Algebraische und gruppentheoretische Untersuchungen aus dem Gebiet der Differentialgleichungen.

Von Dr. Alfred Loewy in München.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit stellt sich, wie es der Titel angibt, die Aufgabe, algebraische und gruppentheoretische Untersuchungen über Differentialgleichungen anzustellen. Die algebraischen Untersuchungen setzen zunächst die Fixierung eines Rationalitätsbereiches voraus; nach der Festlegung eines solchen kann in allgemein gültiger Weise der Begriff einer irreduciblen Differentialgleichung eingeführt werden. Um eine völlige Analogie mit der Algebra herzustellen, erwies es sich als unbedingt nothwendig, den Begriff einer relativ irreduciblen Differentialgleichung aufzustellen. Nach dem Vorgang der Algebra definiere ich dann aus einem Rationalitätsbereich vermöge Differentialgleichungen entstammende transcendente Functionen, um von hieraus zu gewissen Gattungen von Differentialgleichungen überzugehen, denen nur eine endliche Anzahl transscendenter Functionen entspringen.

Von dieser Classe von Differentialgleichungen verdient die von uns als Normaldifferentialgleichung bezeichnete und weiterhin die Differentialgleichung mit Fundamentalgruppe, von welcher die erwähnte Normaldifferentialgleichung den einfachsten Typus darstellt, eine vorzügliche Berücksichtigung. Auf diese Differentialgleichungen mit Fundamentalgruppe dehnen wir die von den Herren Picard und Vessiot angebahnten fundamentalen Untersuchungen über die Rationalitätsgruppe linearer homogener Differentialgleichungen aus. Die Begründung und Herleitung der Sätze geschieht auf eine von den Methoden der genannten Gelehrten verschiedene Art; hierbei tritt der Begriff der Normaldifferentialgleichung in seiner ganzen Bedeutung für die Theorie hervor. Da der Begriff der Rationalitätsgruppe ein von der Fixierung des Rationalitätsbereiches abhängiger ist, so bietet sich die Aufgabe, die Veränderungen der Rationalitätsgruppe bei Abänderung des Rationalitätsbereiches zu studieren. Der ursprüngliche Rationalitätsbereich kann in zweifacher Weise erweitert werden, einerseits durch Functionen,

die wir im Anschluss an die Algebra als natürliche Transscendente bezeichnen, andererseits durch Zufügung von beliebigen Transscendenten. Den Einfluss der Adjunction von natürlichen Transscendenten unterwerfen wir einer eingehenden Betrachtung, die Erweiterung des Rationalitätsbereiches durch beliebige Transscendente und die Bedeutung derselben für die Rationalitätsgruppe hoffen wir später zum Gegenstand der Untersuchung zu machen.

§ 1.

Rationalitätsbereich.

Wenn man Betrachtungen algebraischer Natur über Differentialgleichungen anstellen will, so ist es geboten, einen Functionenkörper einer unabhängig veränderlichen Größe x als Rationalitätsbereich zu fixieren; hierdurch wird die Untersuchung präcisirt. Ein System von Functionen einer unabhängig Veränderlichen x bildet einen Functionenkörper oder Rationalitätsbereich, wenn dasselbe von der Vollständigkeit ist, dass die Operationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplicierens, Dividierens und der Differentiation nach der Variablen x innerhalb des Systems ausführbar sind, ohne eine Erweiterung desselben zu bedingen¹⁾.

Diese erweiterte Fassung, welche wir dem Begriff „Functionenkörper“ oder „Rationalitätsbereich“ gegenüber den in der Algebra herrschenden Festsetzungen geben, wird durch die Art der Anwendungen bedingt und erweist sich als durchaus nothwendig und zweckmäßig. Für den einfachsten Functionenkörper, denjenigen aller ganzen und gebrochenen rationalen Functionen einer Variablen x , stimmt unsere erweiterte Definition noch mit derjenigen der Herren Kronecker²⁾, Dedekind und Weber³⁾ überein. Enthält aber ein in unserem Sinne definirter Functionenkörper z. B. die Größe $\sin x$, so enthält derselbe neben allen rationalen Functionen von $\sin x$ auch alle rationalen Functionen von $\cos x$. Bei den algebraischen Untersuchungen wird sonst durch die Adjunction von $\sin x$ die Größe $\cos x$ nicht mit adjungirt.

¹⁾ Vgl. hierzu E. Vessiot, Sur l'intégration des équations différentielles linéaires 1892. Annales de l'École normale. p. 230. Diese fundamentale Arbeit citire ich mit V. Picard, Sur les groupes de transformations des équations différentielles linéaires. Comptes rendus. 8. October 1894 oder math. Annalen Bd. 46, p. 165.

²⁾ Vgl. vorzüglich Kroneckers Festschrift, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. Journ. f. d. r. u. ang. Math. Bd. 92.

³⁾ Dedekind und Weber, Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen. Journ. f. d. r. u. ang. Math. Bd. 92, p. 182.

Die Elemente des von uns der Betrachtung zugrunde gelegten Functionenkörpers sind frei wählbar; wir werden zum Körper aller rationalen Functionen nur eine endliche Anzahl von Functionen von x adjungieren; diese adjungierten Functionen seien:

$$\alpha(x); \beta(x); \dots; \lambda(x).$$

Mit ihnen sind nicht allein alle von ihnen rational abhängenden Functionen, sondern auch alle rationalen Functionen ihrer Differentialquotienten mit Coefficienten, welche rationale Functionen von x sind, adjungiert. Einen so entstehenden, der Betrachtung zugrunde gelegten Körper bezeichnen wir mit $R_1(x)$.

Man könnte neben diesen so eben eingeführten Größen auch noch willkürliche Parameter, also etwa frei veränderliche Größen, dem Functionenkörper adjungieren. Diese Annahme wollen wir nicht machen.

Man könnte es auch für angebracht halten, die numerischen Constanten unseres Functionenkörpers auf einen gewissen Rationalitätsbereich im Sinne der Zahlentheorie zu beschränken. Da wir es aber auch mit Functionen zu thun haben, die Integrale von Differentialgleichungen sind, und bei diesen willkürliche Integrationsconstante auftreten, so würde man eine derartige Beschränkung der Constanten auf gewisse Rationalitätsbereiche doch bei einigen der auftretenden Functionen aufgeben müssen. Wir adjungieren daher von anfang an die Gesamtheit aller Constanten unserem $R_1(x)$.

§ 2.

Irreducibilität einer Differentialgleichung.

Nach der Fixierung eines Rationalitätsbereiches $R_1(x)$ kann der Begriff der Irreducibilität einer Differentialgleichung mit Coefficienten aus diesem Bereich eingeführt werden. Dieser für eine exacte Theorie der Differentialgleichungen fundamentale Begriff erhält jetzt einen völlig klaren und bestimmten Sinn. Die von uns zu betrachtenden Differentialgleichungen m^{ter} Ordnung werden stets von der Form:

$$(1) \quad f\left(xy \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0$$

sein und immer folgende Eigenschaften besitzen: f wird stets eine ganze rationale Function von y und dessen Ableitungen bis zur m^{ten} sein; die Coefficienten der Differentialgleichung werden Functionen der unabhängigen Variablen x sein und stets dem der Betrachtung zugrunde liegenden Rationalitätsbereich $R_1(x)$ angehören. Da wir nur annehmen, dass die Coefficienten der Differential-

gleichung in $R_1(x)$ sich befinden, so kann man durch Division stets erreichen, dass der Coefficient des Gliedes:

$$(y^{(m)})^p \cdot (y^{(m-1)})^{p_1} \cdot (y^{(m-2)})^{p_2} \dots (y')^{p_{m-1}} y^{p_m}$$

die Einheit wird; hierbei ist p die höchste Potenz, in welcher $y^{(m)}$ überhaupt in f auftritt, p_1 die höchste Potenz, in welcher $y^{(m-1)}$ in der Verbindung:

$$(y^{(m)})^p \cdot (y^{(m-1)})^a \dots,$$

p_i die höchste Potenz, in welcher $y^{(m-i)}$ in der Verbindung:

$$(y^{(m)})^p \cdot (y^{(m-1)})^{p_1} \dots (y^{(m-i+1)})^{p_{i-1}} \cdot (y^{(m-i)})^\delta \dots$$

auftritt. Dieses Glied wollen wir der Kürze wegen als Glied höchster Dimension bezeichnen. Wir nehmen also an, dass das Glied höchster Dimension stets die Einheit als Coefficient hat. Ordnet man die Differentialgleichung m^{ten} Ordnung und p^{ten} Grades:

$$f(xy y' \dots y^{(m)}) = 0$$

nach Potenzen von $y^{(m)}$, so wird sie folgende Gestalt haben:

$$f_0(xy y' \dots y^{(m-1)}) \cdot (y^{(m)})^p + f_1(xy y' \dots y^{(m-1)}) \cdot (y^{(m)})^{p-1} + \dots \\ \dots + f_{p-1}(xy y' \dots y^{(m-1)}) \cdot y^{(m)} + f_p(xy y' \dots y^{(m-1)}) = 0;$$

hierbei sind $f_0 f_1 \dots f_p$ ganze rationale Functionen von $yy' \dots y^{(m-1)}$ mit Coefficienten aus $R_1(x)$.

Wir nennen nun eine derartige Differentialgleichung (1) mit Coefficienten aus einem bestimmten Rationalitätsbereich $R_1(x)$ in diesem irreducibel, wenn:

a) die linke Seite, als ganze Function von $yy' \dots y^{(m)}$ aufgefasst, im Bereiche $R_1(x)$ algebraisch irreducibel ist, d. h. in keine ganze Function derselben Größen mit Coefficienten aus $R_1(x)$ zerlegbar ist,

b) die vorgelegte Differentialgleichung kein Integral mit einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung μ als der m^{ten} gemein hat; dabei soll die neue Differentialgleichung auch nur Coefficienten aus $R_1(x)$ haben.

Man kann die Bedingung a) auch in gleichwertiger Weise auf folgende Art ausdrücken: Da jede ganze Function von $yy' \dots y^{(m-1)}$, die in f als Factor enthalten ist, ein gemeinsamer Theiler von $f_0 f_1 \dots f_p$ sein muss, so dürfen erstens die Functionen

$f_0 f_1 \dots f_p$ keinen gemeinsamen Theiler enthalten, der eine ganze Function von $yy' \dots y^{(m-1)}$ mit Coefficienten aus $R_1(x)$ ist; zweitens muss f als Polynom von $y^{(m)}$ mit den Coefficienten $f_0 f_1 \dots f_p$ in der einen Variablen $y^{(m)}$ algebraisch irreducibel sein. Dass $f_0 f_1 \dots f_p$ einen größten gemeinsamen Theiler, welcher eine ganze Function von $yy' \dots y^{(m-1)}$ mit Coefficienten aus $R_1(x)$ ist, haben, ist auch durch die Bedingung $b)$ ausgeschlossen, wenn die Differentialgleichung irreducibel ist.

Neben dem Begriff der schlechtweg oder absolut irreduciblen Differentialgleichung halten wir es für nothwendig, den Begriff der relativ irreduciblen Differentialgleichung einzuführen. Eine Differentialgleichung $f=0$ von der oben näher charakterisierten Art heiße inbezug auf ein bestimmtes Integral y_1 oder auf mehrere bestimmte Integrale $y_1 y_2 \dots y_i$ relativ irreducibel, wenn

$\alpha)$ die Bedingung $a)$ der absoluten Irreducibilität unverändert gilt,

$\beta)$ keines der Integrale, in Bezug auf welche die Differentialgleichung relativ irreducibel ist, einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung μ als der m^{ten} genügt; dabei soll die neue Differentialgleichung auch nur Coefficienten aus $R_1(x)$ haben.

Die Forderung, welche durch $\alpha)$ ausgedrückt ist, dass $f_0 f_1 \dots f_p$ relativ prim sind, ist jetzt nicht (wie bei der absolut irreduciblen Differentialgleichung) eine Folge von $\beta)$. Diejenigen Integrale einer Differentialgleichung, inbezug auf welche sie relativ irreducibel ist, mögen ihre Hauptintegrale heißen. Eine absolut irreducible Differentialgleichung ist daher nach der jetzt eingeführten Terminologie eine solche, die nur Hauptintegrale besitzt.

Wir beweisen nun folgende Sätze:

I. Eine jede relativ irreducible Differentialgleichung darf mit keiner Differentialgleichung derselben Ordnung und niedrigeren Grades mit Coefficienten aus $R_1(x)$ ein Hauptintegral gemein haben.

Angenommen unserer relativ irreducible Differentialgleichung $f=0$ habe mit einer Differentialgleichung $k=0$ mit Coefficienten aus $R_1(x)$, bei welcher der höchste Differentialquotient $y^{(m)}$ nur bis zum n_1^{ten} Grade, $p_1 < p$, aufsteigt, ein Hauptintegral gemein. Fassen wir dann k als Polynom in $y^{(m)}$ auf:

$$k \equiv k_0(xy \dots y^{(m-1)}) \cdot (y^{(m)})^{p_1} + k_1(xy \dots y^{(m-1)}) \cdot (y^{(m)})^{p_1-1} + \dots \\ \dots + k_{p_1}(xyy' \dots y^{(m-1)}) = 0,$$

so kann man $k_0; k_1 \dots; k_{p_1}$ relativ prim annehmen; denn mit einem größten gemeinsamen Theiler dieser Ausdrücke, der eine Differen-

tialgleichung von niedrigerer als m^{ter} Ordnung darstellen würde, könnte nach der Bedingung β) f doch kein Hauptintegral gemein haben.

Fasst man ebenso f als Polynom in $y^{(m)}$ auf und verfährt dann mit f und k nach der Regel des größten gemeinsamen Theilers, so wird:

$$\begin{aligned} f &= k g + k', \\ k &= k' g' + k'', \\ k' &= k'' g'' + k''', \\ &\vdots \\ k^{(m-1)} &= k^{(m)} g^{(m)} + k^{(m+1)}. \end{aligned}$$

Die Coefficienten von $y^{(m)}$ in $g g' \dots g^{(m)} k' k'' \dots k^{(m+1)}$ werden hierbei gebrochene Functionen von $y y' \dots y^{(m-1)}$ mit Coefficienten aus $R_1(x)$; $k^{(m+1)}$ wird die erste von $y^{(m)}$ freie GröÙe sein. Man kann leicht eine derartige Modification vornehmen, dass man ganze Functionen von $y^{(m-1)} \dots y' y$ erhält. Bringen wir nämlich die Coefficienten von k' auf den gemeinsamen Nenner h , ebenso von $h k''$ auf den gemeinsamen Nenner h' u. s. w. und setzen wir:

$$k' = \frac{\bar{k}'}{h}; \quad h k'' = \frac{\bar{k}''}{h'}; \quad h h' \dots h^{(i-1)} \cdot k^{(i+1)} = \frac{\bar{k}^{(i+1)}}{h^{(i)}},$$

wo $h h' \dots h^{(i)}$ ganze Functionen von $y y' \dots y^{(m-1)}$; $\bar{k} \bar{k}' \dots \bar{k}^m$ ganze Functionen von $y y' \dots y^{(m)}$ sind, dann wird:

$$\begin{aligned} h f &= k g h + \bar{k}', \\ h h' k &= \bar{k}' \cdot g' \cdot h' + \bar{k}'', \\ h h' h'' \bar{k}' &= \bar{k}'' g'' h'' + \bar{k}''', \\ &\vdots \\ h h' h'' \dots h^{(m)} \bar{k}^{(m-1)} &= \bar{k}^{(m)} g^{(m)} \cdot h^{(m)} + \bar{k}^{(m+1)}. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\bar{k}^{(m+1)}$ ebenso wie $k^{(m+1)}$ von $y^{(m)}$ unabhängig und jetzt eine ganze Function von $y y' \dots y^{(m-1)}$.

Es kann nun $\bar{k}^{(m+1)}$, die erste von $y^{(m)}$ freie GröÙe, verschwinden, dann haben f und k einen gemeinsamen Factor, der eine ganze rationale Function von $y y' \dots y^{(m)}$ ist, in diesem Falle ist f gegen die Voraussetzung algebraisch reducibel. Tritt dies nicht ein, so verschwinden f und k , daher $\bar{k}' \dots \bar{k}^{(m)}$ und schließlich $\bar{k}^{(m+1)}$ für das gemeinsame Hauptintegral; dieses müsste also einer

Differentialgleichung niedrigerer Ordnung $\overline{k^{(m+1)}}=0$ genügen; dies aber widerspricht der Bedingung β). Mithin ist unsere Annahme falsch und unser Satz erwiesen.

In ähnlicher Weise zeigt man:

(IIa.) Genügt ein Hauptintegral y_1 einer relativ irreduciblen Differentialgleichung $f=0$ einer Differentialgleichung derselben Ordnung, aber von höherem Grade: $g=0$, so ist g durch f algebraisch theilbar.

$$g(xy \dots y^{(m)}) = f(xy \dots y^{(m)}) \cdot h(xy \dots y^{(m)}).$$

Bei den über das Glied höchster Dimension gemachten Voraussetzungen ist die ganze Function h von $yy' \dots y^{(m)}$ nie eine bloße Function von x . Nimmt man die Coefficienten von $y^{(m)}$ in g ohne gemeinsamen Theiler an, so ist h stets auch Function von $y^{(m)}$. Wir setzen dies auch bei Satz (IIb) voraus.

Als Corollar fügen wir noch hinzu:

(IIb) Es gibt keine von einer relativ irreduciblen Differentialgleichung verschiedene Differentialgleichung derselben Ordnung und gleichen Grades, welcher eines der Hauptintegrale genügt.

Für unsere Betrachtungen wird auch folgender Satz von fundamentaler Bedeutung sein:

(III.) Genügt ein Hauptintegral einer relativ irreduciblen Differentialgleichung:

$$(1) \quad f\left(xy \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0$$

einer beliebigen Differentialgleichung:

$$(2) \quad F\left(xy \dots \frac{d^\mu y}{dx^\mu}\right) = 0 \quad (\mu > m),$$

wo (2) auch nur Coefficienten aus $R_1(x)$ hat, so genügen alle Integrale von (1) auch der zweiten Differentialgleichung.

Man differenziere die erste Differentialgleichung $\mu - m$ mal nach x und eliminiere aus diesen $\mu - m$ Differentialgleichungen und der Differentialgleichung (2):

$$\frac{d^{m+1} y_1}{dx^{m+1}} \dots \frac{d^\mu y_1}{dx^\mu},$$

wenn y_1 das gemeinsame Hauptintegral ist. Die Elimination ist auch stets möglich; denn aus:

$$f = f_0(xy \dots y^{(m-1)})(y_m)^p + f_1(xy \dots)(y_m)^{p-1} + \dots + f_p = 0$$

folgt durch Differentiation:

$$[pf_0(y^{(m)})^{p-1} + (p-1)f_1(y^{(m)})^{p-2} + \dots + f_{p-1}]y^{(m+1)} + \\ + F_1(xy \dots y^{(m)}) = 0.$$

Hierbei kann:

$$[pf_0(y^{(m)})^{p-1} + (p-1)f_1(y^{(m)})^{p-2} + \dots + f_{p-1}]$$

für y_1 , da y_1 ein Hauptintegral einer relativ irreduciblen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung vom p^{ten} Grade ist, nicht verschwinden. Wir erhalten als Eliminationsresultat eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung; dieser muss das Hauptintegral y_1 von $f=0$ auch genügen. Die neue Differentialgleichung hat auch nur Coefficienten aus $R_1(x)$; denn die durch Differentiation hergeleiteten Gleichungen haben auch nur Coefficienten aus $R_1(x)$; um dies zu erreichen, war die Erweiterung des Begriffes „Functionenkörper“ nöthig. Infolge der Sätze I und II muss die neue Differentialgleichung m^{ter} Ordnung durch alle Integrale von $f=0$ befriedigt werden; daher kann unser Satz als erwiesen gelten.

Unsere Definition der Irreducibilität einer Differentialgleichung ist ganz allgemein gültig gefasst. Sie lehnt sich an die speciellere Definition des Herrn Königsberger für Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten¹⁾ an. Der von uns eingeführte Begriff der inbezug auf eines oder mehrere ihrer Integrale

¹⁾ Herr Königsberger adjungiert im Journ. f. d. r. u. ang. Math. Bd. 90, p. 112 ff., allgemeine Bemerkungen zum Abelschen Theorem, dem Rationalitätsbereich aller rationalen Functionen von x nur irreducible algebraische Functionen von x und betrachtet Differentialgleichungen mit Coefficienten aus diesem Bereich. Die Differentialquotienten der adjungierten algebraischen irreduciblen Functionen von x denkt er sich durch sie selbst und rationale Functionen von x vermöge der diese algebraischen Functionen definirenden irreduciblen algebraischen Gleichungen ausgedrückt (a. a. O. p. 116). Bei diesen speciellen Festsetzungen reicht Herr Königsberger mit dem algebraischen Begriff des Rationalitätsbereiches aus. Man vergleiche neben der erwähnten Arbeit wegen der oben hergeleiteten Sätze auch Königsberger: Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen. Erstes Capitel. Leipzig. 1882.

Auch im Journ. f. d. r. u. ang. Math. Bd. 96, p. 123, Über die Irreducibilität der linearen Differentialgleichungen, spricht Herr Königsberger nur von Differentialgleichungen mit Coefficienten, die algebraische Functionen von x sind. Er macht dort, wie mir scheint, im Gegensatz zu seiner Begriffsbestimmung aufmerksam, dass die von Herrn Frobenius in seiner Arbeit: Über den Begriff der Irreducibilität der linearen Differentialgleichungen, Journal f. d. r. u. ang. Math. Bd. 76, für lineare Differentialgleichungen gegebene Definition sich nicht bloß auf Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten beschränkt. Journ.

relativ irreduciblen Differentialgleichung ergibt eine vollkommene Analogie mit der Algebra. In der Algebra gilt der Satz, dass eine jede Wurzel einer algebraischen Gleichung mit Coefficienten aus einem gewissen Rationalitätsbereich auch stets Wurzel einer in diesem Bereich irreduciblen Gleichung sein muss. In der Theorie der Differentialgleichungen ist die Sachlage folgende:

Zu einer jeden reduciblen Differentialgleichung gehört stets wenigstens eine irreducible Differentialgleichung. Es genügt aber nicht jedes Integral einer reduciblen Differentialgleichung auch einer irreduciblen, z. B. muss man eine Differentialgleichung erster Ordnung mit algebraischen Coefficienten, die ein transscendentes und ein algebraisches Integral besitzt, als reducibel bezeichnen; denn sie hat ihr algebraisches Integral mit einer algebraischen Differentialgleichung nullter Ordnung gemein. Das transscendente Integral genügt aber keiner irreduciblen Differentialgleichung. Durch Einführung des Begriffes „relativ irreducibel“ wird diese Lücke völlig ausgefüllt.

Ein jedes Integral einer reduciblen Differentialgleichung genügt einer inbezug auf dasselbe relativ irreduciblen Differentialgleichung. Dieselbe ist nach den obigen Sätzen einzig in ihrer Art;¹⁾ es ist die Differentialgleichung niedrigsten Grades bei niedrigster Ordnung mit Coefficienten aus $R_1(x)$, welcher das Integral genügt.

Mithin ist einem jeden Integral einer Differentialgleichung eine gewisse inbezug auf dieses Integral relativ irreducible Differentialgleichung eindeutig zugeordnet. Da aber die zugeordnete Differentialgleichung mehrere Hauptintegrale haben kann, ja sogar absolut irreducibel sein kann, so gilt das Umgekehrte nicht.

Wir weisen noch folgenden Satz nach: Ordnet man einem jeden Integral einer Differentialgleichung $f=0$ die inbezug auf dieses Integral relativ irreducible Differentialgleichung zu, so sind diejenigen zugeordneten

f. d. r. u. ang. Math. Bd. 96, p. 123, Anmerkung. Hiernach dürfte Herrn Bekes Bemerkung in den math. Annalen Bd. 45, p. 279, dass Herr Königsberger bei seinem Irreducibilitätsbegriff eindeutige Coefficienten voraussetzt, zu berichtigen sein. Ich möchte bei dieser Gelegenheit darauf aufmerksam machen, dass Herr Frobenius a. a. O. p. 237 den Begriff der Irreducibilität so definiert, wie es Herr Beke von Herrn Königsberger voraussetzt; allerdings macht er hiervon keinen weiteren Gebrauch. Der betreffende Passus lautet bei Frobenius: Eine Differentialgleichung, deren Coefficienten in einem gewissen Theil der Ebene eindeutig definierte analytische Functionen sind, nenne ich irreducibel, wenn sie mit keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung oder bei gleicher Ordnung niedrigeren Grades, deren Coefficienten in demselben Flächenstück einwertige analytische Functionen sind, ein Integral gemein hat.

¹⁾ Hierbei wird, wie auch schon früher, vorausgesetzt, dass die Coefficienten der Differentialgleichung, wenn man diese als Polynom im höchsten Differentialquotienten auffasst, theilerfremd sind.

Differentialgleichungen, welche von der niedrigsten Ordnung sind, absolut irreducibel.

Es sei $g=0$ eine relativ irreducible Differentialgleichung von der niedrigsten Ordnung; diese sei einem Integral y_1 von $f=0$ zugeordnet. Zu $g=0$ gehört dann wie zu jeder Differentialgleichung eine absolut irreducible Differentialgleichung; diese hat mit $g=0$ alle Integrale gemein; da $g=0$ mit $f=0$ alle Integrale gemein hat, so genügen auch alle Integrale der absolut irreduciblen Differentialgleichung der Differentialgleichung $f=0$. Die absolut irreducible Differentialgleichung, welche mithin auch einem Integral von $f=0$ zugeordnet ist, kann nach Voraussetzung nicht von niederer Ordnung als g sein. Die Differentialgleichung darf nach Satz II auch nicht von niederem Grade als g sein und muss daher mit g identisch sein; also ist g absolut irreducibel.

Sei die Gesamtheit der relativ irreduciblen Differentialgleichungen, welche den Integralen einer beliebigen Differentialgleichung zugeordnet sind, nach aufsteigenden Ordnungen $p_0 < p_1 < p_2 \dots$ geordnet; es ergebe sich etwa folgende Anordnung:

$$\begin{array}{llll} g = 0; \overline{g} = 0; \overline{\overline{g}} = 0; \overline{\overline{\overline{g}}} = 0; \dots & \text{mit der Ordnung } p_0, \\ g_1 = 0; \overline{g_1} = 0; \overline{\overline{g_1}} = 0; \dots & \text{'' '' '' } p_1, \\ g_2 = 0; \overline{g_2} = 0; \dots & \text{'' '' '' } p_2, \\ \vdots & \end{array}$$

Die Differentialgleichungen der Ordnung p_0 sind sicher absolut irreducibel; jede Differentialgleichung einer folgenden Ordnung kann absolut irreducibel sein; ist sie relativ irreducibel, so findet man die ihr zugehörigen absolut irreduciblen Differentialgleichungen in einer der vorausgegangenen Zeilen.

§ 3.

Aus $R_1(x)$ entstammende transscendente Functionen und die von ihnen erzeugten Bereiche.

Vermöge einer Differentialgleichung mit Coefficienten aus $R_1(x)$ entstehen aus dem der Betrachtung zugrunde liegenden Bereiche neue transscendente Functionen; wir sehen also die Differentialgleichungen als Definitionsgleichungen für neue transscendente Functionen, welche sie befriedigen, an. Algebraische Gleichungen mit Coefficienten aus $R_1(x)$ sind consequent als Differentialgleichungen nullter Ordnung zu betrachten. Die Integrale einer Differentialgleichung mit Coefficienten aus $R_1(x)$, welche unserem Rationalitätsbereich nicht angehören, nennen wir aus $R_1(x)$ entstammende transscendente Functionen. Den

Bereich $R_1(x)$ bezeichnet man zweckmäßig als Stammbereich.¹⁾ Man kann dem Stammbereich eine ihm entstammende transscendente Function, sie sie y_1 , zufügen; bei dieser Erweiterung sind dann alle rationalen Functionen dieser Transscendenten sowie alle rationalen Functionen ihrer Differentialquotienten mit Coefficienten aus $R_1(x)$ adjungiert. Eine aus $R_1(x)$ entstammende transscendente Function gibt daher Veranlassung zur Betrachtung einer ganzen Gattung transscendenter Functionen. Der durch Adjunction von y_1 aus $R_1(x)$ hervorgehende Functionenkörper soll ein $R_1(x)$ entstammender transscendenter Körper oder ein transscendenter Gattungsbereich heißen.

Wir bezeichnen ihn mit $R_1(xy_1)$. Der Gattungsbereich umfasst seinen Stammbereich.

Das größte Interesse werden und haben diejenigen Transscendenten in Anspruch genommen, welche einer Differentialgleichung mit nur rationalen Functionen von x als Coefficienten entspringen. Bei ihnen ist $R_1(x)$ der kleinste mögliche Functionenkörper. Zu dieser Gattung von Functionen gehören die elliptischen, die Kugel- und Besselschen Functionen u. s. w. Wie sich aber auch die Algebra mit Größen beschäftigt, die inbezug auf die Gesamtheit der rationalen Zahlen transscendent sind, also keiner algebraischen Gleichung mit rationalen Coefficienten genügen, z. B. die Zahlen e und π , so wird auch eine algebraische Theorie der Differentialgleichungen Functionen in den Kreis ihrer Betrachtung ziehen, welche keiner Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten genügen. Derartige Functionen gibt es, wie das Beispiel der Function $\Gamma(x)$ ²⁾ lehrt.

Wenden wir uns wieder zu einer Differentialgleichung mit Coefficienten aus einem beliebigen Bereich $R_1(x)$. Einer solchen Differentialgleichung werden im allgemeinen unendlich viele selbständige transscendente Functionen entstammen; diese wird mithin im allgemeinen zu unendlich vielen verschiedenen Gattungen transscendenter Functionen führen.³⁾ Die Verhältnisse dürften hierbei von so großer Complicirtheit sein, dass sie kaum zu übersehen sein werden.

Wir werden uns im Folgenden nur mit Differentialgleichungen beschäftigen, welche Fundamentallösungen haben. Es sei unsere Differentialgleichung:

$$f(xy y' y'' \dots y^{(m)}) = 0$$

¹⁾ Die eingeführte Terminologie sucht Anschluss an die von Kronecker in seiner Festschrift für die Algebra angewandte Bezeichnungsweise.

²⁾ Vgl. Hölder, math. Annalen Bd. 28.

³⁾ Vgl. Königberger, Über die Anzahl der einer algebraischen Differentialgleichung angehörigen Transscendenten. Math. Annalen Bd. 30, p. 299 ff.

so beschaffen, dass sich ihr allgemeines Integral Y als rationale Function von p particulären Lösungen $y_1 y_2 \dots y_p$ und deren Ableitungen mit m willkürlichen Constanten herleiten lässt; es sei also:

$$Y = \varphi(y_1 y_2 \dots y_p y_1' y_2' \dots y_p^{(l)}; \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m).$$

Von der Function φ wollen wir annehmen, sie habe Coefficienten aus $R_1(x)$. Zu dieser Gattung von Differentialgleichungen gehören als einfachster Typus die linearen.

Ein Integralsystem $y_1 y_2 \dots y_p$, welches uns auf diese Weise das allgemeine liefert, heiße ein Fundamentalsystem von Integralen. Bestimmt man die Gesammtheit der Gattungsbereiche, welche aus einem einzigen Fundamentalsystem von Integralen entspringen, so ist der kleinste transcendente Bereich, welcher diese Gattungsbereiche sämmtlich umfasst, durch Integrale unserer Differentialgleichung nicht mehr der Erweiterung fähig. Wir bezeichnen diesen Bereich mit $R_1(x y_1 y_2 \dots y_p)$ und nennen ihn das kleinste gemeinsame Vielfache der Bereiche: $R_1(x y_1)$, $R_1(x y_2) \dots R_1(x y_p)$. Einer Differentialgleichung mit Fundamentallösungen entstammen höchstens p verschiedene Gattungen transscendenter Functionen und also höchstens p Gattungsbereiche.

Diese Thatsache, dass einer Differentialgleichung höchstens p verschiedene Gattungen transscendenter Functionen entstammen, bleibt auch noch bestehen, wenn sich das allgemeine Integral nicht durch ein einziges Formelsystem, sondern durch mehrere Gleichungen als rationale Function von p particulären Integralen und deren Ableitungen mit m Constanten herleiten lässt. Es ist also dann etwa:

$$Y = \varphi^{[e]}(y_1 y_2 \dots y_p y_1' \dots y_p^{(l)} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m) \quad \rho = 1, 2, 3, \dots, i$$

wobei die i Functionen $\varphi^{[e]}$ Coefficienten aus $R_1(x)$ haben.

§ 4.

Normaldifferentialgleichung.

Einer Differentialgleichung kann auch nur eine einzige Gattung transscendenter Functionen und daher ein einziger Gattungsbereich entstammen; bei einer solchen Differentialgleichung wird das allgemeine Integral rationale Function eines einzigen particulären Integrals y_1 und dessen Ableitungen bis zur l^{ten} sein und entweder durch ein oder mehrere discrete Formelsysteme gegeben werden, also:

$$Y = \psi^{[e]}(y_1 y_1' \dots y_1^{(l)} \alpha_1 \dots \alpha_m), \quad \rho = 1, 2 \dots i,$$

wobei die i Functionen $\psi^{[e]}$ Coefficienten aus $R_1(x)$ haben.

Eine derartige Differentialgleichung, der nur eine einzige Gattung transcendenter Functionen entstammt, heiße unter der Voraussetzung, dass die Differentialgleichung absolut irreducibel oder wenigstens für jenes Integral y_1 , welches das allgemeine Integral liefert, relativ irreducibel ist, eine Normaldifferentialgleichung. Eine solche Differentialgleichung ist das völlige Analogon zur Galoisschen oder Normalgleichung der Algebra.¹⁾

Bei einer Normaldifferentialgleichung gilt der folgende wichtige Satz:

Ersetzt man in einer der Functionen $\psi^{[e]}(y_1 y_1' \dots y_1^{(l)} \alpha_1 \dots \alpha_m)$ das Hauptintegral y_1 durch ein beliebiges anderes Integral, so findet man stets wieder ein Integral der Normaldifferentialgleichung.

Sei $n(xy y' \dots y^{(m)}) = 0$ die vorgelegte Normaldifferentialgleichung m^{ter} Ordnung; setzt man den Ausdruck:

$$\psi^{[e]}(y_1 y_1' \dots y_1^{(l)} \alpha_1 \dots \alpha_m)$$

in dieselbe ein, so wird sie durch denselben nach Voraussetzung befriedigt. Mithin genügt y_1 einer Differentialgleichung:

$$a) \quad n(x; \psi^{[e]}(y y' \dots y^{(l)} \alpha_1 \dots \alpha_m) [\psi^{[e]'} \dots]) = 0.$$

Nun ist y_1 ein Hauptintegral unserer Normaldifferentialgleichung; daher genügen alle Integrale der Normaldifferentialgleichung auch $a)$, d. h., wenn y_2 ein beliebiges Integral der Normaldifferentialgleichung ist, so wird dieselbe auch durch:

$$\psi^{[e]}(y_2 y_2' \dots y_2^{(l)} \alpha_1 \dots \alpha_m)$$

befriedigt.

Differenzieren wir nun die Transformationen:

$$Y = \psi^{[e]}(y_1 y_1' \dots y_1^{(l)} \alpha_1 \dots \alpha_m), \quad \rho = 1, 2, 3 \dots i,$$

indem wir rechter Hand vermöge der Normaldifferentialgleichung Differentialquotienten von höherer als m^{ter} Ordnung beseitigen, und führen die Differentiation soweit, wie es nöthig ist, damit links wie rechts Differentialquotienten gleich hoher Ordnung auf-

¹⁾ Herr Vessiot, bei dem auch derartige Differentialgleichungen, allerdings nur für $\rho = 1$, auftreten, sieht in ihnen Analoga zu Abelschen Gleichungen. V., p. 228. Diese Auffassung erscheint mir nicht angebracht zu sein, da die Theorie der algebraischen Gleichungen alle Gleichungen auf Normalgleichungen, nicht auf Abelsche, zurckfhrt und die obige Differentialgleichung hier eine ähnliche Rolle spielt. Ferner sind die Normaldifferentialgleichungen, wenn wir unsere Terminologie anwenden, auch nicht im allgemeinen durch Quadraturen lösbar; dies wäre aber nach meiner Ansicht von einem Analogon Abelscher Gleichungen zu verlangen.

treten, so finden wir, um uns der von Herrn Lie eingeführten Ausdrucksweise zu bedienen, durch Erweiterung:

$$\begin{aligned} Y' &= \psi_1^{[e]}(y_1 y_1' \dots \alpha_1 \dots \alpha_m) \quad \rho = 1, 2 \dots i \\ Y'' &= \psi_2^{[e]}(y_1 y_1' \dots \alpha_1 \dots \alpha_m) \\ &\vdots \\ Y^{(i)} &= \psi_i^{[e]}(y_1 y_1' \dots \alpha_1 \dots \alpha_m). \end{aligned}$$

Diese Transformationen bilden nun eine Gruppe. Stellen wir nämlich neben diese Transformationen:

$$\begin{aligned} Z &= \psi^{[e']}(Y Y' \dots \beta_1 \dots \beta_m), \quad \rho' = 1, 2 \dots i \\ Z' &= \psi_1^{[e']}(Y Y' \dots \beta_1 \dots \beta_m). \\ &\vdots \\ Z^{(i)} &= \psi_i^{[e']}(Y Y' \dots \beta_1 \dots \beta_m). \end{aligned}$$

und eliminieren $Y Y'$, so wird:

$$\begin{aligned} Z &= \psi^{[e']}(\psi^{[e]}(y_1 y_1' \dots) \psi_1^{[e]}(y_1 y_1' \dots \alpha_1 \dots) \dots \beta_1 \dots \beta_m) \\ Z' &= \psi_1^{[e']}(\psi^{[e]}(y_1 y_1' \dots) \psi_1^{[e]}(y_1 y_1' \dots) \dots \beta_1 \dots \beta_m) \\ &\vdots \\ Z^{(i)} &= \psi_i^{[e']}(\psi^{[e]}(y_1 y_1' \dots) \psi_1^{[e]}(y_1 y_1' \dots) \dots \beta_1 \dots \beta_m) \end{aligned}$$

Nach unserem Satze stellt nun Z ein Integral unserer Normaldifferentialgleichung dar. Da nun das allgemeine Integral unserer Normaldifferentialgleichung stets in einer der i Formen:

$$\psi^{[e'']}(y_1 y_1' \dots \gamma_1 \dots \gamma_m) \quad \rho'' = 1, 2 \dots i$$

in bestimmter Weise darstellbar ist, so folgt:

$$Z = \psi^{[e'']}(y_1 y_1' \dots \gamma_1 \dots \gamma_m), \quad \rho'' = 1, 2 \dots i$$

$Z, Z'' \dots Z^{(i)}$ sind, wie leicht zu sehen, die Ableitungen; daher wird:

$$\begin{aligned} Z' &= \psi_1^{[e'']}(y_1 y_1' \dots \gamma_1 \dots \gamma_m), \quad \rho'' = 1, 2 \dots i \\ Z'' &= \psi_2^{[e'']}(y_1 y_1' \dots \gamma_1 \dots \gamma_m). \\ Z^{(i)} &= \psi_i^{[e'']}(y_1 y_1' \dots \gamma_1 \dots \gamma_m). \end{aligned}$$

Wir haben daher eine m gliedrige Gruppe vor uns;¹⁾ nur wenn $\rho=1$ ist, wird unsere Gruppe continuierlich sein können, wenn

¹⁾ Vgl. die Definition einer Gruppe bei Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen, Bd. I, die Einleitung.

$\rho > 1$ ist, so haben wir eine Gruppe mit discreten Scharen von Transformationen vor uns. Eine solche Gruppe heißt eine gemischte oder complexe Gruppe.¹⁾ Die hier gefundene Gruppe von Transformationen nennen wir die Fundamentalgruppe der Normaldifferentialgleichung.²⁾

§ 5.

Differentialgleichungen mit Fundamentalgruppe.

Die Betrachtung der Normaldifferentialgleichung führt uns dazu, die der Betrachtung zugrunde liegende Differentialgleichung mit Fundamentalintegralen noch weiter zu specialisieren. Wir wollen annehmen, dass für die vorgelegte Differentialgleichung sich das allgemeine Integral Y als rationale Function einer irreduciblen Anzahl particularer Lösungen und deren Ableitungen mit m arbiträren Constanten durch ein einziges bestimmtes Formelsystem:

$$Y = \varphi(y_1 y_2 \dots y_p y'_1 y'_2 \dots y_p^{(t)} \alpha_1 \dots \alpha_m)$$

herleiten lässt und dass ferner wie bei der Normaldifferentialgleichung unsere Function φ , welche natürlich Coefficienten aus $R_1(x)$ hat, ungeändert ein Integral darstelle, wenn wir statt der p particularen Integrale p willkürliche andere setzen. Bildet man dann durch Erweiterung die neuen Transformationen:

$$Y' = \varphi_1(y_1 y_2 \dots y_p y'_1 \dots \alpha_1 \dots \alpha_m),$$

$$Y'' = \varphi_2(y_1 y_2 \dots y_p y'_1 \dots \alpha_1 \dots \alpha_m),$$

$$\vdots$$

$$Y^{(t)} = \varphi_t(y_1 y_2 \dots y_p y'_1 \dots \alpha_1 \dots \alpha_m),$$

hierbei werde natürlich rechter Hand vermöge der Differentialgleichung eliminiert), so kommen wir zu einer Gruppe.

Man setze statt des allgemeinen Integrals Y und dessen Ableitungen p particularé und deren Ableitungen:

$$Y_k, Y'_k, \dots, Y_k^{(t)}, \text{ wo } k = 1, 2, \dots, p,$$

und für die Constanten führe man entsprechend die p Systeme:

$$\alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_m^k \quad k = 1, 2, \dots, p$$

¹⁾ Lie-Engel, Transformationsgruppen Bd. I, p. 310 ff.

²⁾ Auf die Bezeichnung „Fundamentalgruppe“ kommen wir noch im folgenden § zu sprechen.

ein. Wir erhalten dann folgende Transformationen:

$$\begin{aligned} Y_k &= \varphi(y_1 y_2 \dots y_p y'_1 \dots y_p^{(t)} \alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_m^k) \\ Y'_k &= \varphi_1(y_1 y_2 \dots y_p y'_1 \dots \alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_m^k) \\ Y''_k &= \varphi_2(y_1 y_2 \dots y_p y'_1 \dots \alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_m^k) \\ &\vdots \\ Y_k^{(t)} &= \varphi_t(y_1 y_2 \dots y_p y'_1 \dots \alpha_1^k \alpha_2^k \dots \alpha_m^k) \end{aligned}$$

$$k = 1, 2, \dots, p.$$

Diese Gleichungen definieren eine continuierliche Gruppe in den Veränderlichen $Y_k Y'_k \dots Y_k^{(t)}$ und $y_k y'_k \dots y_k^{(t)}$ mit den Parametern $\alpha_1^k \dots \alpha_m^k$ ($k = 1, 2 \dots p$).

Im Falle der linearen homogenen Differentialgleichungen ist dies die lineare homogene m^2 gliedrige Gruppe. Nach Herrn Drach¹⁾ nennen wir diese Gruppe die Fundamentalgruppe der Differentialgleichung. Wir hätten auch hier wie bei der Normaldifferentialgleichung mehrere Gleichungssysteme, welche erst zusammen das allgemeine Integral liefern, einführen können. Obgleich die folgende Behandlung leicht auf derartige Differentialgleichungen ausdehnbar wäre, unterlassen wir dies der Einfachheit wegen. Bei der Normaldifferentialgleichung erwies sich jedoch die erweiterte Annahme wegen des Folgenden als nothwendig.

Die hier studierten Differentialgleichungen sind in letzter Zeit mehrfach Gegenstand der Betrachtung gewesen, um ihren Zusammenhang mit der Theorie der linearen Differentialgleichungen zu zeigen und ihren Aufbau zu studieren.²⁾

§. 6.

Transformierte Differentialgleichung der ursprünglichen.

Es sei $v_1(y_1 \dots y_p y'_1 \dots y'_p \dots y_p^{(k)})$ eine rationale Function eines Fundamentalsystems und dessen Ableitungen mit Coefficienten aus $R_1(x)$. Unsere Function gehört also in den Bereich $R_1(xy_1 y_2 \dots y_p)$.

Nach dem Vorgang von Herrn Vessiot bei linearen homogenen Differentialgleichungen suchen wir eine gewisse Differentialgleichung, der v_1 genügt, und nennen diese eine Transformierte

¹⁾ Drach, Sur une application de la théorie des groupes de Lie. Comptes rendus, 1893, p. 1041 a. a. O. 1043.

²⁾ Vgl. Alf Guldberg. Zur Theorie der Differentialgleichungen, die Fundamentallösungen besitzen. Journ. f. d. r. u. ang. Math. Bd. 115, p. 112 sowie die Untersuchungen von Herrn Bohlmann, Journ. f. d. r. u. ang. Math. Bd. 113 und 115.

der ursprünglichen Differentialgleichung.¹⁾ Wir ersetzen in v_1 das Fundamentalsystem $y_1 y_2 \dots y_p$ nach den Formeln p. 240 durch $Y_1 Y_2 \dots Y_p$ und bezeichnen mit $\bar{v}_1$ das durch die Fundamentalgruppe der Differentialgleichung transformierte v_1 . Wir haben dann:

$$\begin{aligned}\bar{v}_1 &= v_1 (Y_1 Y_2 \dots Y_p Y_1' \dots Y_p^{(l)}). \\ &= v_1 (\varphi(y_1 \dots y_p \dots \alpha_1^1 \dots \alpha_m^1); \varphi(y_1 \dots y_p \dots \alpha_1^2 \dots \alpha_m^2) \dots).\end{aligned}$$

Hierbei brauchen die mp Parameter α nicht sämmtlich wesentlich zu sein.

Nehmen wir nun an, dass unsere Function v_1 gewisse Transformationen der Fundamentalgruppe, bei denen sie sich nicht ändert, gestattet, so bilden diese stets in ihrer Gesamtheit eine Untergruppe der Fundamentalgruppe.

Diese Gruppe gehört zu den complexen Gruppen.²⁾ Wenn diese Untergruppe $mp - l$ wesentliche Parameter hat, so hängt $\bar{v}_1$ von l wesentlichen Parametern ab; es wird also:

$$\bar{v}_1 = \sigma(y_1 \dots y_p y_1' \dots \beta_1 \dots \beta_l),$$

wo σ eine rationale Function von dem Fundamentalsystem und dessen Ableitungen mit den l wesentlichen Parametern $\beta_1 \dots \beta_l$ ist. Da $v_1(y_1 \dots y_p \dots y_p^2)$, wie die vermöge der Fundamentalgruppe eingeführten Functionen φ in $R_1(xy_1 \dots y_p)$ gelegen sind, so gilt dies auch für die Function $\sigma(y_1 \dots y_p y_1' \dots)$.

Durch Elimination von $\beta_1 \dots \beta_l$ aus

$$\bar{v}_1; \frac{d\bar{v}_1}{dx} \dots \frac{d^l \bar{v}_1}{dx^l}$$

findet man eine Differentialgleichung für v_1 ; diese ist genau von der l^{ten} Ordnung; ihr allgemeines Integral ist $\bar{v}_1$.³⁾ Die Coefficienten der Differentialgleichung sind rationale Functionen von $y_1 \dots y_p$ und deren Ableitungen. Bei jeder Transformation der Fundamentalgruppe ändern sich die Functionen der Schar $\bar{v}_1$ in ihrer Gesamtheit nicht; daher müssen die Coefficienten der Differentialgleichung, welcher $\bar{v}_1$ genügt, Invarianten der Fundamentalgruppe sein. Wir kennen nun auch die Definitionsgleichung unserer Fundamentalgruppe; dies ist die ursprüngliche Differentialgleichung $f = 0$ mit Coefficienten aus $R_1(x)$. Wir können daher folgenden wichtigen Satz von Herrn Lie anwenden: Sobald die Definitionsgleichungen

¹⁾ Vgl. V., p. 217—222.

²⁾ Lie-Engel, Transformationsgruppen. I. p. 465.

³⁾ Lie-Engel, Transformationsgruppen. I. p. 181.

der endlichen Transformationen einer continuierlichen Gruppe vorliegen, lassen sich alle Differentialinvarianten der Gruppe durch die Coefficienten der Definitionsgleichungen und deren Ableitungen ausdrücken.¹⁾ Unsere transformierte Differentialgleichung hat daher Coefficienten aus $R_1(x)$. Als Ergebnis finden wir:

Eine rationale Function eines Fundamentalsystems $y_1 y_2 \dots y_p$ und dessen Ableitungen mit Coefficienten aus $R_1(x)$ genügt einer Differentialgleichung — der sogenannten transformierten — mit Coefficienten aus $R_1(x)$. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung ist in $R_1(x y_1 y_2 \dots y_p)$ gelegen.

§. 7.

Begriff der primitiven Function und der Differentialresolvente.

Unter den Functionen in $R_1(x y_1 \dots y_p)$, welche wir betrachteten, verdient eine gewisse Gattung, welche wir primitive Functionen nennen, eine besondere Aufmerksamkeit. Wir nennen:

$$v_1 = \chi(y_1 y_2 \dots y_p y_1' \dots y_p^{(\lambda)})$$

dann eine primitive Function, wenn sie nicht nur selbst eine ganze rationale Function von einem Fundamentalsystem $y_1 y_2 \dots y_p$ und dessen Ableitungen mit Coefficienten aus $R_1(x)$ ist, sondern auch so beschaffen ist, dass $y_1 y_2 \dots y_p$ sich als rationale Functionen von v_1 und dessen Ableitungen mit Coefficienten aus $R_1(x)$ ergeben; also:

$$\begin{aligned} y_1 &= \xi_1 \left(v_1; \frac{dv_1}{dx}; \dots; \frac{d^r v_1}{dx^r} \right) \\ &\vdots \\ y_p &= \xi_p \left(v_1; \frac{dv_1}{dx}; \dots; \frac{d^r v_1}{dx^r} \right); \end{aligned}$$

$y_1 y_2 \dots y_p$ sind also Functionen in $R_1(x; v_1)$.

Wir sahen, dass v_1 einer Differentialgleichung mit Coefficienten aus $R_1(x)$ genügt; das allgemeine Integral der für v_1 aufgestellten Differentialgleichung war das durch die Fundamentalgruppe, welche zu $f=0$ gehört, transformierte $\bar{v}_1$. Da $\bar{v}_1$ in $R_1(x y_1 \dots y_p)$ und $y_1 \dots y_p$ in $R_1(x; v_1)$ liegen, so ist:

$$\bar{v}_1 = \zeta \left(v_1; \frac{dv_1}{dx} \dots \gamma_1 \dots \right),$$

¹⁾ Lie, die Grundlagen für die Theorie der unendlichen continuierlichen Transformationsgruppen. Sächs. Berichte, 1891, p. 316 ff., ferner Lie-Scheffers, Vorlesungen über continuierliche Gruppen. 1893, p. 762. Drach, a. a. O. p. 1043.

wo ζ Coefficienten aus $R_1(x)$ hat und eine rationale Function von $\underline{v_1}$ und dessen Ableitungen ist. Die Differentialgleichung, welcher $\underline{v_1}$ und daher v_1 genügt, braucht nicht für v_1 relativ irreducibel zu sein. Sucht man die relativ irreducible Differentialgleichung, welche v_1 zum Hauptintegral hat, so müssen alle Integrale dieser Differentialgleichung auch der für $\underline{v_1}$ genügen; man findet mithin die Integrale der relativ irreduciblen Differentialgleichung durch geeignete Specialisierung der Parameter γ . Trägt man daher das allgemeine Integral $\underline{v_1}$ der ursprünglichen Differentialgleichung in die relativ irreducible ein, so werden sich gewisse Gleichungen für die Parameter γ ergeben. Da nun noch, wenn r die Ordnung der relativ irreduciblen Differentialgleichung ist, r wesentliche Parameter arbiträr bleiben, werden sich die γ als Functionen von r wesentlichen Parametern ausdrücken.

Es wird aber auch möglich sein, dass die sich für γ ergebenden Relationen kein irreducibles System bilden, sondern sich in mehrere Gleichungssysteme spalten; dann wird jedenfalls das allgemeine Integral V der inbezug auf $\underline{v_1}$ relativ irreduciblen Differentialgleichung eine rationale Function von v_1 und dessen Ableitungen mit r wesentlichen Parametern und durch ein Formelsystem:

$$V = \psi^{[e]} \left(v_1; \frac{dv_1}{dx} \dots \alpha_1 \dots \alpha_r \right)$$

dargestellt; hierbei haben die $\psi^{[e]}$, welche aus der Function ζ hervorgehen, auch nur Coefficienten aus $R_1(x)$.

Daher finden wir:

Eine jede primitive Function ist Integral einer Normaldifferentialgleichung.

Die Normaldifferentialgleichung, welcher eine primitive Function genügt, nennen wir mit Herrn F. Klein¹⁾ eine Differentialresolvente von $f=0$. Als bestimmende Eigenschaften einer Differentialresolvente sehen wir an, dass sie eine Normaldifferentialgleichung mit Coefficienten aus $R_1(x)$ ist, welche eine primitive Function v_1 zum Hauptintegral hat.

Durch die Formeln:

$$y_i = \xi_i \left(v_1; \frac{dv_1}{dx} \dots \right), \quad i = 1, 2 \dots p,$$

ist dem Hauptintegral v_1 der Differentialresolvente ein Fundamentalsystem $y_1; y_2 \dots y_p$ zugeordnet. Ersetzt man v_1 durch ein anderes Integral der Differentialgleichung, so erhält man, wie ersichtlich, wieder Integrale der Differentialgleichung $f=0$. Diese Inte-

¹⁾ Vgl. Beke, math. Annalen Bd. 46. Über die allgemeinsten Resolvente der homogenen linearen Differentialgleichungen.

grale $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$, welche zu einer Lösung V der Differentialresolvente für v_1 gehören, brauchen nicht notwendig ein Fundamentalsystem zu bilden. Wenn $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ Integrale der Differentialgleichung sind, die kein Fundamentalsystem bilden, so bestehen zwischen ihnen und ihren Ableitungen gewisse Gleichungen, die zwischen $y_1, y_2, \dots, y_p$ nicht stattfinden; diese würden sich dann in gewisse Differentialgleichungen für das zugehörige V umsetzen; dann ist V sicher kein Hauptintegral der Differentialresolvente; denn wäre es ein Hauptintegral der Differentialresolvente, so müsste auch v_1 diesen Gleichungen genügen; dies führt aber zu einem Widerspruch. Zu Hauptintegralen der Differentialresolvente gehört stets ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $f=0$. Ist die Differentialresolvente absolut irreducibel, so gehört zu jedem ihrer Integrale ein Fundamentalsystem.

Die Aufstellung einer primitiven Function muss bei den verschiedenen Arten von Differentialgleichungen jedesmal einer näheren Untersuchung vorbehalten bleiben. Bei linearen homogenen Differentialgleichungen schlägt Herr Picard¹⁾, um eine besondere primitive Function aufzustellen, folgenden Weg ein. Er bildet sich eine Größe:

$$w = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_p y_p,$$

wo die u_i Functionen in $R_1(x)$ sind, und sucht sich eine Differentialgleichung der Ordnung p^2 , welcher diese Function genügt. Durch Differentiation und Elimination²⁾ findet man:

$$\begin{aligned} y_1 &= \xi_1\left(w; \frac{dw}{dx} \dots\right) \\ y_2 &= \xi_2\left(w; \frac{dw}{dx} \dots\right) \\ &\vdots \\ y_p &= \xi_p\left(w; \frac{dw}{dx} \dots\right). \end{aligned}$$

Von der Differentialgleichung der Ordnung p^2 , welcher w genügt, geht Herr Picard zu einer der absolut irreduciblen Differentialgleichungen, die zu der vorgelegten Differentialgleichung der Ordnung p^2 gehören. Nun gehört zwar zu jeder Differentialgleichung

¹⁾ Math. Annalen Bd. 46, p. 162 ff. Sur les groupes de transformations des équations différentielles linéaires. (Der obige Ausdruck wird eigentlich von Herrn Vessiot benutzt.)

²⁾ Eine Bestimmung der Functionen u_i , dass die Elimination möglich wird, hat bei linearen homogenen Differentialgleichungen Herr Beke in math. Annalen Bd. 46, p. 557 ff. gegeben. Man müsste nun weitergehend nicht eine bestimmte Wahl der u_i , welche die Bedingung erfüllt, angeben, wie es Beke thut, sondern danach streben, die Gesamtheit von Werten der u_i anzugeben, welche man ausschließen muss, weil bei ihnen die Elimination unmöglich ist.

wenigstens eine absolut irreducible Differentialgleichung; es kann aber möglicher Weise zu keinem Integral der absolut irreduciblen Differentialgleichung ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $f=0$ gehören.

Um unsere Terminologie anzuwenden, muss man daher von der Differentialgleichung der Ordnung p^2 zu einer relativ irreduciblen übergehen; diese muss zu einem ihrer Hauptintegrale eine Function haben, welche zu einem Fundamentalsystem gehört; dies ist stets möglich. In einer soeben im letzten Hefte der Mathematischen Annalen¹⁾ erschienenen Note beschäftigt sich der berühmte französische Mathematiker auch mit diesem Punkt. Wenn wir die knapp gehaltene Form der Note und die Ausdrucksweise richtig verstehen, scheinen die Betrachtungen des bekannten Gelehrten auf Ähnliches herauszukommen. Da wir das Integral der Differentialgleichung der Ordnung p^2 nur so weit specialisierten, dass ihm ein Fundamentalsystem von $f=0$ entspricht, so werden wir verschiedene Integrale finden können, die zu verschiedenen relativ irreduciblen Differentialgleichungen führen können; wir werden dann verschiedene Typen gleichwertiger Differentialresolventen haben. Die Benützung derartiger specieller Differentialresolventen erscheint uns aber als etwas für die Allgemeinheit der Theorie Fremdes; wir werden daher stets nur von dem allgemein gehaltenen Begriff der primitiven Function Gebrauch machen. In den Entwicklungen des französischen Meisters werden wir die wertvolle Angabe einer Möglichkeit sehen, überhaupt primitive Functionen einzuführen.

§. 8.

Rationalitätsgruppe.

Wir werden im Folgenden zwischen zwei Arten von Unveränderlichkeit, einer absoluten und einer relativen, unterscheiden müssen.

Werden $y_1 y_2 \dots y_p$ als völlig freie veränderliche Größen betrachtet, und kommen zwei Transformationen:

$$A: \overline{y_i} = f_i(y_1 y_2 \dots y_p), \quad i=1, 2, \dots p,$$

$$B: \overline{\overline{y_i}} = g_i(\overline{y_1} \dots \overline{y_p}), \quad i=1, 2, \dots p$$

die Eigenschaft zu, eine in bestimmter Form vorgelegte Function $F(y_1 y_2 \dots y_p)$ überhaupt nicht zu ändern, so dass die Function vor wie nach der Transformation genau dieselbe ist, so ist:

$$F(y_1 y_2 \dots y_p) \text{ identisch gleich } F(\overline{y_1} \overline{y_2} \dots \overline{y_p})$$

$$F(\overline{y_1} \overline{y_2} \dots \overline{y_p}) \text{ identisch gleich } F(\overline{\overline{y_1}} \overline{\overline{y_2}} \dots \overline{\overline{y_p}}).$$

¹⁾ Math. Annalen Bd. 47. Sur l'extension des idées de Galois à la théorie des équations différentielles.

Unter diesen Bedingungen ändert die Transformation AB :

$$\overline{y_i} = g_i(f_1(y_1 \dots y_p); f_2(y_1 \dots y_p) \dots f_p(y_1 \dots y_p)), \quad i = 1, 2, \dots, p$$

die Function $F(y_1 \dots y_p)$ auch nicht.

Die Transformationen weisen den Gruppencharakter auf und in $F(y_1 \dots y_p)$ werden wir eine absolute Invariante zu sehen haben.¹⁾

Wir werden noch eine andere Gattung Invarianten zu betrachten haben, welche wir relative Invarianten nennen wollen. Wir werden in $y_1 y_2 \dots y_p$ nicht frei veränderliche Größen, sondern ein beliebiges, aber bestimmt gewähltes Fundamentalsystem von Integralen der vorgelegten Differentialgleichung $f=0$ erblicken, so dass $y_1 y_2 \dots y_p$ etwa durch p Potenzreihen, die in einem gemeinsamen Gebiet convergieren, gegeben sind. Es sei $F(y_1 y_2 \dots y_p y'_1 \dots y_p^{(\lambda)})$ als Function von $y_1 y_2 \dots y_p$ und den Ableitungen in einer bestimmten, unveränderlichen Form vorgelegt;²⁾ bei der Ausführung der Substitution A oder B möge sich F zwar seiner Form nach ändern können, es braucht also keine absolute Invariante zu sein, aber sowohl vor wie nach der Transformation habe F wie die transformierten Größen F_A und F_B , wenn wir das bestimmte Fundamentalsystem einführen, genau denselben Wert als Function von x . Wir nennen daher F eine relative Invariante (relativ bezüglich des Fundamentalsystems $y_1 \dots y_p$). Da durch Ausführung der Transformation A die Function F ihre Form ändern kann und nur relativ den gleichen Wert wie vor der Transformation hat, so darf man nicht schließen, dass auf das durch A transformierte F die Substitution B anwendbar ist und dass man nach der Transformation durch Einführung unseres Fundamentalsystems dieselbe Function von x erhält, wie F vor der Transformation liefert.

Die Transformationen, welche einen Ausdruck in unserem Sinne relativ invariant lassen, weisen keine Gruppeneigenschaft auf.³⁾

Dieser Unterschied zwischen absoluter und relativer Invarianz ist Herrn Vessiot, worauf bereits Herr F. Klein in seinen Vor-

¹⁾ Vgl. Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen, I., pag. 464, 465.

²⁾ Man darf also $F(y_1 \dots y_p \dots y_p^{(\lambda)})$ nicht etwa umformen, indem man davon Gebrauch macht, dass $y_1 y_2 \dots y_p$ Integrale der Differentialgleichung $f=0$ sind.

³⁾ Inbezug auf die analoge Frage in der Algebra vgl. Hölder, Mathem. Annalen, Bd. 34, pag. 40 ff. Ferner Bolza, The Theory of substitutions; diese Arbeit ist eine Besprechung der englischen Übersetzung des Werkes von Herrn Netto. Bulletin of the New-York math. Society 1892—1893, pag. 83 ff.

lesungen aufmerksam machte,¹⁾ leider entgangen. Bei relativer Unveränderlichkeit kann man auf folgende Art zu einer Gruppe gelangen und hiermit einen anderen Ausgangspunkt als Herr Picard bei linearen homogenen Differentialgleichungen gewinnen.

Die Bestimmung, welche in einer Differentialgleichung enthalten ist, kann in erweiterter Fassung umschrieben werden, indem man die Differentialgleichung durch ein Differentialgleichungssystem ersetzt. Wir betrachten alle rationalen Relationen mit Coefficienten aus $R_1(x)$, die zwischen einem bestimmt gewählten Fundamentalsystem $y_1 y_2 \dots y_p$ und dessen Ableitungen bestehen. Diese Relationen werden von zweierlei Art sein können: Die eine Gattung wird so beschaffen sein, dass sie durch jedes Fundamentalsystem erfüllt wird; diese Gleichungen bleiben bei jeder Transformation der Fundamentalgruppe invariant. Die zweite Art von Relationen wird hingegen nur zwischen unserem bestimmt ausgewählten Fundamentalsystem bestehen und mithin nicht von jedem beliebigen Fundamentalsystem erfüllt sein. Eine Relation erster Art ist z. B. bei einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a(x) \frac{dy}{dx} + b(x) y = 0$$

$$\left| \begin{array}{c} y_1 \ y_1'' \\ y_2 \ y_2'' \end{array} \right| + a(x) \left| \begin{array}{c} y_1 \ y_1' \\ y_2 \ y_2' \end{array} \right| = 0.$$

Relationen zweiter Art werden nur bei specialisierten Differentialgleichungen mit Fundamentalgruppe auftreten.

Alle Transformationen, welche die Gesamtheit aller Relationen erster und zweiter Art zwischen einem bestimmt gewählten Fundamentalsystem von Integralen und dessen Ableitungen relativ nicht ändern, bilden eine Gruppe. Durch eine Transformation A gehe eine Relation $F(y_1 y_2 \dots y_p \dots) = 0$ in eine Relation $F_A = 0$ über; diese neue Relation muss auch richtig sein, da A nach Annahme auf alle Relationen zwischen dem Fundamentalsystem $y_1 y_2 \dots y_p$ und dessen Ableitungen anwendbar sein soll, also auch auf $F = 0$. Da B auch auf alle Relationen anwendbar sein soll, so muss B auch auf $F_A = 0$ ausgeübt werden können; mithin ist $F_{AB} = 0$. Wir haben daher eine Gruppe vor uns; diese heiße nach dem Vorschlage von Herrn F. Klein²⁾ die Rationalitätsgruppe.

¹⁾ Math. Annalen Bd. 45, pag. 149 die Besprechung seiner autographierten Vorlesungen; sowie in den Autographien: Höhere Geometrie, II., pag. 298. Sommer 1893.

²⁾ Beke, Math. Annalen, Bd. 45, pag. 280.

Unter der Rationalitätsgruppe einer Differentialgleichung mit Fundamentallösungen verstehen wir die Gesamtheit aller Transformationen, die auf die Gesamtheit aller rationalen Relationen mit Coefficienten aus $R_1(x)$, die zwischen einem bestimmten Fundamentalsystem und dessen Ableitungen bestehen, anwendbar sind, ohne die relative¹⁾ Richtigkeit zu zerstören.

Durch diese Definition ist die Rationalitätsgruppe logisch in einer, wie ich glaube, völlig befriedigenden Weise eingeführt. Bei Differentialgleichungen mit Fundamentallösungen tritt auch hier noch nicht jene Unbestimmtheit auf, welche sich bei der von Herrn Picard angedeuteten Erweiterung der Rationalitätsgruppe von linearen homogenen auf beliebige Differentialgleichungen geltend macht.²⁾

Aus unserer Definition folgt sofort:

Jede rationale Function von einem Fundamentalsystem $y_1 \dots y_p$ und dessen Ableitungen mit Coefficienten aus $R_1(x)$, die sich als Function in $R_1(x)$ ausdrückt, bleibt bei den Substitutionen der Rationalitätsgruppe ungeändert.

Wir bemerken noch, dass die Wahl des Fundamentalsystems erst die Rationalitätsgruppe festlegt und bei verschiedener Wahl des Fundamentalsystems man zu verschiedenen Rationalitätsgruppen kommen kann.

Alle diese verschiedenen Rationalitätsgruppen sind durch eine Transformation der zur Differentialgleichung gehörigen Fundamentallösung ähnlich.

§. 9.

Herstellung der Rationalitätsgruppe und der Hauptsatz.

Es sei v_1 eine primitive Differentialfunction, und es sei:

$$H\left(v_1; \frac{dv_1}{dx} \dots\right) = 0$$

die in bezug auf v_1 relativ irreducible Differentialgleichung, die v_1 zum Hauptintegral hat. $H=0$ ist dann eine Differentialresolvente der ursprünglichen Differentialgleichung $f=0$. Dann ist:

$$v_1 = \chi(y_1 y_2 \dots y_p y'_1 \dots y_p^{(2)}),$$

¹⁾ Relativ in bezug auf das Fundamentalsystem.

²⁾ Math. Annalen, Bd. 47, pag. 156.

wo χ eine rationale ganze Function von $y_1 y_2 \dots y_p y'_1 \dots$ mit Coefficienten aus $R_1(x)$ ist; daher geht $H\left(v_1; \frac{dv_1}{dx} \dots\right) = 0$ in eine Relation für das Fundamentalsystems $y_1 y_2 \dots y_p$ und dessen Ableitungen mit Coefficienten aus $R_1(x)$ über.

$$H\left(\chi(y_1 y_2 \dots y_p \dots y_p^{(\lambda)}) \dots\right) = 0.$$

Durch eine Transformation A der Rationalitätsgruppe gehe:

$$y_1 y_2 \dots y_p$$

in

$$Y_1 = g_1(y_1 \dots y_p y'_1 \dots); \quad Y_2 = g_2(y_1 y_2 \dots y_p y'_1 \dots); \dots$$

über. Durch Erweiterung dieser Transformation ergebe sich:

$$\begin{aligned} Y'_1 &= g'_1(y_1 \dots y_p y'_1 \dots); \quad Y'_2 = g'_2(y_1 \dots y_p y'_1 \dots); \dots \\ &\vdots \\ Y_1^{(l)} &= g_1^{(l)}(y_1 \dots y_p y'_1 \dots); \quad Y_2^{(l)} = g_2^{(l)}(y_1 \dots y_p y'_1 \dots); \dots \end{aligned}$$

Durch die Transformation A muss dann die als Relation zwischen dem Fundamentalsystem aufgefasste Differentialresolvente relativ ungeändert bleiben; daher muss das durch die Transformation A transformierte v_1 , dies sei mit V_1 bezeichnet, auch ein Integral der Differentialresolvente sein.

$$V_1 = \chi(Y_1 Y_2 \dots Y_p \dots Y_p^{(\lambda)}).$$

Nun war:

$$y_l = \xi_l\left(v_1; \frac{dv_1}{dx} \dots \frac{d^r v_1}{dx^r}\right), \quad l = 1, 2, \dots p.$$

Diese Gleichungen sind auch als Relationen für $y_1 y_2 \dots y_p$ anzusehen und werden durch A in:

$$Y_l = \xi_l\left(V_1; \frac{dV_1}{dx} \dots \frac{d^r V_1}{dx^r}\right), \quad l = 1, 2, \dots p$$

übergeführt. Jeder Transformation der Rationalitätsgruppe entspricht der Übergang von dem Hauptintegral v_1 der Differentialresolvente zu einem anderen Integral.

Umgekehrt aber zeigt man:

Dem Übergang von dem Hauptintegral v_1 der Differentialresolvente zu irgend einem Integral derselben entspricht stets eine Transformation der Rationalitätsgruppe.

Besteht nämlich irgend eine rationale Relation:

$$a(y_1 y_2 \dots y_p y'_1 \dots y'_p \dots) = 0$$

zwischen dem Fundamentalsystem $y_1 y_2 \dots y_p$ und dessen Ableitungen mit Coefficienten aus $R_1(x)$, so geht diese vermöge:

$$y_l = \xi_l \left(v_1; \frac{dv_1}{dx} \dots \right), \quad l = 1, 2, \dots, p,$$

in eine Differentialgleichung:

$$a \left(\xi_1 \left(v_1; \frac{dv_1}{dx} \dots \right), \xi_2(v_1 \dots) \dots \right) = 0$$

für v_1 über. Da diese Differentialgleichung mit der Differentialresolvente das Hauptintegral v_1 gemein hat, so muss diese Differentialgleichung durch alle Integrale der Differentialresolvente befriedigt werden. Mithin wird für irgend ein Integral V_1 der Differentialresolvente:

$$a(\xi_1(V_1 \dots), \xi_2(V_1 \dots) \dots) = 0$$

sein.

Die Transformationen der Rationalitätsgruppe werden insgesamt durch Übergang von dem Hauptintegral v_1 der Differentialresolvente für v_1 zu einem beliebigen anderen gefunden.

Das allgemeine Integral der Differentialresolvente wird, da diese eine Normaldifferentialgleichung ist, wie wir p. 243 sahen, durch:

$$V = \psi^{[e]} \left(v_1, \frac{dv_1}{dx} \dots \alpha_1 \dots \alpha_r \right), \quad \rho = 1, 2, \dots, i,$$

geliefert. Mithin werden die Transformationen der Rationalitätsgruppe durch:

$$y_l = \xi_l \left(v_1; \frac{dv_1}{dx} \dots \frac{d^v v_1}{dx^v} \right), \quad l = 1, 2, \dots, p,$$

$$Y_l = \xi_l \left(V; \frac{dV}{dx} \dots \frac{d^v V}{dx^v} \right), \quad l = 1, 2, \dots, p,$$

in Verbindung mit der obigen Gleichung gegeben.

Wir bemerken noch: Bedenkt man, dass:

$$V = \psi^{[e]} \left(v_1; \frac{dv_1}{dx} \dots \right)$$

eine Gruppe, die Fundamentalgruppe der Differentialresolvente bestimmt, so könnte man bei einer anderen Definition der Rationalitätsgruppe, die nicht von Anfang an den Gruppencharakter benützt, aus den oben gegebenen Formeln den Gruppencharakter der sich zwischen Y_l und dessen Ableitungen einerseits und den y_l

und dessen Ableitungen andererseits ergebenden Transformationen nachweisen.

Wir beweisen nun den Hauptsatz:

Jede rationale Function des Fundamentalsystems $y_1 y_2 \dots y_p$ und dessen Ableitungen mit Coefficienten aus $R_1(x)$, welche bei jeder Transformation der Rationalitätsgruppe relativ invariant bleibt, ist eine Function aus $R_1(x)$.

(Also jede Function in $R_1(x y_1 \dots y_p)$, welche eine relative Invariante der Rationalitätsgruppe ist, ist in $R_1(x)$ befindlich.)

Es sei $F(y_1 y_2 \dots y_p y_1' \dots y_p' \dots)$ eine rationale Function der Integrale $y_1, y_2, \dots, y_p$ und deren Ableitungen mit Coefficienten aus $R_1(x)$ und habe die verlangte Eigenschaft bei jeder Transformation der Rationalitätsgruppe relativ invariant zu sein. Führt man die primitive Größe v_1 ein, so geht der obige Ausdruck in:

$$F_1\left(v_1; \frac{dv_1}{dx} \dots\right)$$

über; nach Voraussetzung ändert sich dieser Ausdruck seinem Wert nach nicht, wenn man v_1 durch ein beliebiges Integral der Differentialresolvente ersetzt. Das allgemeine Integral der Differentialresolvente ist nun gegeben durch: $V = \psi^{[e]}\left(v_1; \frac{dv_1}{dx} \dots \alpha_1 \dots \alpha_r\right)$,

$\rho = 1, 2, \dots, i$, und da wir eine Normaldifferentialgleichung haben, so wird hierdurch eine Fundamentalgruppe bestimmt. Diese enthält wie jede complexe Gruppe eine ganz bestimmte, größte von infinitesimalen Transformationen erzeugte continuierliche r gliedrige Untergruppe; diese wird von einer der i Scharen, etwa von der ersten: $V = \psi^{[1]}\left(v_1; \frac{dv_1}{dx} \dots \alpha_1 \dots \alpha_r\right)$ repräsentiert.

Betrachten wir nun

$$F_1\left(V; \frac{dV}{dx} \dots\right) = F_1\left(\psi^{[1]}\left(v_1; \frac{dv_1}{dx} \dots\right) \dots\right),$$

so stellt diese Functionenschar in ihrer Gesamtheit eine absolute Invariante der durch infinitesimale Transformationen erzeugten größten continuierlichen Untergruppe der Fundamentalgruppe dar; denn wendet man die Transformation:

$$T = \psi^{[1]}\left(V; \frac{dV}{dx} \dots\right)$$

an, so findet man:

$$\begin{aligned}
 F_1 \left(T; \frac{dT}{dx} \dots \right) &= F_1 \left(\psi^{[1]}(V \dots) \dots \right) \\
 &= F_1 \left(\psi^{[1]} \left(\psi^{[1]}(v_1 \dots) \dots \right) \dots \right) \\
 &= F_1 \left(\psi^{[1]} \left(v_1; \frac{dv_1}{dx} \dots \right) \dots \right),
 \end{aligned}$$

also dieselbe Schar. Nun ist aber nach Voraussetzung $F_1 \left(V; \frac{dV}{dx} \dots \right)$ gleichwertig mit $F_1 \left(v_1; \frac{dv_1}{dx} \dots \right)$. Mithin hängt unsere Schar nicht von den willkürlichen Parametern ab, welche die größte continuierliche Untergruppe der Fundamentalgruppe einführt; wir haben daher keine Functionenschar, sondern eine einzelne absolute Invariante der betrachteten Gruppe. Wählen wir nun aus jeder der i Scharen der Fundamentalgruppe eine beliebige Transformation,¹⁾ diese seien außer der Identität T_1 noch $T_2, T_3, \dots, T_i$, so kann jede Transformation der Fundamentalgruppe erhalten werden, wenn man erst die gewählte Transformation und alsdann eine gewisse Transformation der continuierlichen Untergruppe ausführt. Durch die gewählten i Transformationen möge nun F_1 die Werte $F_1, F_2, \dots, F_i$ annehmen; diese sind nach der Voraussetzung alle relativ gleichwertig; mithin ist F_1 auch mit $\frac{F_1 + F_2 + \dots + F_i}{i}$ relativ gleichwertig; dieser Ausdruck ist nun

eine absolute Invariante der Fundamentalgruppe; denn durch irgend eine Transformation derselben ändern sich die Functionen F überhaupt nicht oder sie vertauschen sich untereinander, hierbei gehen zwei verschiedene Functionen stets in verschiedene über. Da wir eine absolute Invariante vor uns haben, so ist diese und mithin auch F_1 , durch die Coefficienten der Differentialresolvente, welche als Definitionsgleichung der Fundamentalgruppe anzusehen ist, und deren Ableitungen nach dem schon oben erwähnten Satz von Herrn Lie²⁾ ausdrückbar. Hiermit ist unser Theorem auf eine von dem Beweis des Herrn Picard³⁾ ganz verschiedene Art dargethan.

§ 10.

Affect von Differentialgleichungen.

Unsere bisherigen Betrachtungen haben die Existenz einer Rationalitätsgruppe erwiesen. Der Begriff der Rationalitätsgruppe ist ein relativer; er hängt von der Wahl des Rationalitätsbereiches

¹⁾ Vgl. Lie-Engel, Bd. I, Cap. 18, vorzüglich pag. 316.

²⁾ Vgl. pag. 241 und 242.

³⁾ Math. Annalen, Bd. 46, pag. 164.

ab. Bei einer jeden Differentialgleichung ist unter allen möglichen Rationalitätsbereichen einer als der möglichst einfachste, nämlich der kleinste Bereich, mitgegeben; er ist derjenige, welcher von den Coefficienten der Differentialgleichung und den in der Fundamentalgruppe auftretenden Functionen festgelegt wird. Dieser werde von jetzt ab der zur Differentialgleichung zugehörige Rationalitätsbereich genannt und mit $r(x)$ bezeichnet. Denken wir uns hingegen den Rationalitätsbereich, in dem wir unsere Untersuchungen anstellen, ganz beliebig, so dass er entweder gleich oder umfassender als $r(x)$ ist, so sei er mit $R_i(x)$ bezeichnet. Im allgemeinen wird bei Zugrundelegung des zugehörigen Rationalitätsbereiches $r(x)$ die Rationalitätsgruppe mit der Fundamentalgruppe zusammenfallen. Nach dem Vorgang der Algebra sagen wir dann, unsere Differentialgleichung hat keinen Affect. Erst wenn man gewisse Gattungen von Functionen, welche bisher nicht rational bekannt sind, dem Bereich $r(x)$ adjungiert, ändert sich der Charakter der Differentialgleichung und sie erhält jetzt einen Affect. Aber es wird auch anders sein können; unsere Differentialgleichung kann in $r(x)$ ohne Adjunction bisher nicht bekannter Größen eine Rationalitätsgruppe haben, welche kleiner als die Fundamentalgruppe ist. Wir werden dann von einem Affect der Differentialgleichung sprechen. Je kleiner die Rationalitätsgruppe ist, desto größer wird der Affect der Differentialgleichung sein. Es wird nun auch eine Aufgabe der Theorie sein, Differentialgleichungen mit verschiedenem Affect zu studieren und ihre charakteristischen Eigenschaften anzugeben.

§ 11.

Adjunction einer natürlichen transcendenten Function.

Wir sprachen schon im vorigen Paragraphen davon, dass der Rationalitätsbereich $R_i(x)$, welcher der Betrachtung zu Grunde gelegt werden muss, in gewisser Beziehung der willkürlichen Wahl¹⁾ überlassen bleibt. Adjungiert man einem beliebigen der Betrachtung zu Grunde zu legenden Rationalitätsbereich $R_i(x)$ gewisse bisher unbekannte Größen, so kann hierdurch eine Vereinfachung der Rationalitätsgruppe eintreten; zu derartigen Betrachtungen gehen wir nun über.²⁾

Wir adjungieren dem Bereich $R_i(x)$, für den wir die Rationalitätsgruppe bestimmt haben, irgend eine rationale Function des Fundamentalsystems $y_1 y_2 \dots y_p$ unserer Differentialgleichung und dessen Ableitungen mit Coefficienten aus $R_i(x)$; sie sei $t(y_1 y_2 \dots y_p y'_1 \dots y'_2 \dots)$. Während wir früher ein einzelnes In-

¹⁾ $R_i(x)$ muss stets $r(x)$ umfassen.

²⁾ Vgl. V., pag. 235—239.

tegral der Differentialgleichung als eine dem Bereiche entstammende transcendente Function bezeichneten, sei in Zukunft eine derartig gebildete Größe eine dem Bereich entstammende transcendente Function genannt. Da bei der Bildung dieser transcendenten Function nur Integrale der vorgelegten Differentialgleichung verwandt wurden, möge die adjungierte Function eine natürliche transcendente Function heißen. Analog spricht die Algebra von natürlichen Irrationalitäten. Durch Adjunction von $t(y_1 y_2 \dots y_p y'_1 \dots)$ gehe aus $R_i(x)$ der Bereich $R_{i+1}(x)$ hervor. Wir beweisen jetzt folgenden Satz:

Durch Adjunction einer natürlichen Transcendenten zu einem Bereich $R_i(x)$ reducirt sich die im Bereich $R_i(x)$ zu einer vorgelegten Differentialgleichung gehörige Rationalitätsgruppe auf diejenigen ihrer Transformationen, welche die adjungierte Transcendente relativ invariant lassen.

Zunächst ersieht man, dass alle Transformationen der Rationalitätsgruppe, welche eine natürliche Transcendente relativ invariant lassen, eine Gruppe bilden. Auf die natürliche Transcendente $t(y_1 y_2 \dots y_p y'_1 \dots)$ mögen zwei Transformationen A und B der Rationalitätsgruppe anwendbar sein; bei diesen bleibe t relativ invariant. Die durch A und B transformierten Werte von t , nämlich t_A und t_B , sind dann gleichwertig mit t . $t_A - t = 0$; $t_B - t = 0$.

Da $t_A - t = 0$ auch eine Relation zwischen dem Fundamentalsystem $y_1 y_2 \dots y_p$ und dessen Ableitungen mit Coefficienten aus $R_i(x)$ ist, so kann man die Transformation B der Rationalitätsgruppe anwenden und findet: $t_{AB} - t_B = 0$, da $t_B = t$, so wird $t_{AB} = t$. Wir haben mithin eine Gruppe.

Bei der Adjunction von t fahren alle Relationen mit Coefficienten aus $R_i(x)$, die zwischen einem Fundamentalsystem $y_1 y_2 \dots y_p$ und dessen Ableitungen bestehen, natürlich fort, für $R_{i+1}(x)$ rationale Relationen zu sein. Jetzt sind nur die adjungierte Größe t und mithin deren sämtliche Ableitungen nach der Variablen x noch im Rationalitätsbereich gelegen. Daher können die Transformationen der neuen Rationalitätsgruppe nur unter den Transformationen enthalten sein, die t relativ invariant lassen und der alten Rationalitätsgruppe angehörten. Wir zeigen nun umgekehrt, dass jede derartige Transformation, die der alten Rationalitätsgruppe angehört und t relativ invariant lässt, auch der neuen Rationalitätsgruppe angehört. Sei irgend eine Relation zwischen den Integralen $y_1, y_2, \dots, y_p$ und deren Ableitungen mit Coefficienten aus $R_{i+1}(x)$ vorgelegt, so kann diese in die Form:

$$g(y_1 \dots y_p y'_1 \dots y'_p \dots y''_p; t; \frac{dt}{dx}; \frac{d^2 t}{dx^2} \dots) = 0$$

gesetzt werden, wo die Coefficienten von g , wenn wir t und alle in g auftretenden Ableitungen von t nach x als separate Größen betrachten, nur $R_i(x)$ angehören. t und dessen Ableitungen nach x haben als Functionen von $y_1 y_2 \dots y_p$ betrachtet, auch nur Coefficienten aus $R_i(x)$. Man kann nun auf die Relation $g=0$ jede Transformation der Rationalitätsgruppe anwenden, die t relativ invariant läßt; da sich bei diesen Transformationen auch die Ableitungen von t relativ nicht ändern, so bleibt die Relation hierdurch richtig. Hiermit ist unser Satz erwiesen. Da t und mithin seine Ableitungen bei den Transformationen, von denen wir handeln, relativ invariant bleiben, so brauchen wir die Transformationen übrigens nur in den in g explicit auftretenden $y_1, y_2, \dots, y_p$ und deren Ableitungen auszuführen.

§. 12.

Das Verhalten einer adjungierten natürlichen Transcendenten bei den Transformationen der Rationalitätsgruppe.

Die folgenden Untersuchungen bedingen eine nähere Betrachtung der Rationalitätsgruppe. Diese ist mit der Fundamentalgruppe der Differentialresolvente isomorph und gehört ebenso wie alle hier in Frage kommenden Untergruppen zu der Gattung endlicher Gruppen, deren Transformationen discrete continuierliche Scharen bilden,¹⁾ also zu den complexen oder gemischten Gruppen. Die complexe Rationalitätsgruppe sei mit K bezeichnet und G möge die größte in ihr enthaltene von infinitesimalen Transformationen erzeugte continuierliche Untergruppe sein; diese ist stets eine invariante Untergruppe der complexen Gruppe.²⁾ Man kann nun die Gruppe K stets durch die Gesamtheit der Transformationen:

$$s_0 G; s_1 G; s_2 G; \dots s_{i-1} G$$

darstellen; hierbei durchläuft G jede Transformation der continuierlichen Untergruppe G und s_0 ist die Identität; $s_1; s_2 \dots s_{i-1}$ sind $i-1$ Transformationen, welche G invariant lassen. Diese sind unter einander und mit s_0 durch Relationen:

$$s_\mu \cdot s_\nu = s_\pi g_\tau,$$

wo g_τ eine beliebige Transformation aus G ist, verbunden; nie aber darf:

$$s_\mu = s_\nu g_\tau$$

sein, wenn μ ungleich ν ist.

Den Operationen:

$$s_0 G; s_1 G \dots s_{i-1} G$$

¹⁾ Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen, Bd. I, pag. 465.

²⁾ Inbezug auf complexe Gruppen vgl. man Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen, Bd. I, Cap. 18.

wird mithin auch der Gruppencharakter zukommen; denn die Composition von $s_\lambda g_\tau$ mit $s_\mu \cdot g_\sigma$ wird stets eine Transformation $s_\pi g_\sigma$ ergeben, hierbei wird der Index π nur von der Wahl der Indices λ und μ , nicht von der Wahl der Transformationen g_τ und g_σ aus G , abhängig sein. Diese Gruppe nennen wir in Analogie mit den Untersuchungen von Herrn Hölder,¹⁾ welche sich auf endliche discontinuierliche Gruppen beziehen, eine Factorgruppe und führen das Symbol K/G ein.

Die adjungierte natürliche Transcendente möge nun bei einer Untergruppe K_1 der Rationalitätsgruppe K relativ invariant bleiben; dann besitzt K_1 eine von infinitesimalen Transformationen erzeugte invariante Untergruppe G_1 ; diese ist eine Untergruppe von G . Wenden wir nun die Transformationen der continuierlichen Untergruppe G der Rationalitätsgruppe auf die in t auftretenden Integrale $y_1 y_2 \dots y_p$ und deren Ableitungen an, so nimmt, wie eine nähere Überlegung zeigt, das transformierte t , das wir mit $\bar{t}$ bezeichnen, ∞^m Werte an; hierbei nehmen wir an, dass die Gruppe G r gliedrig und die Gruppe G_1 , bei welcher t relativ invariant bleibt, $r - m$ gliedrig ist.²⁾ Der Inbegriff der ∞^m Werte von $\bar{t}$ bleibt gegenüber den Transformationen der Gruppe G relativ invariant. Man überzeugt sich auch leicht, dass, falls durch eine Transformation g aus G der Wert von t in eine Function t' übergeht, t durch alle Transformationen $g G_1$, wo G_1 eine beliebige Transformation aus der Gruppe G_1 ist, in t' übergeht; t' bleibt bei allen Transformationen der zu G_1 ähnlichen Gruppe $g G_1 g^{-1}$ relativ invariant.

Jede einzelne in der Functionenschar $\bar{t}$ enthaltene Größe bleibt bei einer jeden Transformation der größten in G_1 enthaltenen continuierlichen Untergruppe J , welche in G invariant ist, relativ un geändert, denn J ist auch in allen zu G_1 ähnlichen Gruppen als Untergruppe enthalten.

Durch Ausführung der Transformationen:

$$s_0 G; s_1 G; s_2 G; \dots s_{i-1} G.$$

der Gruppe K/G möge die Größe $\bar{t}$ in die verschiedenen Größen:

$$\bar{t}_0 \bar{t}_1 \dots \bar{t}_{i-1}$$

übergehen; hierbei ist $\bar{t}_0 = \bar{t}$, da s_0 die Identität ist.

Jeder Transformation der Rationalitätsgruppe, welche auf das Fundamentalsystem $y_1 y_2 \dots y_p$ anwendbar ist, entspricht eine Trans-

¹⁾ Math. Annalen, Bd. 34, pag. 31.

²⁾ Vgl. inbezug auf eine nähere Begründung der hier angeführten Resultate: Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen Bd. I, § 113, § 114.

formation in der Größenschar $\bar{t}_0 \bar{t}_1 \dots \bar{t}_{i-1}$. Kennzeichnet man zunächst die einzelnen Werte des t , welches doch ∞^m Werte annimmt, durch m Parameter $\bar{l}_1 \bar{l}_2 \dots \bar{l}_m$, so erhält man zuerst eine gewisse Gruppe in den l ; diese gibt die Vertauschung der einzelnen Werte des t untereinander an. Die so entstandene Gruppe ist isomorph mit der Gruppe G und sei mit H bezeichnet. H ist dann diejenige zu G isomorphe Gruppe, welche der Art isomorph auf G bezogen ist, dass die invariante Untergruppe J von G der identischen Transformation von H entspricht.

Die verschiedenen Werte

$$\bar{t}_0 \bar{t}_1 \dots \bar{t}_{i-1}$$

transformieren sich nach einer endlichen discontinuierlichen Gruppe, welche isomorph zu K/G ist. Diese isomorphe Gruppe sei mit H' bezeichnet. Der Identität in H' entspricht in K/G eine invariante Untergruppe J' , bei der eine jede der Größen $\bar{t}_0 \bar{t}_1 \dots \bar{t}_{i-1}$ relativ invariant bleibt.

§. 13.

Aufstellung einer Differentialgleichung für die adjungierte natürliche Transscendente.

Wir können nun die Differentialgleichung, welcher t genügt, aufstellen. Man eliminiere zunächst aus $\bar{t}$ und dessen Ableitungen die willkürlichen Parameter; hiermit ist eine Differentialgleichung, der $\bar{t}$ genügt, gewonnen. Die Coefficienten dieser Differentialgleichung sind Functionen von $y_1 y_2 \dots y_p$ mit Coefficienten aus $R_i(x)$. Transformiert man diese Differentialgleichung durch:

$$s_0 G; s_1 G; \dots s_{i-1} G$$

und behält nur die verschiedenen Werte bei, so bilde man sich deren Product. Die neue Differentialgleichung wird dann sowohl durch $\bar{t}_0$, wie $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_{i-1}$ befriedigt. Die Coefficienten dieser Differentialgleichung sind Functionen des Integralsystems $y_1 y_2 \dots y_p$ in $R_i(x)$. Die Coefficienten der Differentialgleichung ändern sich nun nicht bei Ausführung einer Transformation der Rationalitätsgruppe; mithin sind sie nach p. 251 Functionen in $R_i(x)$.

Wir behaupten ferner, dass unsere Differentialgleichung für t relativ irreducibel ist. Suchen wir nämlich die relativ irreducibele Differentialgleichung, welche t zu einem ihrer Haupt-

integrale hat, und Coefficienten aus $R_i(x)$ hat, so sei diese $i\left(t; \frac{dt}{dx} \dots\right) = 0$. Diese Differentialgleichung ist als Relation zwischen dem Fundamentalsystem $y_1, y_2 \dots y_p$ und dessen Ableitungen mit Coefficienten aus $R_i(x)$ anzusehen; daher kann eine jede Transformation der Rationalitätsgruppe angewandt werden. Durch die Transformationen der Rationalitätsgruppe geht nun t in $\bar{t}_0, \bar{t}_1 \dots \bar{t}_{i-1}$ über.

Mithin genügen alle diese verschiedenen Ausdrücke der relativ irreducibelen Differentialgleichung. Nun aber hat unsere ursprünglich für t aufgestellte Differentialgleichung außer den der relativ irreducibelen Differentialgleichung genügenden Integralen keine weiteren; mithin sind beide Differentialgleichungen identisch.

Unsere ursprüngliche Differentialgleichung ist daher für t relativ irreducibel.

§. 14.

Charakter der relativ irreducibelen Differentialgleichung, welcher die adjungierte natürliche Transscendente genügt.

Um die Eigenschaften der relativ irreducibelen Differentialgleichung für t zu untersuchen, brauchen wir folgenden Hilfssatz:

Bleibt bei der Adjunction mehrerer verschiedener natürlicher Transscendenten $t, t', t'' \dots t^{(i)}$ zum Bereich $R_i(x)$ eine natürliche Transscendente s bei jeder Transformation der Rationalitätsgruppe, die nach Adjunction der Größen $t, t' \dots t^{(i)}$ zum Bereich $R_i(x)$ reduziert, relativ invariant, so wird:

$$s = A \left(t; t'; t''; \dots t^{(i)} \frac{dt}{dx} \dots \frac{d^v t}{dx^v}, \frac{dt'}{dx} \dots \right),$$

wo A nur Coefficienten aus $R_i(x)$ besitzt.

Der Beweis dieses Satzes beruht darauf, dass nach der Adjunction von $t, t' \dots t^{(i)}$ zu $R_i(x)$ die Größe s nach p 251 zu den rationalen Größen gehört.

Gehen wir nun zu unserer relativ irreducibelen Differentialgleichung, welche t zu einem ihrer Hauptintegrale hat und deren allgemeines Integral $\bar{t}_0$ bzw. $\bar{t}_1, \dots \bar{t}_{i-1}$ ist, über.

Nach unserer Annahme reduciere sich durch Adjunction von t die größte kontinuierliche Untergruppe der ursprünglichen Rationalitätsgruppe auf die kontinuierliche Gruppe G_1 , bei der t relativ invariant bleibt; hingegen ändert jede Function der Schar $\bar{t}$ bei

den Transformationen einer in G invarianten Untergruppe J , welche in G_1 enthalten ist, ihren Wert nicht. Wir adjungieren dem Bereich $R_i(xt)$ einen speciellen Wert aus der Schar $\bar{t}$; dieser sei t' bezeichnet und bleibe bei einer in G enthaltenen kontinuierlichen Gruppe G'_1 relativ invariant.

Dann ist G'_1 mit G_1 ähnlich und umfasst daher J . Es sei nun t' so gewählt, dass G'_1 und G_1 als größte gemeinsame kontinuierliche Gruppe eine Gruppe D_1 haben, die eine geringere Gliederzahl als G_1 hat. Diese Wahl ist stets möglich, außer wenn G_1 eine invariante Untergruppe von G ist und daher mit J zusammenfällt.

Wenn dieser Ausnahmefall nicht eintritt und D_1 nicht in G invariant ist, so suche man eine Größe t'' aus der Schar $\bar{t}$; die Größe t'' bleibe bei einer kontinuierlichen Untergruppe G''_1 von G relativ invariant und sei so gewählt, dass die drei ähnlichen Gruppen G_1, G'_1, G''_1 als größte gemeinsame kontinuierliche Gruppe D_2 eine Untergruppe von D_1 , die also eine geringere Gliederzahl als D_1 hat, besitzen.

Auf diese Art fahre man fort bis man schließlich durch Wahl einer endlichen Anzahl specieller Werte des $\bar{t}$, nämlich $t, t', t'', \dots, t^{(n)}$ als größte gemeinsame kontinuierliche Gruppe der ähnlichen Gruppen $G_1, G'_1, G''_1, \dots, G^{(n)}_1$, bei denen die erwähnten Größen relativ invariant bleiben, die Gruppe J findet. Da die Gliederzahl der Gruppen $D_1, D_2, \dots$ eine abnehmende ist, so ist die hierbei notwendige Anzahl der speciellen Werte von $\bar{t}$ eine endliche. Da $\bar{t}$ nun auch bei den Transformationen von J relativ invariant bleibt, so wird nach dem oben angeführten Hilfssatz:

$$\bar{t} = A \left(t; t' \dots t^{(n)} \frac{dt}{dx} \dots \frac{d^n t}{dx^n} \frac{dt'}{dx} \dots \right),$$

wo A nur Coefficienten aus $R_i(x)$ hat und in A auch willkürliche constante Parameter auftreten können. Hierbei ist jedoch noch die Voraussetzung gemacht, dass $\bar{t}$ auch bei den discreten Transformationen der Rationalitätsgruppe, welche $t, t', \dots, t^{(n)}$ gemeinsam zulassen, relativ invariant bleibe. Diese Voraussetzung trifft, wie man sich überzeugt, hier zu. Man führt auch leicht den Nachweis, dass

$$\bar{t}_j = A \left(t_j, t'_j, \dots, t^{(n)}_j \frac{dt_j}{dx} \dots \right)$$

wird, wo $j = 1, 2, \dots, i' - 1$.

Derartige Differentialgleichungen, wie wir sie hier vor uns haben und bei denen das allgemeine Integral aus discreten Functionen besteht, können durch vorherige Lösung einer algebraischen Gleichung (Differentialgleichung nullter Ordnung) auf eine Differentialgleichung für das einzige allgemeine Integral t_0 , bzw. $\bar{t}_j$ reduciert werden. Die Galois'sche Gruppe dieser algebraischen Gleichung ist dann zur Gruppe K/G isomorph. Diese Gruppe ist die Gruppe H' (pag. 257).

Will man jedoch nicht von Anfang an Lösungen algebraischer Gleichungen vornehmen, so kann man in Übereinstimmung mit pag. 24 die Rationalitätsgruppe bei derartigen Differentialgleichungen definieren als Gesamtheit aller Transformationen, welche auf die Gesamtheit aller Relationen mit Coefficienten aus $R_i(x)$, die zwischen $t_j, t'_j, \dots, t_j^{(i)}$ ($j=0, 1, 2, \dots, i'-1$) und deren Ableitungen bestehen, anwendbar sind, ohne die relative Richtigkeit zu zerstören.

Eine Relation zwischen $t_j, t'_j, \dots, t_j^{(i)}$ ($j=0, 1, \dots, i'-1$) und deren Ableitungen mit Coefficienten aus $R_i(x)$ ist eine Relation zwischen $y_1 \dots y_p$ und deren Ableitungen mit Coefficienten aus $R_i(x)$. Auf die letztere Relation ist nun die Gruppe K/G in Verbindung mit G anwendbar. Der Gruppe G entspricht nun für die Größen t die isomorphe Gruppe H und der Gruppe K/G die isomorphe Gruppe H' .

Durch Adjunction einer natürlichen Transscendenten t zum Bereich $R_i(x)$ wird man zu einer relativ irreduciblen Differentialgleichung mit Coefficienten aus $R_i(x)$, der t als Hauptintegral genügt, geführt. Die Rationalitätsgruppe dieser Differentialgleichung ist aus einer continuierlichen Gruppe H und einer discontinuierlichen Gruppe H' zusammengesetzt. H ist die zu einer invarianten Untergruppe J der continuierlichen Untergruppe G der ursprünglichen Rationalitätsgruppe K gehörige isomorphe Gruppe und H' ist die zu einer invarianten Untergruppe J' der Gruppe K/G gehörige isomorphe Gruppe. Hierbei ist angenommen: t bleibe relativ invariant bei einer continuierlichen Untergruppe G_1 von G in Verbindung mit einer Gruppe K_1/G_1 , welche Untergruppe von K/G ist; J und J' sind die größten in G_1 , bzw. K_1/G_1 enthaltenen Untergruppen, die in G , bzw. K/G invariant sind. Man überzeugt sich auch leicht (vgl. pag. 257) von der Richtigkeit des folgenden Satzes:

Durch Adjunction aller Integrale der Hilfsdifferentialgleichung wird die Rationalitätsgruppe auf eine aus J und J' gebildete gemischte Gruppe reduciert.

§. 15.

Einfachste Methode der Reduction der vorgelegten Differentialgleichung auf eine Kette von Hilfsdifferentialgleichungen.

Am einfachsten werden die Eigenschaften der relativ irreduciblen Differentialgleichung, welche t zum Hauptintegral hat, wenn die größte Untergruppe der Rationalitätsgruppe, bei der t relativ invariant ist, keine gemischte, sondern von Anfang an eine continuierliche Gruppe, und ferner diese in G invariant ist, also mit J zusammenfällt. Unter diesen Bedingungen wird:

$$\bar{t} = A\left(t; \frac{dt}{dx} \dots\right).$$

Geht nämlich durch irgend eine Transformation g der Rationalitätsgruppe die Function t in t' über, so bleibt t' bei gJg^{-1} relativ invariant; nun ist $gJg^{-1} = J$, daher bleibt $\bar{t}$ bei allen Transformationen, die t relativ invariant lassen, gleichfalls relativ invariant. Mithin gilt der Satz auf pag. 258.

Unsere Hilfsdifferentialgleichung ist daher eine Normaldifferentialgleichung.

Man zeigt umgekehrt:

Genügt eine adjungierte natürliche Transscendente als Hauptintegral einer Normaldifferentialgleichung, so ist die zugehörige continuierliche Untergruppe G_1 der Rationalitätsgruppe in G invariant.

Da

$$\bar{t} = A\left(t; \frac{dt}{dx} \dots\right)$$

ist, so ändert sich $\bar{t}$ bei allen Transformationen der Rationalitätsgruppe, die t relativ invariant lassen, auch nicht. t ändert sich bei der Gruppe G_1 nicht, die Werte von $\bar{t}$ ändern sich aber bei zu G_1 ähnlichen Gruppen nicht; daher fallen diese ähnlichen Gruppen mit G_1 zusammen; also ist G_1 in G invariant.

Um eine vorgelegte Differentialgleichung der untersuchten Art: $f\left(y; \frac{dy}{dx} \dots\right) = 0$ mit Coefficienten aus einem Bereich $r(x)$ und einer Rationalitätsgruppe K in diesem Bereich zu integrieren, wird man auf folgende Art verfahren:

Man suche die größte continuierliche Untergruppe G von K und zerlege die endliche Gruppe K/G , die wir L nennen wollen, in eine Normalreihe $L, L_1, L_2, \dots, L_r$, sodass L_{k+1} eine invariante Untergruppe von L_k ist, die in keiner größeren invarianten Untergruppe von L_k steckt. L_0 ist hierbei mit L , L_i mit der Identität gleichbedeutend. Durch die Normalreihe ist eine Kette einfacher

Gruppen: $L / L_1; L_1 / L_2; L_2 / L_3; \dots; L_{i-1} / L_i$ bestimmt.¹⁾ Ebenso zerlege man die continuierliche Gruppe G in eine Normalreihe continuierlicher Gruppen: $G, J_1, J_2, \dots, J_n$ wo J_{k+1} eine maximale invariante Untergruppe von J_k ist. Hierbei seien G mit J_0 und J_i mit der Identität gleichbedeutend. Durch diese Normalreihe ist auch eine Reihe einfacher Gruppen bestimmt; wir bezeichnen sie mit:

$$G / J_1; J_1 / J_2; \dots; J_{i-1} / J_i.$$

J_k / J_{k+1} ist hierbei die einfache zu J_k isomorphe Gruppe, die dadurch erhalten wird, dass man in den Relationen für die Zusammensetzung von J_k alle infinitesimalen Transformationen der invarianten Untergruppe J_{k+1} Null setzt.²⁾

Man bilde sich dann eine rationale Function s_1 der Integrale $y_1, y_2, \dots, y_p$ und deren Ableitungen mit Coefficienten aus $r(x)$. Diese Function s_1 bleibe bei einer Untergruppe aus K , die von G und L_1 zusammen gebildet wird, relativ invariant, ändere aber bei jeder weiteren Transformation von K ihren Wert. Dann genügt s_1 einer algebraischen Gleichung $f_1(s) = 0$ mit Coefficienten aus $r(x)$. Die Gruppe dieser Gleichung ist L / L_1 . Die Gleichung ist ferner eine Galois'sche oder Normalgleichung, da L_1 invariant in L ist. Adjungiert man alle Wurzeln von $f_1(s) = 0$ oder auch, da die Gleichung eine Normalgleichung ist, nur die Wurzel s_1 dem Bereich $r(x)$, so entstehe ein Bereich $R_1(x)$; in diesem wird die Rationalitätsgruppe der ursprünglichen Differentialgleichung die aus L_1 in Verbindung mit G gebildete gemischte Gruppe.

Man suche eine rationale Function von $y_1 y_2 \dots y_p$ mit Coefficienten aus $R_1(x)$, welche bei allen Transformationen der aus L_2 in Verbindung mit G gebildeten gemischten Gruppe relativ invariant bleibt und bei allen weiteren Transformationen der für den Bereich $R_1(x)$ bestimmten neuen Rationalitätsgruppe ihren Wert ändert; diese Function sei s_2 ; sie genügt einer algebraischen Normalgleichung $f_2(s) = 0$. Die Gruppe dieser Gleichung ist L_1 / L_2 . Adjungiert man alle Wurzeln von $f_2(s) = 0$ oder auch, da die Gleichung eine Normalgleichung ist, nur die Wurzel s_2 dem Bereich $R_1(x)$, so entstehe ein Bereich $R_2(x)$; in diesem wird die Rationalitätsgruppe der ursprünglichen Differentialgleichung die aus L_2 in Verbindung mit G gebildete gemischte Gruppe. Fährt man so fort, so hat man zunächst eine Kette algebraischer Gleichungen:

$$f_1(s) = 0; f_2(s) = 0; \dots; f_j(s) = 0; \dots; f_i(s) = 0$$

¹⁾ Vgl. Hölder, Math. Annalen, Bd. 34.

²⁾ Vgl. Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen, Bd. III, p. 703, sowie p. 765.

zu lösen; jede dieser Gleichungen ist eine Normalgleichung. Die Gruppen derselben sind:

$$L/L_1, \text{ bzw. } L_1/L_2; L_2/L_3; \dots; L_{i-1}/L_i.$$

Die Coefficienten von $f_{j+1}(s) = 0$ gehören dem Bereich $R_j(x)$ an, wo $R_j(x)$ aus dem Bereich $R_{j-1}(x)$ durch die Adjunction der Wurzeln (oder auch nur einer einzigen Wurzel, da wir eine Normalgleichung haben) von $f_j(s) = 0$ zu $R_{j-1}(x)$ hervorgeht. Der Bereich $R_0(x)$ ist mit $r(x)$ identisch.

Adjungiert man dem Bereich $R_{i-1}(x)$ die Wurzeln von $f_i(x) = 0$, so ist im entstehenden Bereich $R_i(x)$ die Rationalitätsgruppe der vorgelegten Differentialgleichung die kontinuierliche Gruppe G . Man suche nun eine rationale Function der Integrale $y_1, y_2, \dots, y_p$ und deren Ableitungen mit Coefficienten aus $R_i(x)$, welche bei den Transformationen der Gruppe J_1 relativ invariant bleibt, hingegen für jede Transformation aus G , die J_1 nicht angehört, ihren Wert ändere. Eine solche Function sei t_1 . Sie genügt dann einer Differentialgleichung $F_1\left(t; \frac{dt}{dx} \dots\right) = 0$ mit Coefficienten aus $R_i(x)$. Die Rationalitätsgruppe der Differentialgleichung ist G/J_1 .

Da J_1 eine invariante Untergruppe von G ist, so ist $F_1\left(t; \frac{dt}{dx} \dots\right) = 0$ eine Normaldifferentialgleichung. Adjungiert man alle Integrale der Differentialgleichung $F_1\left(t; \frac{dt}{dx} \dots\right) = 0$ oder, da dieselbe eine Normaldifferentialgleichung ist, auch nur ein einziges, in bezug auf welches die Differentialgleichung relativ irreducibel ist, dem Bereich $R_i(x)$, so ist die Rationalitätsgruppe der ursprünglichen Differentialgleichung im Bereich $R_{i+1}(x)$ die Gruppe J_1 . Führt man so fort, so sieht man, man hat eine Kette von Differentialgleichungen:

$$F_1\left(t; \frac{dt}{dx} \dots\right) = 0; F_2\left(t; \frac{dt}{dx} \dots\right) = 0; \dots F_j\left(t; \frac{dt}{dx} \dots\right) = 0; \\ \dots F_l\left(t; \frac{dt}{dx} \dots\right) = 0$$

zu lösen. Jede dieser Differentialgleichungen ist eine Normaldifferentialgleichung. Die Rationalitätsgruppen sind die einfachen Gruppen:

$$G/J_1 \text{ bzw. } J_1/J_2 \dots J_{j-1}/J_j \dots J_{l-1}/J_l.$$

Die Coefficienten von $F_{j+1}\left(t; \frac{dt}{dx} \dots\right) = 0$ gehören dem Bereich

$R_{i+j}(x)$ an, wo $R_{i+j}(x)$ aus $R_{i+j-1}(x)$ durch die Adjunction der Integrale oder, da wir Normaldifferentialgleichungen haben, eines einzigen Hauptintegrals von $F_j\left(t; \frac{dt}{dx} \dots\right) = 0$ zu $R_{i+j-1}(x)$ hervorgeht.

Hat man die Kette von i algebraischen wie j Differentialgleichungen gelöst, so wird die Rationalitätsgruppe der ursprünglichen Differentialgleichung die Identität. Mithin sind die Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung rational durch die Wurzeln bzw. Integrale der aufgestellten Kette von Gleichungen darstellbar. Da die Kette von Gleichungen nur aus Normalgleichungen besteht, werden genau $i+j$ Transscendente adjungiert.

Bedient man sich des Hölder'schen Satzes¹⁾ von der eindeutigen Bestimmtheit der durch die Normalreihe angegebenen Zusammensetzung einfacher Gruppen für discrete endliche Gruppen und des analogen Engel'schen Satzes²⁾ für continuierliche endliche Gruppen, so ersieht man, dass bei einer anderen Wahl der Normalreihen von K/G bzw. G die Gruppen der Hilfsgleichungen genau dieselben bleiben, nur vielleicht in anderer Reihenfolge auftreten.

Dieses Resultat von der eindeutigen Bestimmtheit der Gruppen der Hilfsdifferentialgleichungen, denen die adjungierten natürlichen Transscendenten genügen, bleibt auch bestehen, wenn die Gruppen $L, L_1, L_2, \dots, L_i; G, J_1 \dots J_i$ keine Normalreihen bilden; nur muss man dann Einfachheit der Gruppen der Hilfsgleichungen voraussetzen. Verzichtet man aber auf Normalreihen, so hört man auf, es mit Normalgleichungen zu thun zu haben. Bei der von Herrn Vessiot³⁾ angegebenen Zerlegung der Gruppe G nach Untergruppen verzichtet derselbe auf den Vortheil, es mit Normaldifferentialgleichungen zu thun zu haben; mithin wird im allgemeinen bei der Vessiot'schen Zerlegung die Adjunction von mehr als einem Integral jeder Hilfsdifferentialgleichung nöthig sein.

Herr Vessiot sucht eine Untergruppe M_1 von G , die J_1 umfasst und möglichst viele Parameter hat, ebenso eine Untergruppe M_2 von J_1 , die möglichst viele Parameter hat und J_2 umfasst u. s. w., die zu diesen Gruppen gehörigen natürlichen Transscendenten genügen dann Differentialgleichungen niedrigster Ordnung. Der Satz von der eindeutigen Bestimmtheit der Gruppen der Hilfsdifferentialgleichungen findet sich bei Herrn Vessiot nicht; hingegen sind die Sätze von Herrn Vessiot,⁴⁾ dass die Ordnungen der Hilfsdifferentialgleichungen die Indices der Composition der Gruppe G und die Ordnungen der Hilfsdifferentialgleichungen stets festbestimmt sind, irrig.

¹⁾ Hölder, Math. Annalen Bd. 34, p. 37.

²⁾ Vgl. Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen III, p. 765.

³⁾ V. p. 239.

⁴⁾ V. p. 239.

§. 16.

Zerspaltung der Gleichungskette des §. 15 in mehrere Ketten.

Bisher hatten wir eine einzige Kette aus aufeinanderfolgenden Gleichungen zu lösen; die Beschäftigung mit irgend einer Gleichung der Kette setzte die vorher erfolgte Lösung der in der Kette vorher gegangenen Gleichungen voraus. Es werden aber auch einfachere Verhältnisse eintreten können, indem wir mehrere Ketten von Gleichungen haben, so dass die Lösung jeder Kette unabhängig von der Lösung einer jeden anderen Kette verlaufen wird.

1. Es kann oft der Fall eintreten, dass man die i Transformationen:

$$s_0, s_1, s_2, \dots, s_{i-1} \quad (\text{vgl. p. 256})$$

so auswählen kann, dass sie von Anfang an eine discontinuierliche Gruppe L bilden. Wenn dies eintritt, so suche man sich eine natürliche Transscendente t_0 , die bei den Transformationen $s_0, s_1, \dots, s_{i-1}$ der Rationalitätsgruppe relativ invariant bleibt, bei allen anderen Transformationen der Rationalitätsgruppe hingegen ihren Wert ändert. Dann genügt t_0 einer Differentialgleichung mit der Gruppe G . Diese Differentialgleichung ersetze man nach §. 15 durch eine Kette von Gleichungen, die einfache Gruppen haben. Ebenso suche man eine natürliche Transscendente s , welche bei G relativ invariant bleibt, und sich bei den Transformationen aus L ändert. Diese Function genügt dann einer algebraischen Gleichung mit der Gruppe L . Man ersetze dann diese Gleichung durch eine Kette. Diese so gefundenen Gleichungsketten sind unabhängig von einander zu lösen, um die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung zu finden.

2. G habe zwei invariante Untergruppen J_1 und J_2 , welche G erschöpfen und keine infinitesimale Transformation gemein haben. Man suche eine natürliche Transscendente t_1 , die bei allen Transformationen von J_1 relativ invariant ist, sich hingegen bei allen Transformationen von J_2 ändert; die Differentialgleichung, der t_1 genügt und welche J_2 zur Rationalitätsgruppe hat, ist, wenn J_2 keine einfache Gruppe ist, nach §. 15 durch eine Gleichungskette zu ersetzen. Ebenso suche man eine natürliche Transscendente t_2 , die bei allen Transformationen von J_2 relativ invariant ist, sich hingegen bei allen Transformationen von J_1 ändert. Die Differentialgleichung, der t_2 genügt und welche J_1 zur Rationalitätsgruppe hat, ist, wenn J_1 keine einfache Gruppe ist, nach §. 15 durch eine Gleichungskette zu ersetzen. Die zwei Ketten sind wieder unabhängig von einander zu lösen.

Der zuletzt betrachtete Fall tritt stets ein, wenn G keine invariante integrable Gruppe enthält, wie aus einem von Herrn Killing¹⁾ aufgestellten Satze hervorgeht.

¹⁾ Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen III, p. 778.

Hiermit dürften die wesentlichsten Punkte, welche bei der Adjunction natürlicher Transscendenten in Frage kommen, untersucht sein.

Ich möchte mir noch zu bemerken gestatten, dass, wenn die vorliegende Arbeit zwar an die fundamentalen Untersuchungen der Herren Picard und Vessiot anknüpft, sie doch vorzüglich dem Studium der von Herrn Lie geschaffenen und in seinem grundlegenden Werke niedergelegten Theorie der Transformationsgruppen ihre Entstehung verdankt. Die von dem berühmten Gelehrten stammenden Methoden und erzielten Resultate erwiesen sich uns auch überall als Fundament der Untersuchung.