j'ai (dejà) composé sur chacun de ces (objets) un ouvrage étendu, embrassant ses éléments, leurs théories exactes, et la solution des problèmes les plus subtils avec leur méthode. Je prie Dieu, le Très-Haut, qu'il m'assiste dans l'accomplissement des devoirs de l'obéissance envers lui, et qu'il facilite à toutes ses créatures ce qui les délivre de l'erreur. Je se supplie de répandre sa bénédiction sur le prophète, Mohammed, son élu parmi ses créatures, et sur sa famille, les purs.

Fin de l'ouvrage, à savoir du (livre) connu sous (le nom) du Fakhri.

Ceci fut écrit par Sâliq, le pauvre. Fin.

SOPRA ALCUNE FORMOLE NEL CALCOLO

DELLE DIFFERENZE FINITE.

1° Spesso accade nel calcolo delle differenze finite, che convenientemente profittando dell'analogia delle potenze con le differenze si possa giungere compendiosamente alla dimostrazione di alcune formole generali relative alle successive differenze, e che richiameremo con qualche esempio.

Supposto $y = f(x)$, e ponendo nello stesso tempo $\Delta x = \alpha$, avremo la funzione variata

$$f(x + \alpha) = y + \Delta y = (1 + \Delta) y = (1 + \Delta) f(x).$$

ove il secondo membro si è posto sotto la forma simbolica di un prodotto. Prendendo costante la differenza $\alpha = \Delta x$, e sostituendo successivamente $x + \alpha$ invece della x , avremo le successive funzioni variate sotto forma simbolica

$$f(x + 2\alpha) = (1 + \Delta)^2 f(x), \quad f(x + 3\alpha) = (1 + \Delta)^3 f(x)$$

ed in generale

$$f(x + n\alpha) = (1 + \Delta)^n f(x)$$

purchè s'intenda, che alle potenze del binomio simbolico $1 + \Delta$, si sostituiscano ordini somiglianti di differenze finite sopra $f(x)$. Ciò posto prendendo α infinitesimo, ed n infinito, il prodotto, $n\alpha$ convergerà verso una quantità finita h , per cui sia

$$\lim. n\alpha = h,$$

ed avremo la formola

$$f(x + h) = \lim. (1 + \Delta)^n f(x).$$

nella quale il secondo membro rappresenterà il tipo di una serie, che sotto i limiti della convergenza, porgerà anche il valor del primo membro: il numero n da intero,

e positivo si potrà per analogia estendere ad intero e negativo, ed anche a un numero infinitamente grande positivo, o negativo di forma irrazionale. Sia ora ε un numero infinitamente piccolo ed e la base dei logaritmi iperbolici abbiamo come è noto

$$\lim (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e$$

Di più nella ricerca della derivata

$$\lim. \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim. \frac{\Delta f(x)}{\alpha} = D.f(x)$$

quindi fra i simboli Δ delle differenze, ed il simbolo D della derivazione si potrebbe scrivere

$$\lim. \frac{\Delta}{\alpha} = D, \lim. \frac{\Delta^2}{\alpha^2} = D^2 \dots \lim. \frac{\Delta^n}{\alpha^n} = D^n$$

Per conoscere adunque il limite verso il quale converge il valore di $f(x+h)$, poniamolo di più sotto la forma

$$f(x+h) = \lim. (1 + \Delta)^{\frac{1}{\Delta} \cdot n \alpha \frac{\Delta}{\alpha}} f(x)$$

Mà il simbolo Δ viene riferito ad un'infinitesimo, per cui sostituendo

$$\lim (1 + \Delta)^{\frac{1}{\Delta}} = e, \lim n \alpha = h, \lim. \frac{\Delta}{\alpha} = D$$

avremo la nuova formola simbolica generale

$$f(x+h) = e^{hD} f(x).$$

ove avendosi generalmente

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \dots$$

si ottiene pure

$$f(x+h) = (1 + hD + \frac{h^2 D^2}{2} + \frac{h^3 D^3}{2.3} + \dots) f(x)$$

ossia

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{2.3} f'''(x) + \dots$$

e che come ognun vede è lo sviluppo in serie dato dalla formola di Taylor.

Nel calcolo delle differenze finite, denotando con $F(r)$ una funzione razionale di r e con h l'incremento della variabile indipendente x , è nota la formola generale simbolica

$$F(\Delta) e^{rx} f(x) = e^{rx} F[e^{r\Delta}(1 + \Delta) - 1] f(x).$$

Sostituendo in $F(\Delta)$, $\frac{\Delta}{h}$ invece di Δ , e per $h = 0$ sarà

$$\lim. \frac{\Delta}{h} = D, \quad \lim. \frac{e^{r\Delta} - 1}{h} = r$$

e la precedente formola diviene

$$F(D) e^{rx} f(x) = e^{rx} F(r + D) f(x)$$

la quale serve per l'operazioni della derivazione: Ambedue le formole ed altre somiglianti sono molto utili nell'integrazione dell'Equazioni lineari.

2°. Siano $u, v, w \dots$ altrettante funzioni di una sola variabile x , avremo per la differenza del prodotto delle medesime

$$\Delta. u v w \dots = (u + \Delta u) (v + \Delta v) (w + \Delta w) \dots - u v w.$$

Se si mantenga con Δ il simbolo di differenza rispetto ad, u e con Δ', Δ'' i simboli di differenza rispetto a v , e w . potremo scrivere

$$\Delta. u v w \dots = (u + \Delta v) (v + \Delta' v) (w + \Delta'' w) \dots - u v w.$$

od anche sotto la forma simbolica

$$\Delta. u v w \dots = [(1 + \Delta) (1 + \Delta') (1 + \Delta'') (\dots) - 1] u v w.$$

Il numero delle caratteristiche $\Delta, \Delta', \Delta'' \dots$ corrisponde al numero delle variabili $u, v, w \dots$ Poniamo per brevità

$$1 + \Delta = \square, \quad 1 + \Delta' = \square', \quad 1 + \Delta'' = \square'',$$

si avrà $\Delta. u v w \dots = (\square \square' \square'' \dots - 1) u v w \dots$,

Da una successiva differenza si avrà simbolicamente

$$\Delta^2. u v w \dots = (\square \square' \square'' \dots - 1) \Delta. u v w \dots$$

ovvero $\Delta^2. u v w \dots = (\square \square' \square'' \dots - 1)^2 u v w \dots$

ed in generale per una differenza del grado n

$$\Delta^n. u v w \dots = (\square \square' \square'' \dots - 1)^n u v w \dots$$

Per l'ulteriore sviluppo simbolico di questa formola, formiamo con le caratteristiche $\Delta, \Delta', \Delta'' \dots$ il polinomio di grado m , e corrispondente al numero delle funzioni, cioè

$$(z + \Delta) (z + \Delta') (z + \Delta'' \dots) \dots (z + \Delta^{(m-1)})$$

è evidente che il suo valore per $z = 1$ si ridurrà a quello del prodotto $\square \square' \square'' \dots$. Dalla composizione dell'equazioni avremo un polinomio della forme

$$z^m + A z^{m-1} + B z^{m-2} + \dots + S z + T$$

ed ove come è noto sarà

$$A = \Delta + \Delta' + \Delta'' + \dots, \quad B = \Delta\Delta' + \Delta\Delta'' + \Delta'\Delta'' + \dots$$

$$C = \Delta\Delta'\Delta'' + \Delta'\Delta''\Delta''' + \dots \quad T = \Delta\Delta'\Delta'' \dots \Delta^{(m-1)}$$

Fatto pertanto $z = 1$, e ritenute le lettere $A, B, C, \dots$ per indicare le differenti funzioni delle caratteristiche $\Delta, \Delta', \Delta'', \dots$ avremo per la differenza n^{esima} di un prodotto di m funzioni $u, v, w, \dots$ la formola generale

$$\Delta^n. u v w \dots = (A + B + C + \dots + S + T)^n u v w \dots$$

il che tutto si ridurrà a formare la potenza di un polinomio. Volendo dalla differenza dell'ordine n passare alla derivata dello stesso ordine, siano $D, D', D'', \dots$ le caratteristiche di derivazione per le rispettive funzioni $u, v, w, \dots$, e dividendo la precedente formola per la potenza h^n , ed osservando che ai limiti

$$\lim. \frac{\Delta^n}{h^n} = D^n, \quad \lim. \frac{A}{h} = D + D' + D'' \text{ ec.} \quad \lim. \frac{B}{h} = 0, \quad \lim. \frac{C}{h} = 0 \dots \lim. \frac{T}{h} = 0$$

avremo la formola corrispondente per la derivata dell'ordine n^{esimo} di un prodotto

$$D^n. u v w \dots = (D + D' + D'' \dots)^n u v w \dots$$

In questa guisa tanto per la successiva differenza quanto per la successiva derivazione di un prodotto avremmo sempre a formare la potenza di un polinomio. Pongo fine a questo breve articolo col notare che nel calcolo delle differenze finite le formole

$$f'(x) = \lim. \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad f''(x) = \lim. \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$$

porgono nelle applicazioni il valore di una funzione derivata di un determinato ordine indipendentemente dalla derivata di ordine inferiore

Roma, 25 Ottobre 1863.

BARNABA TORTOLINI.