+v$ entgegengesetzte Richtung haben soll, mit w und deren Richtung mit p bezeichnet, denn dann ist

$$w \frac{dr}{dp} = \frac{c}{2} \frac{dr}{d\sigma} + \frac{c_1}{2} \frac{dr}{d\sigma_1} + v \frac{dr}{d\omega},$$

so daß für die Klammergröße der Ausdruck:

$$w \left(2r \frac{d^2r}{ds_0 dp} - \frac{dr}{ds_0} \frac{dr}{dp} \right)$$

geschrieben werden kann. — Die Größe $u\tau$, wie Weber es gethan hat, der Null gleich zu setzen, können wir uns,

vor einer genauen experimentellen Prüfung, nicht entschließen, vielmehr meinen wir, es lasse sich über diese GröÙe *a priori* Folgendes feststellen: $u\tau$ ist gleich dem Wege ds_0 zu setzen, welcher uns den Uebergang von einem Drahte zum andern darstellt; dafs ds_0 der Null gleich zu setzen sey, darf nicht als ausgemacht angesehen werden, vielmehr ist anzunehmen, dafs ds_0 sowohl seiner Länge wie seiner Richtung nach eine Function von c , c_1 und deren Richtungen o und o_1 ist; wird c gleich c_1 und o gleich o_1 , so hat ds_0 dieselbe Länge und Lage, wie wenn die Drähte α und β in Ruhe sind, doch ist es wahrscheinlich, dafs sich ds_0 nicht nur auf die Berührungsstelle bezieht, sondern dafs es als ein Leiterelement angesehen werden kann, welches in α und β eindringt; je verschiedener c und c_1 , o und o_1 sind, desto gröÙser läÙt sich ds_0 vermuthen. Halten wir diese Bedeutung von ds_0 fest, so läÙt sich der von den neu eintretenden Stromelementen unabhängige Theil der elektromotorischen Kraft einer Gleitstelle schreiben:

$$(6) \quad \frac{a}{2} \frac{ds_0}{r} \frac{di}{dt} dt ds \frac{dr}{ds_0} \frac{dr}{d\sigma} + \frac{a}{2} \frac{idt}{r^2} d\sigma \frac{dr}{d\sigma} ds_0 w \left(2r \frac{d^2 r}{ds_0 dp} - \frac{dr}{ds_0} \frac{dr}{dp} \right).$$

Um sich das Integral dieses Ausdruckes anschaulich zu machen, denke man sich den von der Gleitstelle B beschriebenen Weg $B_1 B_u$ unendlich dicht mit unendlich kurzen Stromstücken ds_0 besetzt, deren Stromintensität die ist, welche der Strom in der entsprechenden Lage ds_0 der Gleitstelle hatte; man wird sich also einen Leiter denken müssen, der im Allgemeinen nicht der Länge nach, sondern der Quere nach durchströmt wird. Wird nun in jedem ds_0 die Stromintensität um di vermehrt und erhält jedes Element des Querstromes $B_1 B_u$ die aus $\frac{c}{2}$ und $\frac{c_1}{2}$ resultirende Geschwindigkeit für die Zeit dt , während der Leiter σ aus der Lage σ' in die Lage σ'' übergeht, so hat die dadurch in σ hervorgebrachte Induction den Integral-

werth des Ausdruckes (6) für den Weg der Gleitstelle von B_1 nach B_2 .

Man erkennt aus obiger Darstellung, daß man wohl zu der Hoffnung berechtigt ist, den von ds_0 herrührenden elektromotorischen Einfluß experimentell nachweisen zu können. Freilich in den Apparaten von Neumann und Weber mußte er vollständig verschwinden, wie sich leicht zeigen läßt. Die Stromintensität war constant, der Leiter σ in Ruhe und die Gleitstelle hatte eine ruhende Unterlage, so daß in dem zweiten Theil der Ausdrücke (5) di , v und c der Null gleich gesetzt werden müssen; da ferner das bewegliche Leiterstück des Stromes aus einer Feder besteht, welche gegen einen Messingstreifen drückt, so fällt nicht nur ds_0 sondern auch o_1 , die Richtung von c_1 , in die Curve s der ruhenden Unterlage, hier des Messingstreifens. Man erhält also bei diesen Apparaten für den Theil der elektromotorischen Kraft der Gleitstelle, welcher von den neu eintretenden Stromelementen unabhängig ist, den Werth:

$$(7) \quad \frac{\sigma}{4} \frac{i}{r^2} d\sigma \frac{dr}{d\sigma} ds u r \left(2r \frac{d^2 r}{ds^2} - \frac{dr^2}{ds^2} \right),$$

wo $ds = c_1 dt$ ist. Da man nun der KlammergröÙe leicht die Form $\frac{d^2 r^2}{ds^2} - 3 \frac{dr^2}{ds^2}$ geben kann, welche gleich $2 - 3 \cos^2 \theta^2$ ist, so ergibt sich (7) als der von Weber bereits abgeleitete Ausdruck ¹⁾. Derselbe muß für die oben erwähnten Apparate längs einer geschlossenen Curve s integrirt werden.

Zunächst müssen wir einige brauchbare Umformungen des nach den Richtungen a , b und c genommenen Differentialausdruckes

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dc} \left(2r \frac{d^2 r}{da db} - \frac{dr}{da} \frac{dr}{db} \right)$$

zeigen.

Man übersieht leicht, daß sich die Gleichung aufstellen läßt:

$$(8) \quad \frac{dr}{dc} \left(2r \frac{d^2 r}{da db} - \frac{dr}{da} \frac{dr}{db} \right) = \frac{dr}{dc} \left(\frac{d^2 r^2}{da db} - 3 \frac{dr}{da} \frac{dr}{db} \right).$$

1) E. M. S. 330,

Ferner ist:

$$\frac{d \cdot \frac{1}{r} \frac{dr}{da} \frac{dr}{db}}{dc} = \frac{1}{4} \frac{d \cdot \frac{1}{r^3} \frac{d \cdot r^2}{da} \frac{d \cdot r^2}{db}}{dc}$$

$$= -3 \frac{1}{r^3} \frac{dr}{da} \frac{dr}{db} \frac{dr}{dc} + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{d^2 r^2}{da dc} \frac{dr}{db} + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{dr}{da} \frac{d^2 r^2}{db dc}.$$

Leitet man durch Vertauschung von b und c und durch Vertauschung von a und c die entsprechenden Ausdrücke ab, so übersieht man leicht, daß man schreiben kann:

$$(9) \quad \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2 r^2}{da db} - 3 \frac{dr}{da} \frac{dr}{db} \right) \frac{dr}{dc} =$$

$$\frac{d \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{db} \frac{dr}{dc} \right)}{da} - \frac{d \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{da} \frac{dr}{db} \right)}{dc} + \frac{d \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{dc} \frac{dr}{da} \right)}{db}.$$

Integriert man nun den Ausdruck (7) nach s und σ , so kann man das Integral nach (8) und (9) schreiben:

$$\frac{a}{2} i u \tau \iint \frac{d \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right)}{ds} ds d\sigma - \frac{a}{4} i u \tau \iint \frac{d \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{dr^2}{ds^2} \right)}{d\sigma} d\sigma ds.$$

Da nun s und σ geschlossene Curven sind, so verschwinden beide Integrale, mithin sagen die von Neumann und Weber angestellten Experimente über $u\tau$ Nichts aus.

II. Rechnungen mit Gleitstellen bei geschlossenen Strömen.

In dem Folgenden soll theils die Anwendung der eben gewonnenen Resultate gezeigt werden, theils soll die Beziehung, welche das Neumann'sche Inductionsgesetz zu dem Weber'schen Grundgesetz hat, ins volle Licht gesetzt werden. Die letztere Aufgabe hat bereits Hr. Schering behandelt; so viel aber aus dem in diesen Annalen ¹⁾ gegebenen Auszuge hervorgeht, hat er die Gleitstellen und damit die Hauptschwierigkeit unberücksichtigt gelassen, denn die Gleitstellen waren es, welche eine Controverse ²⁾ zwischen dem Neumann'schen und Weber'schen Gesetze hervorriefen. Unter Voraussetzung der Gleitstellen läßt

1) Pogg. Ann. Bd. 104, S. 266.

2) M. Th. i. Str. p. 62.

sich das Neumann'sche Theorem aus den von Hrn. Schering aufgestellten Ausdrücken, deshalb nicht unmittelbar ableiten, weil die nach ds und ds' derivirten Functionen¹⁾ für die Gleitstellen eine Stetigkeitsunterbrechung erleiden und folglich nicht bei der Integration verschwinden; aus demselben Grunde dürfen sie auch nicht ohne genaue Prüfung der in der Anmerkung stehenden Ausdrücke gleichgesetzt werden.

Es erweitere sich der geschlossene Strom $s = A, B, C, D$ (Fig. 3 Taf. I) mit der Stromintensität i , zu dem geschlossenen Strome $s_{\alpha} = A_{\alpha}, B_{\alpha}, C_{\alpha}, D$ mit der Stromintensität i_{α} ; zu gleicher Zeit gehe der Leiter σ aus der Lage σ in die beliebige Lage σ_{α} über: es ergeben sich dann als Inductionsquellen;

- 1) die Bewegung des Leiters σ ,
- 2) die Bewegung der Stromstücke α und β aus der Lage und Größe α , und β , in die Lage und Größe α_{α} und β_{α} ,
- 3) die Intensitätserhöhung von i auf i_{α} in α , β und C, DA ,
- 4) die Intensitätserhöhung von σ auf i_{α} in A, A_{α} und C_{α}, C ,
- 5) die Wirkung der Gleitstellen in A , B und C ; bei denselben soll nur der von den neu eintretenden Stromstücken abhängige Einfluss berücksichtigt werden, da der mit dem Factor ut behaftete Einfluss im Ausdruck (6) schon genügend fixirt ist.

Betrachten wir zunächst die Erweiterung des Stromes s aus der Lage $s' = EFOD$ in die nahe Lage $s'' = GHND$ unter Erhöhung der Stromintensität i' um di' und mit gleichzeitiger Bewegung des Leiters σ aus der Lage σ' in die Lage σ'' ; die Punkte E und O mögen nach J und M übergehen, der Punkt F auf α gehe nach K , F auf β aber nach L , so dass EG , GJ , KH , HL , MN und NO die neu eintretenden Stromstücke andeuten, FH aber den Weg der Gleitstelle B bezeichnet.

Nach dem Weber'schen Grundgesetze ergibt sich,

¹⁾ Pogg. Ann. Bd. 104, S. 272.

dafs die von der Bewegung des Leiters σ abhängige Inductionswirkung ausgedrückt wird durch:

$$\frac{1}{2} \iiint_{\sigma} \frac{s' \sigma'}{r^2} d\sigma \frac{dr}{d\sigma} \left(\frac{d^2 r^2}{ds d\omega} - 3 \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\omega} \right) ds d\omega,$$

wo die Integrationsgränzen anzeigen, dafs nach ds und $d\sigma$ längs der geschlossenen Curven s' und σ' integrirt werden soll; $d\omega$ bezeichnet den Weg von $d\sigma$. Bezeichnet man entsprechend den Weg von ds mit δo , welche Gröfse bei den festen Stromtheilen der Null gleich gesetzt werden mufs, so wird die von der Bewegung des Stromes herrührende Inductionswirkung durch:

$$\frac{1}{2} \iiint_{\sigma} \frac{s' \sigma'}{r^2} d\sigma \frac{dr}{d\sigma} \left(\frac{d^2 r^2}{ds d\sigma} - 3 \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right) ds d\sigma$$

gegeben. Setzt man:

$$(10) \quad \frac{dr}{d\omega} d\omega = \frac{dr}{d\sigma} d\sigma + \frac{dr}{ds} d\omega,$$

so lassen sich beide Wirkungen zusammenfassen in dem Ausdruck:

$$(11) \quad \frac{1}{2} \iiint_{\sigma} \frac{s' \sigma'}{r^2} d\sigma \frac{dr}{d\sigma} \left(\frac{d^2 r^2}{ds d\omega} - 3 \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\omega} \right) ds d\omega,$$

welcher nach (9) auch geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \iiint_{\sigma} \frac{s' \sigma'}{r^2} d\sigma \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} d\omega ds d\sigma + \frac{1}{2} \iiint_{\sigma} \frac{s' \sigma'}{r^2} d\sigma \frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{d\omega} d\omega ds d\sigma \\ & - \frac{1}{2} \iiint_{\sigma} \frac{s' \sigma'}{r^2} d\sigma \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\omega} d\omega d\sigma ds; \end{aligned}$$

hierbei ist $d\omega$ mit in das Differential gesetzt worden, um anzudeuten, dafs s' und σ' ganz beliebige Formveränderung bei ihrer Bewegung erleiden können. Führt man für $\frac{dr}{d\omega} d\omega$ seinen Werth nach (10) wieder ein, so erkennt man, dafs

das 3. Integral vollständig verschwindet, da σ' eine geschlossene Curve ist; obgleich nun σ' auch eine geschlossene Curve ist, so verschwindet das 2. Integral doch nicht, weil $\frac{dr}{d\sigma} \delta\sigma$ in den Gleitstellen, Stetigkeitsunterbrechungen erleidet; da $\delta\sigma$ für ODE der Null gleich ist, so erhält man:

$$(12) \frac{1}{2} \iint_{\sigma} \iint_{\sigma'} i' \frac{d}{ds} \cdot \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \delta\sigma ds d\sigma + \frac{1}{2} \iint_{\sigma} \int_{\sigma'} i' \frac{d}{ds} \cdot \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \delta\sigma ds d\sigma.$$

Führt man das 2. Integral längs α' und β' aus, so erhält man für dasselbe, wenn sich r' auf σ' bezieht:

$$\int_{\sigma} i' \frac{dr}{r} \frac{d\sigma}{ds} \left(FK \frac{dr}{d\sigma} - EJ \frac{dr}{d\sigma} \right) d\sigma + \int_{\sigma} i' \frac{dr}{r} \frac{d\sigma}{ds} \left(OM \frac{dr}{d\sigma_1} - FL \frac{dr}{d\sigma_1} \right) d\sigma,$$

wo sich $\frac{dr}{d\sigma}$ und $\frac{dr}{d\sigma_1}$ stets auf den danebenstehenden Factor bezieht. Addirt man zu diesen Ausdrücken die von den Gleitstellen herrührenden elektromotorischen Wirkungen, indem wir von den mit ur behafteten Gliedern, wie schon oben angedeutet, absehen; nach (5) erhält man für dieselben:

$$\int_{\sigma} i' \frac{dr}{r} \frac{d\sigma}{ds} \left(EG \frac{dr}{ds} + GJ \frac{dr}{ds} + KH \frac{dr}{ds} + HL \frac{dr}{ds} + MN \frac{dr}{ds} + NO \frac{dr}{ds} \right) d\sigma,$$

wo sich $\frac{dr}{ds}$, $\frac{dr}{ds}$, $\frac{dr}{ds}$ und $\frac{dr}{ds}$ wieder auf die danebenstehenden Factoren beziehen. Bei der Addition der beiden letzten Ausdrücke ist nun zu berücksichtigen, daß für EG , GJ und JE der Werth von r' als derselbe angesehen werden kann, ebenso für FK , KH , HL und LF und endlich für OM , MN und NO ; ferner sieht man, daß

$$\begin{aligned} EG \frac{dr}{ds} + GJ \frac{dr}{ds} - EJ \frac{dr}{ds} &= 0 \\ (13) \quad FK \frac{dr}{d\sigma} + KH \frac{dr}{ds} + HL \frac{dr}{ds} - FL \frac{dr}{d\sigma_1} &= 0 \\ \text{und } OM \frac{dr}{d\sigma_1} + MN \frac{dr}{ds} + NO \frac{dr}{ds} &= 0 \end{aligned}$$

ist; damit ergibt sich, daß die Summe jener Ausdrücke verschwindet und nur das 1. Integral aus (12) übrig bleibt. In s' steigt die Stromintensität um di' ; sieht man i als Function von w an, so wird die durch die Intensitätserhöhung hervorgerufene Induction ausgedrückt durch:

$$\frac{1}{2} \iiint_0^{s'} \frac{di}{dw} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \delta w ds d\sigma.$$

Diesen Ausdruck kann man in das Integral aus (22) ziehen und erhält dann:

$$(14) \quad \frac{1}{2} \iiint_0^{s'} \frac{di}{dw} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \delta w ds d\sigma.$$

Führt man die Integration nach w aus, so ergibt sich das Doppelintegral:

$$\frac{1}{2} \int_{i's}^{i''S} \int_{\sigma'}^{\sigma''} \frac{di}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} ds d\sigma,$$

wo mit S die Summe $JK + LM + ODE$ bezeichnet seyn soll. Nimmt man nun noch die Inductionswirkung der neu-eintretenden Elemente hinzu, welche sich, wenn r'' sich auf σ'' bezieht, in dem Ausdruck

$$\frac{1}{2} \int_0^{\sigma''} \frac{di''}{r''} \left(EG \frac{dr}{ds} + GJ \frac{dr}{d\alpha} + KH \frac{dr}{d\alpha} + HL \frac{dr}{d\beta} + MN \frac{dr}{d\beta} + NO \frac{dr}{ds} \right) \frac{dr}{d\sigma} d\sigma$$

darstellt, so ergänzt sich S zu s'' und man erhält:

$$(15) \quad \frac{1}{2} \int_{i's}^{i''s''} \int_{\sigma'}^{\sigma''} \frac{di}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} ds d\sigma.$$

Die Integrationsgränzen sollen andeuten, daß von dem Integrale mit i'' , längs s'' und σ'' genommen, das Integral mit i' , längs s' und σ' genommen, subtrahirt werden soll. In diesem Sinne erhält man als Inductionswirkung eines geschlossenen Stromes, welcher aus der Anfangslage s mit

der Stromintensität i , übergeht in die Endlage s'' mit der Stromintensität i'' , auf einen Leiter, welcher zu gleicher Zeit aus der Lage σ , in die Lage σ'' übergeht, den Ausdruck:

$$(16) \quad \frac{1}{2} \int_{i, s, \sigma}^{i'', s'', \sigma''} \int \frac{i}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} ds d\sigma.$$

Dies ist aber das elegante Theorem, welches von Neumann als ein Princip der mathematischen Theorie der inducirten elektrischen Ströme bezeichnet wird¹⁾. Neumann führt gewöhnlich den cosinus des zwischen ds und $d\sigma$ liegenden Winkels ein; da

$$\frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{d^2 r^2}{ds d\sigma} = \frac{d^2 r}{ds d\sigma} + \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma}$$

ist und das Stück $\frac{d^2 r}{ds d\sigma}$ bei einer Integration längs einer geschlossenen Curve s oder σ verschwindet, so kann man für (16) auch schreiben:

$$(17) \quad \frac{1}{2} \int_{i, s, \sigma}^{i'', s'', \sigma''} \int \frac{i}{r} \frac{d^2 r^2}{ds d\sigma} ds d\sigma.$$

Will man das Neumann'sche Inductionsgesetz aus den vorigen Untersuchungen ableiten, so hat man nur zu bedenken, daß (15) sowohl wie (16) und (17) sich ansehen lassen als das Integral von:

$$\frac{d \cdot i P(s, \sigma)}{dt} \delta w$$

oder auch, wenn wir die Zeit t selbst als die unabhängige Variable ansehen, als das Integral von:

$$(18) \quad \frac{d \cdot i P(s, \sigma)}{dt} dt = \frac{di}{dt} P(s, \sigma) + i \frac{d \cdot P(s, \sigma)}{dt} dt,$$

$$\text{wo } P(s, \sigma) = \frac{1}{2} \iint_0^s \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} ds d\sigma \text{ oder } = \frac{1}{2} \iint_0^{\sigma} \frac{1}{r} \frac{d^2 r^2}{ds d\sigma} ds d\sigma$$

ist. Der Ausdruck (18) stellt das von Neumann in seiner Abhandlung §. 4 S. 42 aufgestellte Gesetz dar; das zweite Stück in (18) kann leicht auf die von Neumann

1) *M. Th. i. Str. p. 157f.*

in den vorhergehenden Paragraphen angegebene Form zurückgeführt werden; man nehme, unter Beibehaltung der früher gebrauchten Bezeichnungen an, daß $EFOD$ und $GHCD$ (Fig. 3 Taf. I) zwei unendlich nahe Lagen sind, dann ist:

$$(19) \quad \frac{d \cdot P(s, \sigma)}{dt} dt = \frac{d \cdot P(s, \sigma)}{d\omega} \delta\omega + \frac{d \cdot P(s, \sigma)}{d\sigma} \delta\sigma \\ + \frac{1}{2} \int_0^{\sigma'} \frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} d\sigma \left[EG \frac{dr}{ds} + GJ \frac{dr}{d\alpha} + KH \frac{dr}{da} \right. \\ \left. + HL \frac{dr}{d\beta} + MN \frac{dr}{d\beta} + NO \frac{dr}{ds_1} \right].$$

Mit Benutzung der Gleichungen (13) läßt sich das letzte Glied ausdrücken durch:

$$- \frac{1}{2} \int_0^{\sigma'} \frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} d\sigma \left(FK \frac{dr}{d\sigma} - EJ \frac{dr}{d\sigma} \right) - \frac{1}{2} \int_0^{\sigma'} \frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} d\sigma \left(OM \frac{dr}{d\sigma_1} - FL \frac{dr}{d\sigma_1} \right) \\ = - \frac{1}{2} \int_0^{\sigma'} \int_0^{\alpha'} d \cdot \frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{d\sigma} \frac{\delta\sigma}{d\alpha} d\alpha d\sigma - \frac{1}{2} \int_0^{\sigma'} \int_0^{\beta'} d \cdot \frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{d\sigma_1} \frac{\delta\sigma_1}{d\beta} d\beta d\sigma \\ = - \frac{1}{2} \int_0^{\sigma'} \int_0^{s'} d \cdot \frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{d\sigma} \frac{\delta\sigma}{ds} ds d\sigma;$$

bei der Ableitung des letzten Ausdruckes aus dem vorletzten ist zu berücksichtigen, daß für ODE die Verschiebung $\delta\sigma$ der Null gleich ist. Die Integrale:

$$\frac{1}{2} \iiint_0^{\sigma'} \int_0^{\sigma'} d \cdot \frac{1}{r} \frac{dr}{d\omega} \frac{dr}{d\sigma} \frac{\delta\omega}{ds} ds d\sigma \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \iiint_0^{\sigma'} \int_0^{\sigma'} d \cdot \frac{1}{r} \frac{dr}{d\omega} \frac{dr}{ds} \frac{\delta\omega}{d\sigma} d\sigma ds$$

sind ebenfalls der Null gleich, da s' und σ' geschlossene Curven sind; daß die Stetigkeitsunterbrechung für $\frac{dr}{d\omega} \delta\omega$ in den Gleitstellen daran Nichts ändert, wird leicht übersehen. Geben wir beiden Integralen das negative Zeichen

und legen sie zu der rechten Seite der Gleichung (19), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d \cdot P(s, \sigma)}{dt} dt &= \frac{1}{2} \iiint_{0 \ 0}^{s' \ \sigma'} d \cdot \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \delta w \, ds \, d\sigma \\ &- \frac{1}{2} \iiint_{0 \ 0}^{s' \ \sigma'} d \cdot \frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dr}{dw} \delta w \, ds \, d\sigma - \frac{1}{2} \iiint_{0 \ 0}^{s' \ \sigma'} d \cdot \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{dw} \delta w \, d\sigma \, ds \end{aligned}$$

Wenden wir hierauf die Gleichung (9) an, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} (20) \quad \frac{d \cdot P(s, \sigma)}{dt} dt &= - \frac{1}{2} \iiint_{0 \ 0}^{s' \ \sigma'} \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2 r^2}{ds \, d\sigma} - 3 \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right) \frac{dr}{dw} \delta w \, ds \, d\sigma, \end{aligned}$$

womit die §. 3 S. 33 aufgestellte Form des Neumann'schen Gesetzes gefunden ist. Das Gesetz Neumann's offenbart sich in dem Obigen als die geniale Apperception einer Summe von elektromotorischen Kräften, welche aus den verschiedensten Inductionsquellen stammen.

Ungemein einfach gestalten sich obige Entwicklungen für den Fall, welchen Hr. Schering behandelt hat, d. h. für den Fall, welcher keine Gleitstellen im Inducenten annimmt. Nach dem Weber'schen Gesetz werden die durch Bewegung des Stromes und des Leiters und die durch die Intensitätserhöhung erregten elektromotorischen Kräfte ausgedrückt durch:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iiint_{0 \ 0}^{s \ \sigma} \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2 r^2}{ds \, dw} - 3 \frac{dr}{ds} \frac{dr}{dw} \right) \frac{dr}{d\sigma} \delta w \, ds \, d\sigma \\ + \frac{1}{2} \iiint_{0 \ 0}^{s \ \sigma} \frac{1}{r} \frac{di}{dw} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \delta w \, ds \, d\sigma, \end{aligned}$$

welcher Ausdruck nach (9) übergeht in:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \iiint_0^s \frac{i}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \delta w \, ds \, d\sigma - \frac{1}{2} \iiint_0^s \frac{d}{ds} \cdot \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} d\sigma \, ds \, dw \\
& + \frac{1}{2} \iiint_0^s \frac{d}{ds} \cdot \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{dw} ds \, dw \, d\sigma.
\end{aligned}$$

Da s und σ geschlossene Curven sind und die Gröſsen unter dem Integralzeichen keine Stetigkeitsunterbrechungen erleiden, so ist das zweite und dritte Integral der Null gleich. Unterdrücken wir beide, so haben wir das Neumann'sche Theorem; geben wir dem dritten Integral das negative Zeichen, so haben wir das Neumann'sche Inductionsgesetz, denn nach (9) geht der Ausdruck dann über in:

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \iiint_0^s \frac{i}{r^2} \left(\frac{d^2 r^2}{ds \, d\sigma} - 3 \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \right) \frac{dr}{dw} \delta w \, ds \, d\sigma \\
& + \frac{1}{2} \iiint_0^s \frac{1}{r} \frac{di}{dw} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} \delta w \, ds \, d\sigma.
\end{aligned}$$

III. Elektrodynamische Wirkung der Gleitstellen.

Wenn auch das Neumann'sche Inductionsgesetz sich als der einfachste Ausdruck complicirter Erscheinungen zeigt, so bleibt es doch immerhin wunderbar, daß dieſes Gesetz, welches der Erfahrung ohne Berücksichtigung der Gleitstellen abstrahirt war, an denselben keine Schwierigkeit fand. Den Grund hierfür darin zu finden, daß sich, wie Neumann und Weber hervorheben, das Neumann'sche Gesetz auf geschlossene Ströme bezöge, will uns nicht einleuchten; unsere Vermuthung geht vielmehr dahin, daß das von Neumann aufgestellte Gesetz zufälligerweise eine Form war, welche das Glück hatte, von den Gleitstellen nicht beeinflusst zu werden; und wirklich läßt sich nachweisen, daß wenn man von dem mit ur behafteten Gliede absieht,

der elektrodynamische Einfluss einer Gleitstelle verschwindet. Benutzt man die in den ersten Entwicklungen gebrauchten Bezeichnungen, so ist:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds_0} u + \frac{dr}{d\sigma} u' + \frac{dr}{d\sigma} \gamma + \frac{dr}{d\sigma_1} \gamma_1 + \frac{dr}{d\omega} v,$$

wo u' die im Leiter σ angenommene Stromgeschwindigkeit bezeichnet. Danach ist dann:

$$2r \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{dr^2}{dt^2} = 2r \frac{dr}{ds_0} \frac{du}{dt} + \Sigma \alpha \alpha' \left(2r \frac{d^2 r}{d\beta d\beta'} - \frac{dr}{d\beta} \frac{dr}{d\beta'} \right),$$

wo α und α' alle Werthe von u, u', γ, γ' und v, β und β' aber die dazugehörigen Werthe von $s_0, \sigma, \sigma, \sigma_1$ und ω durchzumachen haben. Multiplicirt man diese Gleichung mit $+e$ und, nachdem man u und $\frac{du}{dt}$ mit dem entgegengesetzten Zeichen versehen hat, mit $-e$ um dann beide Gleichungen zu addiren, so erhält man:

$$\Sigma e \left(2r \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{dr^2}{dt^2} \right) = 4er \frac{dr}{ds_0} \frac{du}{dt} + \Sigma 4eu\alpha' \left(2r \frac{d^2 r}{ds_0 d\beta} - \frac{dr}{ds_0} \frac{dr}{d\beta} \right),$$

wo α' nur noch die Werthe u', γ, γ_1 und v hat. Multiplircirt man die letzte Gleichung mit $+e'$ und, nachdem man für $+u'$ eingesetzt hat $-u'$, mit $-e'$, um dann zu addiren, so erhält man:

$$\Sigma e e' \left(2r \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{dr^2}{dt^2} \right) = 8uu'ee' \left(2r \frac{d^2 r}{ds_0 d\sigma} - \frac{dr}{ds_0} \frac{dr}{d\sigma} \right);$$

Integrirt man nun den letzten Ausdruck nach dr für die Zeit τ , berücksichtigt man, dass für die Zeit dt durch die Gleitstelle die Elektricitätsmenge $u dt$ geht, und setzt man, nachdem mit $\frac{a^2}{16} \frac{u dt}{r^2} d\sigma$ multiplicirt worden ist, $aeu = i$ und $aeu' = 1$, so wird die elektrodynamische Wirkung einer Gleitstelle für die Zeit dt auf ein Leiterstück $d\sigma$, welches von einem Strom mit der Intensität 1 durchflossen gedacht wird, ausgedrückt durch:

$$(21) \quad \frac{1}{2} i \frac{u \tau}{r^2} dt d\sigma \left(2r \frac{d^2 r}{ds_0 d\sigma} - \frac{dr}{ds_0} \frac{dr}{d\sigma} \right).$$

Der elektrodynamische Einfluss ist also, wenn man von diesem mit ur behafteten Gliede absieht, der Null gleich.

Was dieß Glied selbst anbetrifft, so erkennt man leicht, daß es, selbst wenn es nach der Analogie des Neumann'schen Gesetzes mit $\frac{dr}{dw} \delta w$ multiplicirt wird, mit dem von uns in (6) entwickelten Ausdruck nicht übereinstimmt. Eine Erweiterung des Neumann'schen Gesetzes also auf das mit ur behaftete Glied ist nicht zulässig. Daß der zuletzt gewonnene Ausdruck (21) das Zutrauen zu dem Ausdruck (6) nicht erschüttern kann, ist gewiß, denn 1) ist (6) nach dem Weber'schen Grundgesetz entwickelt und 2) steht (6) mit der Erfahrung in Uebereinstimmung. Man nehme nämlich an, α und β hätten (Fig. 2 Taf. I) in dem Punkte B dieselbe Geschwindigkeit c in derselben Richtung o , dann hört der Punkt B auf eine Gleitstelle zu seyn und der den gegebenen Bedingungen gemäß umgeformte Ausdruck (6) muß die elektromotorische Kraft eines Stromelementes ds_0 darstellen, welches sich mit der Geschwindigkeit c bewegt und in welchem die Stromintensität i um di steigt, während das Leiterstück $d\sigma$ mit der Geschwindigkeit v bewegt wird. Und wirklich, wenn $c = c_1$ und $o = o_1$ gesetzt wird, so wird der in (6) auftretende Ausdruck $w \frac{dr}{dp}$ nicht mehr bestimmt durch die Gleichung:

$$w \frac{dr}{dp} = \frac{c}{2} \frac{dr}{do} + \frac{c_1}{2} \frac{dr}{do_1} + v \frac{dr}{d\omega},$$

sondern durch die Gleichung:

$$w \frac{dr}{dp} = c \frac{dr}{do} + v \frac{dr}{d\omega}.$$

Stellen wir zum Schlufs die Resultate obiger Untersuchungen zusammen, so ergibt sich Folgendes:

1. Die Experimente von Neumann und Weber beweisen nicht, daß man berechtigt sey, bei Berechnung der elektromotorischen Kraft einer Gleitstelle die mit ur behafteten Glieder fortzulassen, denn in jenen Experimenten beschreibt die Gleitstelle eine geschlossene Curve und für diesen Fall wird der neben ur auftretende Factor der Null gleich.

2. Die Vermuthung Neumann's, daß die Wirkung der Gleitstelle eine Verdoppelung der Inductionswirkung der neu eintretenden Stromelemente veranlasse, bestätigt sich bei unveränderlicher Stromintensität und ruhendem Leiter; ist aber die Stromintensität variabel und der inducirte Leiter in Bewegung, so müssen die neu eintretenden Stromelemente in Betreff ihrer eigenen Induction auf die Endwerthe i' und σ'' , in Betreff der durch die Gleitstellen hervorgebrachten Induction aber auf die Anfangswerthe i' und σ' bezogen werden.

3. Mit Benutzung von 2) läßt sich das elegante Theorem Neumanns, so wie das von ihm aufgestellte Gesetz mit voller Allgemeinheit, d. h. unter Berücksichtigung der Gleitstellen aus dem Weber'schen Grundgesetz ableiten, jenes zeigt sich dabei als eine geschickte Summation aller von den verschiedensten Quellen herrührenden Inductionswirkungen.

4. Das Neumann'sche Inductionsgesetz ist darum eine so glückliche Form, weil dieselbe von den Gleitstellen nicht beeinflusst wird, da die elektrodynamische Wirkung, außerhalb des mit $u\tau$ behafteten Gliedes, Null ist. Für dieses Glied ist das Neumann'sche Gesetz nicht einer Erweiterung fähig, es muß vielmehr der in (6) gewonnene Ausdruck benutzt werden.

V. Ueber die Aggregatzustände der unzerlegten Körper; von P. Kremers.

Die früher (Bd. 120, S. 630) zusammengestellten Atome erscheinen je nach Temperatur und Luftdruck in drei verschiedenen Aggregatzuständen, dem festen, dem flüssigen und dem gasförmigen. Der mittlere dieser drei Zustände ist für jedes einzelne Atom charakteristisch ebensowohl hinsichtlich seines Umfanges als auch hinsichtlich seiner Lage.