Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raums.

Von

Hermann Schubert in Hamburg.

Um durch Anwendung des Princips von der Erhaltung der Anzahl (Kalkül der abzähl. Geom., § 4) die Zahl der Strahlen zu finden, welche vier gegebene Strahlen schneiden, ertheilt man diesen die besondere Lage, dass zwei von ihnen sich schneiden, und ebenso der dritte den vierten schneidet, beachtet dann, dass die gestellte Bedingung sowohl von dem Verbindungsstrahle der beiden Schnittpunkte, wie auch von dem Schnittstrahle der beiden Schnittebenen, also von *zwei* Strahlen erfüllt wird, und schliesst hieraus, dass, wie auch die vier gegebenen Strahlen liegen mögen, die gesuchte Zahl immer gleich zwei sein muss, wenn sie überhaupt endlich bleibt. Der wesentlich algebraische Charakter des hierbei angewendeten Princips führte mich auf den Gedanken, dasselbe auch auf die Gebilde des n-dimensionalen Raums, oder, was dasselbe ist, auf Gleichungssysteme zwischen n Variabeln anzuwenden. Dadurch kann man, wenn man die diese Gleichungssysteme constituirenden Gleichungen sämmtlich linear sein lässt, alle *fundamentalen Anzahlen des n-dimensionalen Raums* erhalten, d. h. alle Anzahlen für den n-dimensionalen Raum, deren entsprechende in unserm Raum beispielsweise angeben, wie viel Ebenen durch drei gegebene Punkte gehen, wie viel Strahlen durch einen gegebenen Punkt gehen und dabei zwei gegebene Strahlen schneiden, wie viel Strahlen vier gegebene Strahlen schneiden, u. s. w. Für den Punkt werden diese Anzahlen, auch im n-dimensionalen Raume, sämmtlich gleich 1, weil ein System von n linearen Gleichungen zwischen n Unbekannten immer nur durch eine einzige Wurzelgruppe befriedigt wird. Für den Strahl, die Ebene und höher-stufige, lineare Gebilde werden aber jene Anzahlen im Allgemeinen Functionen von n.

Im Folgenden sind nun einerseits zwei Formeln (§ 4) entwickelt, welche von den eben genannten Functionen die auf den *Strahl* bezüglichen sämmtlich ohne Weiteres ergeben; andererseits sind auch die begrifflichen Grundlagen (§ 3) ausgebaut, auf denen man die Ableitung auch derjenigen Functionen von n unternehmen kann, welche die fundamentalen Anzahlen für die Ebene und höherstufige, lineare Gebilde ausdrücken. § 1 enthält einige Bemerkungen über die angewandte Terminologie und § 2 einige auf lineare Punkträume bezügliche, allgemeine Wahrheiten. Endlich sind in § 5 und § 6 grössere Beispiele für die durch § 4 ermöglichte Berechnung der fundamentalen Anzahlen des Strahls durchgeführt, und zwar in § 5 eine geometrisch und algebraisch ausgesprochene, n-dimensionale Erweiterung des Satzes, dass es in unserm Raume *zwei* Strahlen giebt, die vier gegebene Strahlen schneiden*).

§ 1.

Terminologie.

Wenn man in unserm Raume *drei* Arten von *Hauptelementen*, nämlich Punkte, Strahlen und Ebenen annimmt, so hat man in einem n-dimensionalen, linearen Raume n Arten von Hauptelementen zu unterscheiden, je nachdem man nämlich zwischen n Variabeln n, $n-1$, $n-2$, u. s. w. lineare Gleichungen bestehen lässt. Da ein System von $n-a$ Gleichungen zwischen n Variabeln durch ∞^a Werthgruppen der n Variabeln befriedigt wird, *so soll ein durch $n-a$ lineare Gleichungen zwischen n Variabeln definirtes Gebilde* ein (einem n-dimensionalen Raume angehöriges) a-stufiges Hauptelement oder *ein a-dimensionaler, linearer Raum genannt, und im Folgenden immer kurz mit $[a]$ bezeichnet werden.* Obwohl wir bei unsern auf einen n-dimensionalen Raum bezüglichen Betrachtungen naturgemäss nicht geometrisch, sondern nur algebraisch denken können, so wollen wir doch, der Kürze wegen, die bequemere geometrische Sprechweise benutzen, und z. B. sagen, dass ein $[a]$ in einem $[b]$ *liegt* ($a \leqq b$), oder was dasselbe ist, dass ein $[b]$ einen $[a]$ *enthält*, oder durch einen $[a]$ *hindurchgeht*, wenn

*) Nachträglich bemerke ich, dass das durch eine Specialisirung der F. (5) des § 5 entstehende, hier auf Seite 22 oben ausgesprochene Resultat schon von Herrn Franz Meyer in Tübingen in anderem Zusammenhange (Math. Ann. Bd. 21, S. 132) gefunden ist. Eine Verallgemeinerung dieses Resultats vom Strahl auf höherstufige Hauptelemente habe ich schon in den Mitth. d. Hamb. Math. Ges. vom April 1884, zunächst ohne Beweis, ausgesprochen. Herr Stephanos, der in seiner Thèse vom Juli 1884 von invariantentheoretischer Seite her auch zu dem Resultat des Herrn Meyer gelangt, erwies mir die Ehre, dort auf meine Verallgemeinerung aufmerksam zu machen. Der Beweis des allgemeineren Resultats steckt in einer dritten Abhandlung über abzählende Geometrie, mit deren Redaction ich noch beschäftigt bin.

wir *meinen*, dass die ∞^a Werthgruppen der n Variabeln, welche dem den $[a]$ definirenden Gleichungssysteme genügen, sämmtlich zu den ∞^b Werthgruppen gehören, welche das den $[b]$ definirende Gleichungssystem befriedigen. Von den in den folgenden Betrachtungen erwähnten linearen Räumen soll immer, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt ist, angenommen werden, dass sie zugleich alle in demselben $[n]$ liegen, oder, algebraisch ausgedrückt, von den jene Räume definirenden Gleichungssystemen soll angenommen werden, dass sie zwischen denselben n Variabeln bestehen.

Indem wir wiederum eine in der Geometrie übliche Redeweise nachahmen, werden wir auch sagen, dass ein Strahl einen $[a]$ *schneidet*, wenn es eine Werthgruppe der n Variabeln giebt, welche sowohl die $n-1$ den Strahl constituirenden Gleichungen, wie auch die $n-a$ den $[a]$ konstituirenden Gleichungen befriedigt.

§ 2.

Allgemeine Sätze über lineare Räume und ihre Dimensionen.

Durch Abzählung der wesentlichen Constanten der in Betracht kommenden Gleichungssysteme, sowie durch den Satz, dass p lineare Gleichungen mit p Unbekannten nur eine einzige Wurzelgruppe liefern, gelangt man zu folgenden Wahrheiten*):

I) *Sind ein $[a]$ und ein $[b]$ beliebig gegeben, und ist $a+b \overline{\gtrless} n-1$, so giebt es immer einen und nur einen $[a+b+1]$, welcher den $[a]$ und den $[b]$ zugleich enthält.* Allgemeiner: Es giebt immer einen und nur einen $[a_1+a_2+\cdots+a_p+p-1]$ der durch p beliebig gegebene lineare Räume mit den Dimensionen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ zugleich hindurchgeht, wo $a_1+a_2+\cdots+a_p \overline{\gtrless} n-p+1$ sein muss.

II) *Ein $[a]$ und ein $[b]$ haben, wenn $a+b \overline{\gtrless} n$ ist, einen und nur einen $[a+b-n]$ gemeinsam*, d. h. es giebt einen und nur einen $[a+b-n]$, welcher in dem $[a]$ und in dem $[b]$ zugleich liegt. Allgemeiner: p beliebige lineare Räume mit den Dimensionen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ haben, wenn $a_1+a_2+\cdots+a_p \overline{\gtrless} (p-1)n$ ist, einen und nur einen $[a_1+a_2+\cdots+a_p-(p-1)n]$ gemeinsam.

III) *Wenn ein $[a]$ und ein $[b]$ so liegen, dass sie einen $[c]$, aber nicht unendlich viele $[c]$, gemeinsam haben, so giebt es immer einen und nur einen $[a+b-c]$, welcher den $[a]$ und den $[b]$ zugleich enthält.*

*) Einen Theil dieser Wahrheiten (I und II) hat u. a. Herr Veronese in der Einleitung zu einer inhaltreichen Abhandlung (Math. Ann., Bd. 19, S. 161) zusammengestellt, welche die projectiven Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen mit Hülfe des Princips des Projicirens und Schneidens behandelt.

Als specieller Fall, nämlich für $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ steckt hierin das Axiom, dass zwei sich schneidende Strahlen zugleich in einer und derselben Ebene liegen.

IV) *Damit es für einen* $[a]$ *eine* z*-fache Bedingung wird, mit einem* $[b]$ *einen* $[c]$, *aber nicht unendlich viele* $[c]$, *gemeinsam zu haben, muss*

$$z = (c + 1)(n + c - a - b)$$

sein. Natürlich ist hierbei $c \geqq a + b - n$ gedacht (vgl. II). Beispielsweise ergiebt sich für $n = 4$, $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$, dass $z = 1$ ist; d. h. in einem vierdimensionalen Raume erfüllt ein Strahl schon eine einfache Bedingung, wenn er eine gegebene Ebene überhaupt schneidet.

Aus Satz IV folgt Satz II, wenn man $z = 0$ setzt. Von sonstigen speciellen Fällen des Satzes IV sind für uns namentlich die folgenden drei wichtig:

V) Aus IV folgt für $b = c = a$: *Die Constantenzahl eines* $[a]$ *ist gleich* $(a + 1)(n - a)$. Hiernach ist z. B. die Constantenzahl eines Punktes gleich n, eines Strahles gleich $2(n - 1)$, einer Ebene gleich $3(n - 2)$ u. s. w., und, dual entsprechend, eines $[n - 1]$ gleich n, eines $[n - 2]$ gleich $2(n - 1)$, eines $[n - 3]$ gleich $3(n - 2)$ u. s. w.

VI) Aus IV folgt, dass, wenn $z = 1$, $c = 0$ ist, $b = n - a - 1$ sein muss, d. h.: *Es ist für einen* $[a]$ *eine einfache Bedingung, mit einem gegebenen* $[n - a - 1]$ *einen Punkt gemeinsam zu haben.*

VII) Aus IV folgt, dass, wenn $z = 2$, $c = 0$ ist, $b = n - a - 2$ sein muss, d. h.: *Es ist für einen* $[a]$ *eine zweifache Bedingung, mit einem gegebenen* $[n - a - 2]$ *einen Punkt gemeinsam zu haben.*

Da nach Satz V ein Strahl durch $2(n - 1)$ einfache Bedingungen, oder durch $n - 1$ zweifache Bedingungen bestimmt ist, so ergeben sich aus VI und VII für $a = 1$ noch die folgenden beiden Sätze:

VIII) *Es giebt eine endliche Anzahl von Strahlen, von denen jeder jeden von* $2(n - 1)$ *gegebenen* $[n - 2]$ *schneidet.*

IX) *Es giebt eine endliche Anzahl von Strahlen, von denen jeder jeden von* $n - 1$ *gegebenen* $[n - 3]$ *schneidet.*

Die in VIII und IX erwähnten endlichen Anzahlen sind bezw. in § 5 und in § 6 berechnet.

§ 3.

Aufzählung und Bezeichnung der Grundbedingungen und Grundgebilde für einen linearen, n-dimensionalen Raum.

Die Zahl der Punkte, welche in unserm Raume zugleich eine gegebene einfache Bedingung y und eine gegebene, von y unabhängige, zweifache Bedingung z erfüllen, ist bekanntlich gleich dem Producte der beiden Zahlen, von denen die eine angiebt, wie viel Punkte y erfüllen, und auf einer gegebenen Geraden liegen, die andere angiebt, wie viel Punkte z erfüllen und auf einer gegebenen Ebene liegen; denn eine Fläche $p$ten Grades schneidet eine in allgemeiner Lage zu ihr befindliche Curve $q$ten Grades in $p \cdot q$ Punkten. Analoge Sätze (*Charakteristiken-Sätze*) gelten bekanntlich (vgl. Kalkül der abzähl. Geom. S. 47, 62, 283) auch für den Strahl und die Ebene, nur dass für den Strahl, falls zwei zweifache Bedingungen gegeben sind, eine Summe von zwei Producten auftritt, wie zuerst Herr Halphen (Comptes rendus, 1872) bemerkte. Die Bedingungen, welche in allen den Producten, von denen in diesen Charakteristiken-Sätzen die Rede ist, auftreten, und welche also für die Hauptelemente unseres Raumes in der angedeuteten Weise *charakteristisch* sind, habe ich (Kalkül d. abzähl. Geom., S. 4) *Grundbedingungen* genannt. Da nun auch für die Hauptelemente eines $[n]$, wie ich in einer andern Abhandlung zeigen werde, Charakteristikensätze und deshalb Grundbedingungen existiren, und da in den folgenden Paragraphen die für weitere Untersuchungen wichtige Vorfrage: „wie viel Hauptelemente giebt es, die gegebene Grundbedingungen erfüllen?“, vorläufig freilich nur für den Strahl, erledigt wird, so wollen wir jetzt die Grundbedingungen der Hauptelemente eines $[n]$ zusammenstellen, und durch zweckmässige Symbole dem Bedingungscalcül zugänglich machen.

Für den *Punkt* bezeichne (k) die ihm auferlegte Bedingung, dass er in einem $[k]$ liegen soll, also z. B. (0), dass er gegeben sei, (2), dass er in einer gegebenen Ebene liege, $(n-1)$, dass er in einem $[n-1]$ liege, endlich noch (n) die selbstverständliche oder nullfache Bedingung, dass er überhaupt in dem $[n]$ liege, den wir unseren Betrachtungen zu Grunde legen. Die $n+1$ Bedingungen:

$$(0),\ (1),\ (2),\ (3),\ \ldots,\ (n-1),\ (n)$$

sind die sämmtlichen Grundbedingungen des Punktes, und zwar ist die Bedingung (b), wie sich aus § 2, IV für $a=0$, $c=0$ ergiebt, $(n-b)$-fach, so dass es immer nur eine einzige Grundbedingung von vorgeschriebener Dimension giebt. In analoger Weise erhält man als Grundbedingungen des *Strahls* zunächst diejenigen n, welche aussagen, dass der Strahl in einem 1- bis n-stufigen Hauptelement liege. Dass aber zu den so erhaltenen Bedingungen noch andere Grundbedingungen hinzuzuzählen sind, erkennt man schon aus unserm dreidimensionalen Raume, wo z. B. auch die Bedingung, dass der Strahl einem Strahlbüschel angehöre, d. h. in einer Ebene liege und dabei durch einen in dieser Ebene gegebenen Punkt gehe, Grundbedingung ist. Dem Verfasser ist es nun gelungen, zu erkennen, dass *das Symbol*

$$(a,\ b),$$

wo $b \gtreqless n$ *und* $a < b$ *ist, die sämmtlichen Grundbedingungen des Strahls darstellt, wenn* (a, b) *die Bedingung bedeutet, dass der Strahl in einem gegebenen* $[b]$ *liege, und dabei einen gegebenen in* $[b]$ *liegenden* $[a]$ *schneide, d. h. mit diesem* $[a]$ *einen und nur einen Punkt gemeinsam habe.* Es bedeuten hiernach z. B.:

$(0, 2)$, dass der Strahl einem gegebenen Strahlbüschel angehören soll,

$(1, 2)$, dass der Strahl in einer gegebenen Ebene liegen soll,

$(1, 3)$, dass der Strahl eine gegebene Gerade schneiden und dabei ganz in einem gegebenen, diese Gerade enthaltenden $[3]$ liegen soll,

$(n-2, n)$, dass der Strahl einen gegebenen $[n-2]$ schneiden soll,

$(n-2, n-1)$, dass der Strahl ganz in einem gegebenen $[n-1]$ liegen soll.

Man beachte bei der Uebersetzung dieser Bedingungssymbole, dass, wenn in (a, b) die Zahl b gleich der Dimension n des der Betrachtung zu Grunde liegenden linearen Raums $[n]$ ist, die Bedingung (a, n) nur ausspricht, dass der Strahl (a, n) einen gegebenen $[a]$ schneiden soll, da das Liegen in $[n]$ selbstverständlich ist. Ferner beachte man, dass, wenn in (a, b) die Zahl a nur um 1 kleiner als b ist, die Bedingung $(b-1, b)$ nur ausspricht, dass der Strahl in einem gegebenen $[b]$ liegen soll, da dann das Schneiden von $[b-1]$ selbstverständlich ist, wie aus § 2, II hervorgeht, wenn man die dort genannten Buchstaben n, a, b bezw. gleich b, 1, $b-1$ setzt. Die Bedingung $(n-1, n)$, welche hiernach von jedem Strahle selbstverständlich erfüllt wird, nehmen wir trotzdem in das Register der Grundbedingungen mit auf. Wir erhalten dann:

erstens n Grundbedingungen (a, b), wo $a = 0$ ist, nämlich:

$$(0, 1),\ (0, 2),\ (0, 3),\ \ldots,\ (0, n-1),\ (0, n);$$

zweitens $n-1$ Grundbedingungen (a, b), wo $a = 1$ ist, nämlich:

$$(1, 2),\ (1, 3),\ \ldots,\ (1, n-1),\ (1, n);$$

. . . .

$(n-1)$-tens 2 Grundbedingungen (a, b), wo $a = n-2$ ist, nämlich:

$$(n-2,\ n-1) \quad \text{und} \quad (n-2,\ n);$$

n-tens 1 Grundbedingung (a, b), wo $a = n-1$ ist, nämlich:

$$(n-1,\ n).$$

Demnach ist die Anzahl aller Grundbedingungen des Strahls gleich der Summe der ganzen Zahlen von 1 bis n, d. h. gleich dem Binomialcoefficienten $(n+1)_2 = \frac{1}{2}\, n\,(n+1)$.

Um die Dimension d jeder der erhaltenen $\frac{1}{2}n(n+1)$ Grundbedingungen (p, q) durch p, q und n auszudrücken, bestimmen wir zunächst mit Hülfe von § 2, IV die Dimension z der Bedingung, dass ein Strahl in einem $[q]$ liege. Hierfür erhalten wir, indem wir in jener Formel IV des § 2 $n = n$, $a = 1$, $b = q$, $c = 1$ setzen, $z = 2(n - q)$. Hierzu haben wir noch die Dimension z' der Bedingung zu addiren, dass in einem $[q]$ ein Strahl mit einem in dem $[q]$ liegenden $[p]$ einen Punkt gemeinsam habe. Wir setzen also zweitens in jener Formel $n = q$, $a = 1$, $b = p$, $c = 0$, $z = z'$, und erhalten $z' = q - 1 - p$. *Demnach hat die Bedingung* (p, q) *die Dimension:*

$$d = 2(n - q) + q - 1 - p = \mathbf{2n - 1 - p - q}$$

Ist $p = 0$, $q = 1$, so kommt $d = 2n - 2$, d. h., dass ein Strahl gegeben ist, ist eine $(2n - 2)$-fache Bedingung, ein Resultat, das auch aus § 2, V ersichtlich ist. Ist $p = n - 1$, $q = n$, so kommt $d = 0$, d. h. die Bedingung $(n - 1, n)$ ist nullfach. Beispielsweise stellen wir noch die Grundbedingungen des Strahls im fünfdimensionalen linearen Raume, nach ihren Dimensionen geordnet, zusammen:

1 nullfache: (4, 5); 1 einfache: (3, 5); 2 zweifache: (2, 5) u. (3, 4); 2 dreifache: (1, 5) u. (2, 4); 3 vierfache: (0, 5) u. (1, 4) u. (2, 3); 2 fünffache: (0, 4) u. (1, 3); 2 sechsfache: (0, 3) u. (1, 2); 1 siebenfache: (0, 2); 1 achtfache: (0, 1).

Die eben für den Strahl angestellten Betrachtungen lassen sich ohne Schwierigkeit auf die Ebene und überhaupt auf alle Hauptelemente übertragen. *Für die Ebene erhält man die sämmtlichen Grundbedingungen aus dem Symbol* (a, b, c), *wo* $c \overline{\overline{<}} n$ *und* $a < b < c$ *ist, wenn* (a, b, c) *die Bedingung bedeutet, dass, wenn ein* $[c]$, *in demselben ein* $[b]$ *und in letzterem ein* $[a]$ *gegeben ist, die Ebene mit dem* $[c]$ *alle ihre Punkte, mit dem* $[b]$ *die Punkte einer Geraden, und mit dem* $[a]$ *einen Punkt gemeinsam haben soll.* Es giebt hiernach $n - 1$ Bedingungen $(0, 1, c)$, $n - 2$ Bedingungen $(0, 2, c)$, u. s. w., also überhaupt so viel Bedingungen $(0, b, c)$, wie der Binomialcoefficient n_2 angiebt. Ebenso erhält man, dass es $(n - 1)_2$ Bedingungen, $(1, b, c)$, $(n - 2)_2$ Bedingungen $(2, b, c)$ u. s. w. giebt. Die Ebene besitzt also im Ganzen $n_2 + (n - 1)_2 + (n - 2)_2 + \cdots + 2_2$ Grundbedingungen, d. h. so viel, wie der Binomialcoefficient $(n+1)_3 = \frac{1}{6}(n+1)\,n(n-1)$ angiebt. Die Dimension der Bedingung (a, b, c) erhält man, ähnlich wie oben die Dimension der Bedingung (p, q), aus § 2, IV gleich $3n - 3 - a - b - c$.

So weitergehend gelangt man zu der Erkenntniss, dass sich jedem Hauptelemente $[k]$ $(n+1)_{k+1} = \frac{(n+1)!}{(n-k)!\,(k+1)!}$ Grundbedingungen auferlegen lassen, welche sämmtlich aus dem Symbol

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{k+1}),$$

wo $a_{k+1} \overline{\overline{<}} n$, und $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{k+1}$ ist, hervorgehen, wenn man unter $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{k+1})$ versteht, dass $k+1$ Hauptelemente $[a_1], [a_2], [a_3], \cdots, [a_{k+1}]$ gegeben sind, wo immer $[a_i]$ in $[a_{i+1}]$ liegt, und dass dann das Hauptelement $[k]$ mit $[a_1]$ einen Punkt, mit $[a_2]$ eine Gerade, und überhaupt mit $[a_i]$ einen $[i-1]$ gemeinsam haben soll. Für die Dimension der Grundbedingung $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{k+1})$ ergiebt sich aus § 2, IV:

$$(k+1)\,n - \frac{1}{2}\,k(k+1) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{k+1}).$$

Da in jedem $[n]$ zwischen den Hauptelementen $[k]$ einerseits und den Hauptelementen $[n-k-1]$ andererseits eine ebensolche Verwandtschaft besteht, wie die ist, welche man in unserm Raume Dualität oder Reciprocität nennt, so muss auch die Anzahl der $[k]$ auferlegbaren Grundbedingungen mit der Anzahl der $[n-k-1]$ auferlegbaren Grundbedingungen übereinstimmen. In der That ist diess auch aus der Gleichheit der Binomialcoefficienten $(n+1)_{k+1}$ und $(n+1)_{n-k-1+1}$ ersichtlich.

Da man in der dreidimensionalen synthetischen Geometrie die Gesammtheit der eine gegebene Grundbedingung erfüllenden Hauptelemente ein Grundgebilde dieses Hauptelementes nennt, so soll auch in einem $[n]$ eine solche Gesammtheit *Grundgebilde* heissen. Die Grundgebilde des Punktes sind die Hauptelemente selbst. Für dieselben haben wir die Bezeichnung $[0], [1], [2], \ldots, [n]$ eingeführt. Dem entsprechend soll auch für den Strahl das Zeichen $[a, b]$ das Grundgebilde bedeuten, welches aus allen die Grundbedingung (a, b) erfüllenden Strahlen besteht, und überhaupt für das Hauptelement $[k]$ mit $[a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}]$ das Grundgebilde bezeichnet werden, das aus allen die Bedingung $(a_1, a_2, \ldots, a_{k+1})$ erfüllenden Hauptelementen $[k]$ besteht. Um die Stufe s der Grundgebilde zu bestimmen, beachten wir, dass, wenn die Constantenzahl eines Gebildes c ist, immer ∞^{c-d} solcher Gebilde eine gegebene d-fache Bedingung erfüllen. Demgemäss erhalten wir die Stufe s des Grundgebildes $[a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}]$, wenn wir in $s = c - d$ die Constantenzahl $c = (k+1)\,(n-k)$ (§ 2, V) und die Dimension

$$d = (k+1)\,n - \frac{1}{2}\,k(k+1) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1})$$

setzen. So ergiebt sich, dass *das Grundgebilde* $(a_1, a_2, \ldots, a_{k+1})$ *immer* $\left[a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} - \frac{1}{2}\,k\,(k+1)\right]$*-stufig ist.* Beispielsweise folgen hier für einen vierdimensionalen, linearen Raum die 10 Grundgebilde des Strahls und die 10 Grundgebilde der Ebene, nach ihren Stufen geordnet, und zwar so, dass immer je zwei sich dual entsprechende Grundgebilde zusammenstehen:

1) nullstufig: [0,1] und [0,1,2]: Strahl selbst bezw. Ebene selbst;
2) einstufig: [0,2] und [0,1,3]: Strahlbüschel bezw. Ebenenbüschel;
3) zweistufig: [0,3] und [0,2,3]: Strahlbündel bezw. Ebenenbündel;
4) zweistufig: [1,2] und [0,1,4]: Strahlen in einer Ebene bezw. Ebenen durch eine Gerade im [4];
5) dreistufig: [0,4] und [1,2,3]: Strahlen durch einen Punkt im [4] bezw. Ebenen in einem [3];
6) dreistufig: [1,3] und [0,2,4]: Strahlen, die in einem [3] liegen und eine im [3] befindliche Gerade schneiden, bezw. Ebenen die in dem [4] liegend, durch die Strahlen eines Strahlbüschels gehen;
7) vierstufig: [1,4] und [1,2,4]: Strahlen, die, im [4] liegend, eine Gerade schneiden, bezw. Ebenen, die im [4] eine Ebene in geraden Linien schneiden;
8) vierstufig: [2,3] und [0,3,4]: Strahlen, die in einem [3] liegen, bezw. Ebenen, die, im [4] liegend, durch einen Punkt gehen;
9) fünfstufig: [2,4] und [1,3,4]: Strahlen, die im [4] liegend, eine Ebene schneiden, bezw. Ebenen, die, im [4] liegend, eine Gerade schneiden;
10) sechsstufig: [3,4] und [2,3,4]: Strahlen des [4] bezw. Ebenen des [4].

Wenn man zu den hier aufgeführten Grundgebilden noch die Grundgebilde des Punktes und die ihnen dual entsprechenden Grundgebilde des [3] hinzufügt, und dann die Elemente von je zwei gleichstufigen Grundgebilden *projectiv* (in allgemeinerem Sinne, so dass z. B. auch collinear und correlativ unter den Begriff projectiv fallen) zuordnet, so gelangt man durch die Schnitte oder die Verbindungen entsprechender Elemente zu Gebilden zweiten und höheren Grades im [4], deren Eigenschaften man dann aus der Art der Erzeugung in ähnlicher Weise ableiten kann, wie diess in der dreidimensionalen synthetischen Geometrie üblich ist. Doch möchte ich nicht hier, sondern bei einer andern Gelegenheit auf diese Erweiterung der synthetischen Geometrie näher eingehen.

§ 4.

Auffindung aller fundamentalen Anzahlen des Strahls in einem n-dimensionalen linearen Raume.

Um Anzahlen für algebraische Gebilde unseres dreidimensionalen Raumes bestimmen zu können, muss man vor allem die *fundamentalen*

Anzahlen desselben kennen, d. h. *die Zahlen, welche zählen, wie viel Hauptelemente gegebene Grundbedingungen erfüllen.* Diese Zahlen kann man mit Benutzung der in § 3 eingeführten Symbole für Grundbedingungen angeben, wie folgt*):

Für den Punkt ist:

$$(0) = 1; \quad (2)(1) = 1; \quad (2)^3 = 1;$$

Für den Strahl ist:

$$(0, 1) = 1; \quad (1, 3)(0, 2) = 1; \quad (1, 2)^2 = 1; \quad (0, 3)^2 = 1;$$

$$(1, 2)(0, 3) = 0; \quad (1, 2)(1, 3)^2 = 1; \quad (0, 3)(1, 3)^2 = 1; \quad (1, 3)^4 = 2;$$

Für die Ebene ist:

$$(0, 1, 2) = 1; \quad (0, 2, 3)(0, 1, 3) = 1; \quad (0, 2, 3)^3 = 1.$$

Von diesen Anzahlen wird freilich in unserer dreidimensionalen Geometrie nicht viel geredet, da dieselben grösstentheils gleich 1 sind, und durch unsere räumliche Anschauung leicht erkennbar sind. Dagegen sind die Anzahlen, welche in einem n-dimensionalen linearen Raume jenen Anzahlen entsprechen, im Allgemeinen nicht so leicht erkennbar. Da dieselben aber für einen $[n]$ dieselbe fundamentale Rolle spielen, wie jene Anzahlen für unsern $[3]$, so wollen wir hier die Wege betreten, welche zu ihrer Berechnung und zu der Ableitung der Functionen führen, durch die sie von der Dimension n abhängen.

Zunächst ist klar, dass für jedes Hauptelement $[k]$ die Grundbedingung, welche die höchste Dimension hat, von einem einzigen Gebilde $[k]$ erfüllt wird; denn diese Grundbedingung sagt nichts weiter aus, als dass das Hauptelement $[k]$ vollständig gegeben ist. Wir haben also für jedes $[k]$:

$$(0, 1, 2, \cdots, k-1, k) = 1. \tag{1}$$

Was den *Punkt* anbetrifft, so ergiebt sich, dass für ihn auch jedes *beliebige Product* von Grundbedingungen gleich 1 zu setzen ist; natürlich muss die Dimensionssumme eines solchen Productes gleich der Constantenzahl n des Punktes sein, damit es überhaupt Sinn hat, ein solches Product *gleich einer Zahl* zu setzen. Soll nämlich ein Punkt die Grundbedingung (a) und die Grundbedingung (b) zugleich erfüllen,

*) Man erinnere sich aus meinem Bedingungscalcül (Kalkül d. abz. Geom., § 2, § 3), dass erstens das *Product* mehrerer Bedingungen die Bedingung bezeichnet, welche ausspricht, dass jene Bedingungen *zugleich* erfüllt werden sollen, dass zweitens eine einem Gebilde von der Constantenzahl c auferlegte c-fache Bedingung *gleich der Anzahl* der Gebilde gesetzt wird, die diese Bedingung erfüllen, und dass drittens eine lineare Gleichung zwischen d-fachen Bedingungen, die einem solchen Gebilde auferlegt sind, aussprechen soll, dass aus ihr eine richtige Zahlengleichung entsteht, wenn man jede dieser d-fachen Bedingungen mit einer und derselben $(c-d)$-fachen Bedingung multiplicirt, und für die erhaltenen c-fachen Bedingungsproducte die zugehörigen Anzahlen einsetzt.

also sowohl auf einem gegebenen $[a]$, als auch auf einem gegebenen $[b]$ liegen, so muss er auf dem Hauptelement liegen, das $[a]$ und $[b]$ gemeinsam ist, also nach § 2, II auf einem $[a+b-n]$. Deshalb ist immer:

$$(2) \qquad (a)(b) = (a+b-n),$$

also allgemein:

$$(3) \quad (a_1)(a_2)(a_3)\cdots(a_p) = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p - np + n).$$

Ist nun die Summe der Dimensionen der gegebenen Grundbedingungen (a_1), (a_2), (a_3), ..., (a_p), d. h. die Summe $(n-a_1)+(n-a_2)+\cdots+(n-a_p)$ gleich der Constantenzahl n des Punktes, so erscheint auf der rechten Seite der *Gleichung* (3) *die Bedingung* (0), *wofür nach* (1) die Zahl 1 zu setzen ist.

In derselben Weise kann man nun auch für ein *beliebiges* Hauptelement $[k]$ jedes Product von Grundbedingungen, dessen Dimensionssumme gleich seiner Constantenzahl $(k+1)(n-k)$ ist, durch die $(k+1)(n-k)$-fache Grundbedingung ausdrücken, also, da letztere nach 1) gleich der Zahl 1 ist, die zugehörige Anzahl berechnen, sobald es für diesen $[k]$ gelingt, das Product zweier beliebiger Grundbedingungen d-ter und e-ter Dimension durch die $(d+e)$-fachen Grundbedingungen auszudrücken, oder, anders ausgedrückt, sobald es für diesen $[k]$ gelingt, eine der Formel (2) analoge Formel aufzustellen. Diese Aufgabe hat der Verfasser für den *Strahl* in voller Allgemeinheit erledigt. Wir schreiten daher jetzt dazu, für den Strahl das Analogon der Formel (2) abzuleiten, oder, genauer gesprochen, die zusammengesetzte Grundbedingung $(a, \alpha)(b, \gamma)$ durch einfache Grundbedingungen auszudrücken.

Wir betrachten zunächst die aus den Grundbedingungen (a, n) und (b, n) zusammengesetzte Bedingung $(a, n)(b, n)$, wo $a \gtreqless b$ sein mag. Da (a, n) eine $(n-a-1)$-fache, (b, n) eine $(n-b-1)$-fache Bedingung ist, wie aus § 3 hervorgeht, so ist $(a, n)(b, n)$ eine $(2n-a-b-2)$-fache Bedingung. Es handelt sich also darum, die Bedingung $(a, n)(b, n)$, welche verlangt, dass ein Strahl sowohl einen gegebenen $[a]$ wie auch einen gegebenen $[b]$ schneiden soll, durch $(2n-a-b-2)$-fache Grundbedingungen auszudrücken. *Im Fall* $a+b \gtreqless n-1$ *ist*, gelingt dies auf folgende Weise. Wir specialisiren (vgl. Einleitung) die Lage der gegebenen Hauptelemente $[a]$ und $[b]$, die im allgemeinen einen $[a+b-n]$ gemeinsam haben (§ 2, II), dahin, dass sie einen $[a+b-n+1]$ gemeinsam haben. Dann wissen wir aus § 2, III, dass es einen $[n-1]$ giebt, der sie beide enthält. Die Bedingung $(a, n)(b, n)$ ist daher jetzt auf zweierlei Weise und *nur* auf zweierlei Weise erfüllbar, erstens dadurch, dass ein Strahl den $[a+b-n+1]$ schneidet, zweitens dadurch, dass ein Strahl in dem $[n-1]$ liegt, und dabei den $[a]$ und den $[b]$, die gleichfalls in dem $[n-1]$ liegen, schneidet. Die erstgenannte Bedingung ist durch $(a+b-n+1, n)$ zu bezeichnen, die zweitgenannte Bedingung stimmt mit der gegebenen Bedingung $(a, n)\,(b, n)$ überein, nur mit dem Unterschiede, dass der Strahl nicht allein in dem unsern Betrachtungen zu Grunde liegenden $[n]$, sondern auch in *einem und demselben* $[n-1]$ liegen soll. Wir bezeichnen daher die zweitgenannte Bedingung mit $(a, \overline{n-1})\,(b, \overline{n-1})$, wo die Ueberstreichung von $n-1$ andeuten soll, dass in den beiden Bedingungssymbolen ein und derselbe $[n-1]$ gedacht werden soll. *Ueberhaupt wollen wir mit* $(a, \overline{m})\,(b, \overline{m})$ *die Bedingung bezeichnen, dass ein Strahl in einem* $[m]$ *liegen soll, und dabei einen* $[a]$ *und einen* $[b]$, *die gleichfalls beide in diesem* $[m]$ *liegen, schneiden soll.* Man beachte, dass die Factoren $(a, \overline{m})$ und $(b, \overline{m})$ des Bedingungsproducts $(a, \overline{m})\,(b, \overline{m})$, wenn $m < n$ ist, von einander abhängig sind. Wir erhalten nach Einführung dieser Bezeichnung:

$$(4)\qquad (a, n)\,(b, n) = (a+b-n+1, n) + (a, \overline{n-1})\,(b, \overline{n-1}),$$

und auf dieselbe Weise, indem wir nur die obige Betrachtung für den $[n-1]$ statt des $[n]$ wiederholen:

$$(a, \overline{n-1})\,(b, \overline{n-1}) = (a+b-n+2, n-1) + (a, \overline{n-2})\,(b, \overline{n-2}),$$

und weiter:

$$(a, \overline{n-2})\,(b, \overline{n-2}) = (a+b-n+3, n-2) + (a, \overline{n-3})\,(b, \overline{n-3}),$$

So fortfahrend, müssen wir einmal zu einer Gleichung kommen, wo links $(a, \overline{b+1})\,(b, \overline{b+1})$ erscheint. Diese Bedingung aber wird schon von jedem Strahle erfüllt, der, in dem $[b+1]$ liegend, überhaupt nur mit dem $[a]$ einen Punkt gemein hat, da mit dem in $[b+1]$ liegenden $[b]$ *jeder* in $[b+1]$ liegende Strahl immer einen Punkt gemein haben muss, weil (§ 2, II) $1+b-(b+1)=0$ ist. Es ist also

$$(a, \overline{b+1})\,(b, \overline{b+1}) = (a, b+1).$$

Wir haben demnach:

$$\begin{aligned}
(a, n)\,(b, n) &= (a+b-n+1, n) + (a, \overline{n-1})\,(b, \overline{n-1}),\\
(a, \overline{n-1})\,(b, \overline{n-1}) &= (a+b-n+2, n-1) + (a, \overline{n-2})\,(b, \overline{n-2}),\\
(a, \overline{n-2})\,(b, \overline{n-2}) &= (a+b-n+3, n-2) + (a, \overline{n-3})\,(b, \overline{n-3}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(a, \overline{b+2})\,(b, \overline{b+2}) &= (a-1, b+2) + (a, \overline{b+1})\,(b, \overline{b+1}),\\
(a, \overline{b+1})\,(b, \overline{b+1}) &= (a, b+1).
\end{aligned}$$

Durch Addition dieser $n-b$ Gleichungen erhält man die *gesuchte, für* $a+b \gtreqless n-1$ *gültige Formel:*

$$(5)\quad (a,n)(b,n) = (a+b-n+1,n)+(a+b-n+2,n-1) + (a+b-n+3,n-2)+\cdots+(a,b+1),$$

wo

$$a \overline{\lesseqgtr} b$$

gedacht ist.

Genau genommen, hat man noch zu prüfen, ob auch nicht durch die Lage-Specialisirungen der gegebenen $[a]$ und $[b]$ eine Bedingung hervorgerufen ist, die von geringerer Dimension ist, als $(a,n)(b,n)$, und deshalb bei Anwendung der Formel unendlich viele Strahlen liefern würde. Dies ist aber nicht der Fall, da alle Bedingungen der rechten Seite der Formel (5) die Dimension $2n-a-b-2$, also dieselbe Dimension, wie $(a,n)(b,n)$ haben. Beispielsweise setzen wir in (5) $b=n-2$. Dann kommt für $a+n-2 \gtreqless n-1$, d. h. $a \gtreqless 1$, und für $a \overline{\lesseqgtr} n-2$:

$$(a,n)(n-2,n) = (a-1,n)+(a,n-1).$$

Ist hier, noch specieller, $n=3$ und $a=1$, so kommt:

$$(1,3)^2 = (0,3)+(1,2)$$

eine Formel, welche den bekannten Satz ausspricht, dass in unserm Raum die Zahl derjenigen Strahlen eines zweistufigen Strahlsystems, welche zwei gegebene Gerade schneiden, gleich der Summe der beiden Zahlen ist, von denen die eine angiebt, wieviel Strahlen des Strahlsystems durch einen gegebenen Punkt gehen, die andere angiebt, wieviel solche Strahlen in einer gegebenen Ebene liegen.

Da die Formel (5) nur für $a+b \gtreqless n-1$ bewiesen ist, so untersuchen wir zweitens den Fall, dass in $(a,n)(b,n)$ $a+b \overline{\lesseqgtr} n-1$ ist. Dann giebt es nach § 2, I einen $[a+b+1]$, der die gegebenen Hauptelemente $[a]$ und $[b]$ zugleich enthält. Demgemäss können wir mit Benutzung der bei der Ableitung von (5) eingeführten Bezeichnungsweise schreiben:

$$(6)\quad (a,n)(b,n) = \left(a, \overline{a+b+1}\right)\left(b, \overline{a+b+1}\right).$$

Das Product auf der rechten Seite dieser Gleichung können wir nun aber nach Formel (5) auflösen, indem wir uns dort statt des vorausgesetzten $[n]$ einen $[a+b+1]$ denken. Dadurch wird $(a+b-n+1,n)$ zu $(0,a+b+1)$, $(a+b-n+2)$ zu $(1,a+b)$, u. s. w., endlich $(a,b+1)$ bleibt $(a,b+1)$. So erhält man die *gesuchte, für* $a+b \overline{\lesseqgtr} n-1$ *gültige Formel:*

$$(7)\quad (a,n)(b,n) = (0,a+b+1)+(1,a+b)+(2,a+b-1) +\cdots+(a,b+1),$$

wo wieder $a \overline{\lesseqgtr} b$ gedacht ist.

Beispielsweise setzen wir $n = 5$, $a = 2$, $b = 2$, und erhalten:

$$(2, 5)^2 = (0, 5) + (1, 4) + (2, 3),$$

d. h. in Worten: In einem fünfdimensionalen, linearen Raume ist die Zahl derjenigen Strahlen eines vierstufigen Strahlsystems, welche zwei gegebene Ebenen schneiden, gleich der Summe von drei Zahlen, von denen die erste angiebt, wieviel Strahlen durch einen gegebenen Punkt gehen, die zweite angiebt, wieviel Strahlen eine gegebene Gerade schneiden, und dabei in einem gegebenen durch diese Gerade gehenden vierdimensionalen, linearen Raume liegen, die dritte angiebt, wieviel Strahlen in einem gegebenen dreidimensionalen Raume liegen.

Wir gehen nun zu dem allgemeinen Fall über, indem wir statt $(a, n)(b, n)$ die Bedingung $(a, \alpha)(b, \beta)$ betrachten. Dieselbe setzt voraus, dass ein $[\alpha]$ und in demselben ein $[a]$ gegeben ist, dass ferner ein $[\beta]$ und in demselben ein $[b]$ gegeben ist, und verlangt dann, dass ein Strahl sowohl in dem $[\alpha]$, wie in dem $[\beta]$ liege, und ausserdem sowohl den $[a]$ wie den $[b]$ schneide. Da der Strahl sowohl in $[\alpha]$ wie in $[\beta]$ liegen soll, so muss er in dem $[\alpha + \beta - n]$ liegen, der nach § 2, II dem $[\alpha]$ und dem $[\beta]$ gemeinsam ist. Ein solcher, ganz in $[\alpha + \beta - n]$ liegender Strahl soll nun aber auch mit $[a]$ einen Punkt gemeinsam haben. Dies kann er, da $[a]$ zwar in $[\alpha]$, aber nicht in $[\alpha + \beta - n]$ liegt, nur dadurch, dass er das Hauptelement, welches, in $[\alpha]$ liegend, dem $[a]$ und dem $[\alpha + \beta - n]$ gemeinsam ist, schneidet. Letztere haben aber nach § 2, II einen $[a + \alpha + \beta - n - \alpha]$, d. h. einen $[a + \beta - n]$ gemeinsam. Analog haben $[b]$ und $[\alpha + \beta - n]$ einen $[b + \alpha - n]$ gemeinsam. Die zusammengesetzte Bedingung $(a, \alpha)(b, \beta)$ wird also dadurch, und nur dadurch erfüllt, dass ein ganz in dem $[\alpha + \beta - n]$ liegender Strahl mit den in diesem $[\alpha + \beta - n]$ liegenden Hauptelementen $[a + \beta - n]$ und $[b + \alpha - n]$ je einen Punkt gemeinsam hat. Demgemäss können wir, mit Benutzung der bei der Ableitung von Formel (5) eingeführten Bezeichnungsweise, schreiben:

$$(8) \quad (a, \alpha)(b, \beta) = (a+\beta-n, \overline{\alpha+\beta-n})\,(b+\alpha-n, \overline{\alpha+\beta-n}).$$

Das die rechte Seite dieser Gleichung bildende Product können wir nun nach Formel (5) oder Formel (7) auflösen, wenn wir uns dort statt des vorausgesetzten $[n]$ einen $[\alpha + \beta - n]$ denken. Die Formel (5) ist anzuwenden, wenn $(a+\beta-n)+(b+\alpha-n) \overline{\gtrless} (\alpha+\beta-n)-1$ ist, d. h., wenn $a + b \overline{\gtrless} n - 1$ ist. Die Formel (7) ist anzuwenden, wenn $(a + \beta - n) + (b + \alpha - n) \overline{\lessgtr} (\alpha + \beta - n) - 1$ ist, d. h., wenn $a + b \overline{\lessgtr} n - 1$ ist. Wir ersetzen also in den Formeln (5) und (7) n durch $\alpha + \beta - n$, a durch $a + \beta - n$, und b durch $b + \alpha - n$. Dadurch erhalten wir:

Erstens: Für $a + b \gtreqless n - 1$ und $a + \beta \gtreqless b + \alpha$ gilt:

$$(9)\quad \begin{aligned}(a, \alpha)\,(b, \beta) = {} & (a + b - n + 1, \alpha + \beta - n) \\ & + (a + b - n + 2, \alpha + \beta - n - 1) \\ & + (a + b - n + 3, \alpha + \beta - n - 2) \\ & + \cdots + (a + \beta - n, b + \alpha - n + 1);\end{aligned}$$

Zweitens: Für $a + b \lesseqgtr n - 1$ und $a + \beta \gtreqless b + \alpha$ gilt:

$$(10)\quad \begin{aligned}(a, \alpha)\,(b, \beta) = {} & (0, a + b + \alpha + \beta - 2n + 1) \\ & + (1, a + b + \alpha + \beta - 2n) \\ & + (2, a + b + \alpha + \beta - 2n - 1) \\ & + \cdots + (a + \beta - n, b + \alpha - n + 1).\end{aligned}$$

Die erste dieser beiden Hauptformeln enthält rechts $\beta - b$ Glieder, die zweite $a + \beta - n + 1$ Glieder. Beide Formeln werden congruent, wenn $a + b = n - 1$ ist. Wenn man die Formel (9) auf den Fall, in welchem $a + b < n - 1$ ist, und für welchen sie also oben nicht bewiesen ist, anwenden wollte, so erhielte man zuerst Bedingungssymbole (p, q), in denen p negativ ist, und die also sinnlos sind, dann aber würden die Glieder der rechten Seite von Formel (10) folgen. Man kann daher die Unterscheidung der beiden Fälle $a + b \gtreqless n - 1$ und $a + b \lesseqgtr n - 1$ fallen lassen, und immer nur die Formel (9) anwenden, wenn man dabei die *Vorschrift beachtet, dass die sinnlosen Bedingungssymbole (p, q), wo p negativ ist, gleich Null zu setzen sind.* Man erhält so, falls man noch, was für die Anwendung zweckmässig ist, die Addenden der rechten Seite von Formel (9) in umgekehrter Reihenfolge schreibt; die folgende Regel:

11) *Um die $(4n - 2 - p - \pi - q - \varkappa)$-fache, zusammengesetzte Bedingung $(p, \pi)\,(q, \varkappa)$ durch $(4n - 2 - p - \pi - q - \varkappa)$-fache, Grundbedingungen auszudrücken, entscheide man zuerst, ob $p + \varkappa$ kleiner, gleich oder grösser als $q + \pi$ ist. Im ersten Falle setze man $p = a$, $\pi = \alpha$, $q = b$, $\varkappa = \beta$, im dritten Falle setze man umgekehrt $q = a$, $\varkappa = \alpha$, $p = b$, $\pi = \beta$. Im zweiten Falle sind beide Einsetzungen gestattet. Darauf setze man die vorgelegte, zusammengesetzte Bedingung gleich*

$$(a + \beta - n, b + \alpha - n + 1) + (a + \beta - n - 1, b + \alpha - n + 2) \\ + (a + \beta - n - 2, b + \alpha - n + 3) + \cdots,$$

nehme aber als letztes Glied dieser Summandenreihe das Glied

$$(a + b - n + 1,\ \alpha + \beta - n).$$

Erscheint schon vor diesem Gliede das Bedingungssymbol

$$(0, a + b + \alpha + \beta - 2n + 1),$$

so wird man von selbst dieses als den letzten Summanden betrachten, *da die etwa nachfolgenden sinnlos werden würden. Ist schon $a+\beta-n$ negativ, so erscheinen lauter sinnlose Symbole, d. h. die vorgelegte Bedingung ist unerfüllbar.* Es ist z. B. in einem [9]:

$$(5,8)\,(4,9) = (4,9)\,(5,8) = (3,6) + (2,7) + (1,8);$$
$$(5,8)\,(6,7) = (3,6);$$
$$(3,7)\,(4,9) = (4,9)\,(3,7) = (2,4) + (1,5) + (0,6);$$
$$(1,8)\,(7,9) = (1,7) + (0,8);$$
$$(5,9)\,(2,3) = 0.$$

Aus unserer Hauptregel (11) entnehmen wir noch, wegen der Anwendungen in § 5 die folgenden speciellen Fälle:

Ist $a \gtreqless 1$ und $a \lesseqgtr \alpha - 2$, so kommt:

$$(a, \alpha)\,(n-2, n) = (a, \alpha - 1) + (a - 1, \alpha);$$

Ist $a \gtreqless 1$ und $a = \alpha - 1$, so kommt:

$$(\alpha - 1, \alpha)\,(n-2, n) = (n-2, n)\,(\alpha - 1, \alpha) = (\alpha - 2, \alpha);$$

Ist $a = 0$ und $\alpha \gtreqless 2$, so kommt:

$$(0, \alpha)\,(n-2, n) = (0, \alpha - 1);$$

Ist $a = 0$ und $\alpha = 1$, so kommt:

$$(0, 1)\,(n-2, n) = (n-2, n)\,(0, 1) = 0.$$

Diese Regeln kann man zu der einen Regel zusammenfassen, dass immer

$$(12) \qquad (a, \alpha)\,(n-2, n) = (a, \alpha - 1) + (a - 1, \alpha)$$

ist, wenn man die durch Anwendung dieser Formel etwa entstehenden, sinnlosen Bedingungssymbole gleich Null setzt. Die Sinnlosigkeit einer Bedingung (p, q) kann dabei erstens dadurch herbeigeführt werden, dass p negativ wird, zweitens auch dadurch, dass $p = q$ wird.

Wegen der Anwendung in § 6 betrachten wir noch die Zusammensetzung einer beliebigen Grundbedingung (a, α) mit der zweifachen Grundbedingung $(n-3, n)$. Hier kann man die Unterscheidung von Fällen wenn auch nicht unterlassen, so doch beschränken, wenn man wieder die Vorschrift beachtet, dass etwa auftretende sinnlose Bedingungssymbole gleich Null zu setzen sind. *Bei Festhaltung dieser Vorschrift erhält man nämlich:*

$$(13) \quad \begin{cases} (\alpha - 1, \alpha)\,(n-3, n) = (\alpha - 3, \alpha), \text{ und für } a \lesseqgtr \alpha - 2: \\ (a, \alpha)\,(n-3, n) = (a, \alpha - 2) + (a - 1, \alpha - 1) + (a - 2, \alpha). \end{cases}$$

Die durch die Hauptregel (11) geleistete Darstellung einer aus zwei Grundbedingungen zusammengesetzten Bedingung durch einfache Grundbedingungen, hat man nur wiederholt anzuwenden, um auch das Product von drei und mehr Grundbedingungen als Summe von einfachen Grundbedingungen zu erhalten, wie folgende Beispiele zeigen, die sich wieder auf einen [9] beziehen sollen:

$$(7,9)(5,8)(6,7) = (7,9)(3,6) = (3,6)(7,9) = (3,5) + (2,6),$$

oder:

$$(7,9)(5,8)(6,7) = [(5,7)+(4,8)](6,7) = (3,5) + (2,6),$$

oder:

$$(7,9)(5,8)(6,7) = (5,7)(5,8) = (3,5) + (2,6);$$

$$\begin{aligned}(1,8)(7,9)(6,9) &= [(1,7)+(0,8)](6,9) = [(1,5)+(0,6)] + (0,6)\\ &= (1,5) + 2\,.\,(0,6),\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}(1,8)(7,9)(6,9) &= (1,8)[(6,8)+(5,9)] = [(0,6)] + [(1,5)+(0,6)]\\ &= (1,5) + 2\,.\,(0,6).\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}(1,8)(7,9)(6,9) &= (7,9)[(1,6)+(0,7)] = [(1,5)+(0,6)] + [(0,6)]\\ &= (1,5) + 2\,.\,(0,6).\end{aligned}$$

Ferner:

$$\begin{aligned}(1,8)(7,9)(6,9)\,(6,8) &= [(1,5)+2\,.\,(0,6)](6,8) = (0,3) + 2\,.\,0 = (0,3),\\ (1,8)(7,9)(6,9)^2(6,8) &= (0,3)(6,9) = (0,1);\\ (5,8)(4,9)(7,9)^2 \quad &= [(3,6)+(2,7)+(1,8)]\,[(6,9)+(7,8)]\\ &= [(3,4)+(2,5)+(1,6)+(2,5)+(1,6)+(0,7)\\ &\qquad\qquad +(1,6)+(0,7)]\\ &+ [(2,5)+(1,6)+(0,7)]\\ &= (3,4) + 3\,.\,(2,5) + 4\,.\,(1,6) + 3\,.\,(0,7),\\ (5,8)(4,9)(7,9)^2(3,8) &= [(3,4)+3\,.\,(2,5)+4\,.\,(1,6)+3\,.\,(0,7)](3,8)\\ &= 0 + 3\,.\,0 + 4\,.\,(0,1) + 3\,.\,0 = 4\,.\,(0,1);\\ (0,9)(6,9)^4 &= (0,7)(6,9)^3 = (0,5)(6,9)^2 = (0,3)(6,9) = (0,1);\\ (4,9)^4 = [(4,9)^2]^2 &= [(4,5)+(3,6)+(2,7)+(1,8)+(0,9)]^2\\ &= (4,5)^2 + (3,6)^2 + (2,7)^2 + (1,8)^2 + (0,9)^2\\ &+ 2\,.\,(4,5)(3,6) + 2\,.\,(4,5)(2,7) + \cdots\\ &= (0,1)+(0,1)+(0,1)+(0,1)+(0,1)+2.0+2.0+\cdots\\ &= 5.(0,1).\end{aligned}$$

Diese Beispiele zeigen dreierlei: erstens, dass mit Hülfe der Hauptregel (11) jede beliebige, aus Grundbedingungen zusammengesetzte Bedingung schliesslich in eine Summe von nicht-zusammengesetzten Grundbedingungen verwandelt werden kann, zweitens, dass man, falls die zusammengesetzte Grundbedingung mehr als zwei Grundbedingungen enthält, meist auf mehreren Wegen zu dieser Summe gelangen, also Controlen der Rechnung erhalten kann, drittens dass man, falls die Dimension der zusammengesetzten Bedingung gleich der Constantenzahl $2(n-1)$ des Strahles ist, zuletzt $x \cdot (0,1)$ *erhalten muss, wo x eine nicht nega-*

tive ganze Zahl ist. Da nun aber die $2(n-1)$-fache Grundbedingung $(0,1)$ von einem einzigen Strahle (F. 1) erfüllt wird, so *ist x die Anzahl der Strahlen, welche die gegebene, zusammengesetzte Bedingung erfüllen. Damit ist also die Aufgabe, die Anzahl derjenigen Strahlen zu finden, welche beliebige, gegebene Grundbedingungen erfüllen, vollständig gelöst.* Beispielsweise übersetzen wir zwei von den in den obigen Beispielen erhaltenen Anzahlresultaten in Worte:

$$(5,8)\,(3,8)\,(4,9)\,(7,9)^2 = 4\,.\,(0,1) = 4 \text{ bedeutet:}$$

Es giebt in einem [9] 4 *Strahlen, von denen jeder in einem gegebenen* [8] *liegt, und einen gegebenen, in* [8] *liegenden* [5] *schneidet, ferner in einem andern gegebenen* [8] *liegt, und einen gegebenen, in diesem* [8] *liegenden* [3] *schneidet, ferner einen gegebenen* [4] *und zwei gegebene* [7] *schneidet.*

$$(4,9)^4 = 5\,.\,(0,1) = 5 \text{ bedeutet:}$$

Es giebt in einem [9] 5 *Strahlen, von denen jeder jeden von vier gegebenen* [4] *schneidet.*

Zum Schluss stellen wir noch für den vierdimensionalen, linearen Raum die fundamentalen Anzahlen des Strahls zusammen:

$(0,1)=1$; $(0,2)(2,4)=1$; $(0,3)(1,4)=1$; $(0,3)(2,3)=0$; $(1,2)(1,4)=0$; $(1,2)(2,3)=1$;

$(0,4)^2=1$; $(0,4)(1,3)=0$; $(1,3)^2=1$;

$(0,3)(2,4)^2=1$; $(1,2)(2,4)^2=1$; $(0,4)(1,4)(2,4)=1$; $(0,4)(2,3)(2,4)=0$;

$(1,3)(1,4)(2,4)=1$; $(1,3)(2,3)(2,4)=1$; $(1,4)^3=1$; $(1,4)^2(2,3)=1$; $(1,4)(2,3)^2=0$; $(2,3)^3=1$;

$(0,4)(2,4)^3=1$; $(1,3)(2,4)^3=2$; $(1,4)^2(2,4)^2=2$; $(1,4)(2,3)(2,4)^2=1$; $(2,3)^2(2,4)^2=1$;

$(1,4)(2,4)^4=3$; $(2,3)(2,4)^4=2$; $(2,4)^6=5$.

§ 5.

Zahl der Strahlen eines $[n]$, welche die einfache Bedingung, einen gegebenen $[n-2]$ zu schneiden, beliebig oft, und ausserdem eine beliebige Grundbedingung erfüllen.

Durch wiederholte Anwendung der Regel (12) des § 4 erhält man nach und nach:

$(n-2, n) = (n-2, n)$;

$(n-2, n)^2 = (n-3, n) + (n-2, n-1)$;

$(n-2, n)^3 = (n-4, n) + 2(n-3, n-1)$;

$(n-2, n)^4 = (n-5, n) + 3(n-4, n-1) + 2(n-3, n-2)$;

$$\begin{aligned}
(n-2,n)^5 &= (n-\ \,6,n) + \ 4(n-5,n-1) + 5(n-4,n-2);\\
(n-2,n)^6 &= (n-\ \,7,n) + \ 5(n-6,n-1) + 9(n-5,n-2)\\
&\quad + \ 5(n-4,n-3);\\
(n-2,n)^7 &= (n-\ \,8,n) + \ 6(n-7,n-1) + 14(n-6,n-2)\\
&\quad + 14(n-5,n-3);\\
(n-2,n)^8 &= (n-\ \,9,n) + \ 7(n-8,n-1) + 20(n-7,n-2)\\
&\quad + 28(n-6,n-3) + 14(n-5,n-4);\\
(n-2,n)^9 &= (n-10,n) + \ 8(n-9,n-1) + 27(n-8,n-2)\\
&\quad + 48(n-7,n-3) + 42(n-6,n-4);
\end{aligned}$$

u. s. w.

Man erkennt hieraus ohne Weiteres, dass die e-te Potenz von $(n-2,n)$ gleich einer Summe von gewissen Vielfachen der Bedingungen

$$(n-e-1,n),\ (n-e,n-1),\ (n-e+1,n-2),\ \ldots$$

ist, und dass die letzte dieser Bedingungen $\left(n-\frac{1}{2}e-1,\ n-\frac{1}{2}e\right)$ heisst, wenn e gerade ist, dagegen $\left(n-\frac{e+3}{2},\ n-\frac{e-1}{2}\right)$ heisst, wenn e ungerade ist. Bezeichnet man also den Coefficienten des k-ten Addenden der Summe, welche gleich $(n-2,n)^e$ ist, mit $\varphi(e,k)$, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
(1)\quad (n-2,n)^e &= \varphi(e,1).(n-e-1,n)+\varphi(e,2).(n-e,n-1)\\
&\quad + \varphi(e,3).(n-e+1,n-2)\\
&\quad + \varphi(e,4).(n-e+2,n-3)+\cdots,
\end{aligned}$$

welche Summe soweit fortzusetzen ist, bis eine Grundbedingung (a,b) erscheinen würde, bei der $a \overline{\gtrless} b$ wäre, und die also sinnlos würde. Das letzte Glied heisst also $\varphi\left(e,\frac{1}{2}e+1\right)\cdot\left(n-\frac{1}{2}e-1,\ n-\frac{1}{2}e\right)$, wenn e gerade ist, und $\varphi\left(e,\frac{e+1}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{e+3}{2},\ n-\frac{e-1}{2}\right)$, wenn e ungerade ist. Es handelt sich nun noch darum, den Coefficienten $\varphi(e,k)$ allgemein durch e und k auszudrücken. Um dies zu erreichen, beachten wir, dass die obigen Coefficienten nach folgendem *Bildungsgesetze* entstehen. Es ist immer:

erstens: $\varphi(e,1)=1$,

zweitens: $\varphi(e,k)=\varphi(e-1,k)+\varphi(e-1,k-1)$,

drittens: $\varphi\left(e,\frac{1}{2}e+1\right)=\varphi\left(e-1,\frac{1}{2}e\right)$, wenn e gerade ist.

Es ist also $\varphi(e,k)$ so zu bestimmen, dass diesen drei Bedingungen genügt wird. Der zweiten Bedingung genügt bekanntlich jeder *Binomialcoefficient* von der Form $(e \pm c)_{k \pm d}$, wo c und d ganze Zahlen sind, und deshalb auch jede Summe von Vielfachen solcher Binomialcoefficienten mit der Basis $e+c$. Um auch der ersten Bedingung zu genügen, ist es am einfachsten, $(e+c)_{k-1}$ mit einer algebraischen Summe von Vielfachen von Binomialcoefficienten additiv zusammenzusetzen, welche sämmtlich die Basis $(e+c)$ haben, und deren Index kleiner als $k-1$ ist. Aus den hiernach noch möglichen Functionen haben wir dann eine solche herauszusuchen, durch welche auch der dritten der obigen Bedingungen genügt wird. So erhält man:

$$(2)\qquad \varphi(e,k)=(e-1)_{k-1}-(e-1)_{k-3}$$

oder Functionen, die wegen der Sätze über Binomialcoefficienten mit dieser identisch werden. Die erhaltene Function formen wir noch in folgender Weise um:

$$\varphi(e,k)=(e-1)_{k-1}-(e-1)_{k-3}=\frac{(e-1)!}{(k-1)!(e-k)!}-\frac{(e-1)!}{(k-3)!(e-k+2)!}$$

$$=\frac{(e-1)!}{(k-1)!(e-k+2)!}[(e-k+1)(e-k+2)-(k-1)(k-2)]$$

$$=\frac{e!}{(k-1)!(e-k+1)!}\cdot\frac{e-2k+3}{e-k+2},$$

also:

$$(3)\qquad \varphi(e,k)=e_{k-1}\cdot\frac{e-2k+3}{e-k+2}.$$

Demnach lässt sich die e-te Potenz der einfachen Grundbedingung $(n-2,n)$ auf folgende Weise durch die e-fachen Grundbedingungen ausdrücken:

$$(4)\qquad (n-2,n)^e=(n-e-1,n)+e_1\cdot\frac{e-1}{e}\cdot(n-e,n-1)$$
$$+e_2\cdot\frac{e-3}{e-1}\cdot(n-e+1,n-2)$$
$$+e_3\cdot\frac{e-5}{e-2}\cdot(n-e+2,n-3)+\cdots,$$

welche Summe abzubrechen ist, sobald ein sinnloses Bedingungssymbol erscheint, oder, was auf dasselbe hinauskommt, sobald ein Coefficient Null oder negativ wird.

Mit Hülfe dieser Formel kann man z. B. die *Anzahl* der Strahlen, welche die beliebige Grundbedingung (a,α) erfüllen und zugleich die Grundbedingung $(n-2,n)$ $(a+\alpha-1)$-mal erfüllen, direct durch a und α ausdrücken. Zu diesem Zwecke hat man in (4) $e=a+\alpha-1$ zu setzen, und jede der Grundbedingungen $(n-e-1,n)$, $(n-e,n-1)$, $(n-e+1,n-2)$ u. s. w. mit (a,α) zusammenzusetzen. Die so erhaltenen zusammengesetzten Bedingungen werden aber sämmtlich unerfüllbar, mit Ausnahme von $(n-\alpha,n-a)(a,\alpha)$, wofür sich nach § 4 (0,1) ergiebt. Es ist also, da $(0,1)=1$ ist, die gesuchte Anzahl gleich dem Coefficienten, mit dem in (4) die Grundbedingung $(n-\alpha,n-a)$

multiplicirt erscheint. Es ist dies der Coefficient des $(a+1)$-ten Addenden, also

$$e_a \cdot \frac{e-2a+1}{e-a+1},$$

wo

$$e = a + \alpha - 1$$

ist, d. h.

$$\frac{(a+\alpha-1)!}{a!(\alpha-1)!} \cdot \frac{\alpha-a}{\alpha} = \frac{(a+\alpha)!}{a!\,\alpha!} \cdot \frac{\alpha-a}{\alpha+a} = (\alpha+a)_a \cdot \frac{\alpha-a}{\alpha+a},$$

also:

$$(5) \qquad (a,\alpha)\,(n-2,n)^{a+\alpha-1} = \frac{\alpha-a}{\alpha+a} \cdot (\alpha+a)_a.$$

Demnach ist immer $\frac{\alpha-a}{\alpha+a}\cdot(\alpha+a)_a$ *die Anzahl der Strahlen, welche in einem* $[n]$ *einen gegebenen* $[a]$ *schneiden, dabei in einem durch* $[a]$ *gehenden* $[\alpha]$ *liegen, und ausserdem* $(\alpha+a-1)$ *beliebig gegebene* $[n-2]$ *schneiden.* Es ergiebt sich hieraus z. B. für $a=0$, $\alpha=2$, dass es $\frac{2-0}{2+0}\cdot(2+0)_0 = 1$ Strahl giebt, der in unserm Raume in einem gegebenen Strahlbüschel liegt und zugleich eine gegebene Gerade schneidet; ferner für $a=1$, $\alpha=4$, dass es in einem vierdimensionalen, linearen Raume $\frac{4-1}{4+1}\cdot(4+1)_1 = 3$ Strahlen giebt, die eine gegebene Gerade und vier gegebene Ebenen schneiden, ein Resultat, das schon am Schluss von § 4 vorkommt. Bemerkenswerth ist der Fall, wo $a=0$ und α beliebig ist. Dann erhält man $\frac{\alpha-0}{\alpha+0}\cdot(\alpha+0)_0 = 1$. Es giebt also in jedem $[n]$ immer nur einen einzigen Strahl, der durch einen gegebenen Punkt geht, in einem beliebigen, diesen Punkt enthaltenden $[\alpha]$ liegt, und $\alpha-1$ gegebene $[n-2]$ schneidet, gleichviel wie gross α ist.

Schliesslich bestimmen wir noch die Zahl $(n-2,n)^{2n-2}$, d. h. die Anzahl der Strahlen, welche in einem $[n]$ *nur* die einfache Grundbedingung hinlänglich oft, d. h. $(2n-2)$ mal, erfüllen. Man kann diese Zahl erstens aus (5) entnehmen, indem man sich unter (a,α) die nullfache Grundbedingung $(n-1,n)$ vorstellt, zweitens auch aus (5), indem man sich unter (a,α) die einfache Grundbedingung $(n-2,n)$ vorstellt, drittens aus (1), indem man $e=2n-2$ setzt. Je nachdem man den ersten, zweiten oder dritten Weg einschlägt, erhält man für die gesuchte Zahl:

$$(6) \qquad \frac{1}{2n-1}\cdot(2n-1)_{n-1} \quad \text{oder} \quad \frac{2}{2n-2}\cdot(2n-2)_{n-2} \quad \text{oder}$$

$$(0,1)\cdot\varphi(2n-2,n) = (2n-2)_{n-1}\cdot\frac{1}{n}.$$

Alle drei Resultate erweisen sich als identisch und ergeben den Satz:

Die Anzahl der Strahlen, welche in einem n-dimensionalen, linearen Raume jeden von $2n-2$ beliebig gegebenen $(n-2)$-dimensionalen, linearen Räumen zu schneiden vermögen, beträgt $\frac{(2n-1)_n}{2n-1}$ *).

Es wird vielleicht nicht überflüssig sein, dieses Resultat auch *in algebraischer Form* auszusprechen Dass in einem $[n]$ $2n-2$ lineare Räume $(n-2)$-ter Dimension gegeben sind, bedeutet algebraisch, dass $2n-2$ Systeme von je zwei Gleichungen zwischen n Variabeln $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ von der Form:

$$\begin{cases} x_1 = a + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots + a_n x_n, \\ x_1' = a' + a_2' x_2 + a_3' x_3 + \cdots + a_n' x_n \end{cases}$$

gegeben sind. Wenn nun ein gesuchter Strahl einen solchen $(n-2)$-dimensionalen Raum schneiden soll, so heisst dies, dass ein System von $n-1$ Gleichungen von der Form:

$$\begin{cases} x_2 = -y_2 x_1 + z_2, \\ x_3 = -y_3 x_1 + z_3, \\ \vdots \\ x_n = -y_n x_1 + z_n \end{cases}$$

mit dem jenen Raum darstellenden Gleichungssysteme eine Werthgruppe der $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ gemeinsam haben soll. Hierzu ist erforderlich, dass zwischen den $2n-2$ Grössen $y_2, y_3, \ldots, y_n, z_2, z_3, \ldots, z_n$ eine Gleichung besteht. Man erhält dieselbe durch Elimination der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus den $2+(n-1)$ Gleichungen der beiden Systeme in folgender Form:

$$(7) \quad \frac{a + a_2 z_2 + a_3 z_3 + \cdots + a_n z_n}{1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \cdots + a_n y_n} = \frac{a' + a_2' z_2 + a_3' z_3 + \cdots + a_n' z_n}{1 + a_2' y_2 + a_3' y_3 + \cdots + a_n' y_n}.$$

Da eine solche Bedingungsgleichung für jeden der $2n-2$ linearen Räume stattfinden muss, so erhalten wir aus (6)* den Satz:

Einem System von $2n-2$ Gleichungen, welche alle die Form der in (7) angeführten Gleichungen haben, wird durch $\frac{(2n-1)_n}{2n-1}$ *Werthgruppen der $2n-2$ Unbekannten $y_2, y_3, \ldots, y_n, z_2, z_3, \ldots, z_n$ genügt.*

§ 6.

Zahl der Strahlen eines $[n]$, welche die zweifache Bedingung, einen gegebenen $[n-3]$ zu schneiden, beliebig oft, und ausserdem eine beliebige Grundbedingung erfüllen.

Durch wiederholte Anwendung der Regel (13) des § 4 erhält man nach und nach:

*) Wegen dieser Anzahl vergl. die Anmerkung auf Seite 27.

$$
\begin{aligned}
(n-3,n) &= (n-3,n);\\
(n-3.n)^2 &= (n-5,n) + (n-4,n-1) + (n-3,n-2);\\
(n-3,n)^3 &= (n-7,n) + 2(n-6,n-1) + 3(n-5,n-2)\\
&\quad + (n-4,n-3);\\
(n-3,n)^4 &= (n-9,n) + 3(n-8,n-1) + 6(n-7,n-2)\\
&\quad + 6(n-6,n-3) + 3(n-5,n-4);\\
(n-3,n)^5 &= (n-11,n) + 4(n-10,n-1) + 10(n-9,n-2)\\
&\quad + 15(n-8,n-3) + 15(n-7,n-4)\\
&\quad + 6(n-6,n-5);\\
(n-3,n)^6 &= (n-13,n) + 5(n-12,n-1) + 15(n-11,n-2)\\
&\quad + 29(n-10,n-3) + 40(n-9,n-4)\\
&\quad + 36(n-8,n-5) + 15(n-7,n-6);
\end{aligned}
$$

u. s. w.

Hieraus ersieht man ohne Weiteres:

$$
\begin{aligned}
(1)\quad (n-3,n)^e &= \psi(e,1)(n-2e-1,n) + \psi(e,2)(n-2e,n-1)\\
&\quad + \psi(e,3)(n-2e+1,n-2) + \psi(e,4)(n-2e+2,n-3)\\
&\quad + \cdots + \psi(e,e+1)(n-e-1,n-e),
\end{aligned}
$$

wo $\psi(e,k)$ den Coefficienten des k-ten Addenden der Summe bezeichnet, die gleich $(n-3,n)^e$ ist. Es handelt sich also nur noch darum, den Coefficienten $\psi(e,k)$ allgemein durch e und k auszudrücken. Zu diesem Zwecke beachten wir das Bildungsgesetz, nach welchem die obigen Coefficienten entstehen. Dieses lässt sich ausdrücken, wie folgt:

erstens: $\psi(e,1) = 1$,

zweitens: $\psi(e,2) = e-1$,

drittens: $\psi(e,k) = \psi(e-1,k) + \psi(e-1,k-1) + \psi(e-1,k-2)$ für $3 \leqq k \leqq e$,

viertens: $\psi(e,e+1) = \psi(e-1,e-1)$.

Eine Ueberlegung, ähnlich der, welche in § 5 einen Ausdruck für $\varphi(e,k)$ liefert, führt dazu, dass diesen vier Bedingungen genügt wird, wenn gesetzt wird:

$$
(2)\quad \psi(e,k) = (e+k-3)_{e-2} - e_1\cdot(e+k-6)_{e-2} + e_2\cdot(e+k-9)_{e-2} - \cdots,
$$

welche Reihe von selbst abbricht, sobald die Basen $e+k-3p$ der Binomialcoefficienten $(e+k-3p)_{e-2}$ kleiner als der Index $e-2$ werden. Wir beweisen zunächst, dass dieser Ausdruck von $\psi(e,k)$ der dritten der obigen vier Bedingungen genügt. Zu diesem Zweck addiren wir die drei Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\psi(e-1,k) &= (e+k-4)_{e-3} - (e-1)_1\cdot(e+k-7)_{e-3}\\
&\quad + (e-1)_2\cdot(e+k-10)_{e-3} - \cdots,
\end{aligned}
$$

$$\psi(e-1, k-1) = (e+k-5)_{e-3} - (e-1)_1 \cdot (e+k-8)_{e-3} + (e-1)_2 \cdot (e+k-11)_{e-3} - \cdots,$$

$$\psi(e-1) k-2) = (e+k-6)_{e-3} - (e-1)_1 \cdot (e+k-9)_{e-3} + (e-1)_2 \cdot (e+k-12)_{e-3} - \cdots.$$

Die Summe der drei ersten Glieder rechts giebt nach einem bekannten Satze über Binomialcoefficienten: $(e+k-3)_{e-2} - (e+k-6)_{e-2}$; die Summe der drei zweiten Glieder rechts giebt analog:

$$-(e-1)_1 [(e+k-6)_{e-2} - (e+k-9)_{e-2}],$$

die Summe der drei dritten Glieder giebt ebenso:

$$+(e-1)_2 [(e+k-9)_{e-2} - (e+k-12)_{e-2}], \text{ u. s. w.}$$

Demnach ist:

$$\begin{aligned}
&\psi(e-1, k) + \psi(e-1, k-1) + \psi(e-1, k-2) \\
&= (e+k-3)_{e-2} - [1+(e-1)_1](e+k-6)_{e-2} \\
&+ [(e-1)_1 + (e-1)_2](e+k-9)_{e-2} \\
&- [(e-1)_2 + (e-1)_3](e+k-12)_{e-2} + \cdots \\
&= (e+k-3)_{e-2} - e_1 \cdot (e+k-6)_{e-2} + e_2 \cdot (e+k-9)_{e-2} \\
&- e_3 \cdot (e+k-12)_{e-2} + \cdots,
\end{aligned}$$

welcher Ausdruck gleich $\psi(e, k)$ ist. Dass ferner durch den Ausdruck in (2) auch der ersten und zweiten Bedingung genügt wird, ergiebt sich daraus, dass für $k = 1$ und $k = 2$ alle auf das erste Glied folgenden Glieder Null werden, und dass das erste Glied zu $(e-2)_{e-2} = 1$ bezw. zu $(e-1)_{e-2} = e-1$ wird. Um die vierte Bedingung zu beweisen, beachten wir, dass die Gleichung

$$\psi(e, k) = \psi(e-1, k) + \psi(e-1, k-1) + \psi(e-1, k-2)$$

oben für jedes k bewiesen ist, und dass man dieselbe deshalb auch auf Coefficienten anwenden kann, die Null oder negativ werden. Wir können demzufolge die Coefficienten in den Ausdrücken für die Potenzen von $(n-3, n)$ sämmtlich auch dadurch erhalten, dass wir der Formel (2) die Werthe von $\psi(2, k)$ für alle möglichen positiven k entnehmen, und dann nur die erste, zweite und dritte Bedingung anwenden. So ergiebt sich die Coefficiententafel:

$e=2$:	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	..
$e=3$:	1	2	3	1	-1	-3	-2	-1	0	0	0	0	0	..
$e=4$:	1	3	6	6	3	-3	-6	-6	-3	-1	0	0	0	..
$e=5$:	1	4	10	15	15	6	-6	-15	-15	-10	-4	-1	0	..
$e=6$:	1	5	15	29	40	36	15	-15	-36	-40	-29	-15	-5	..
$e=7$:	1	6	21	49	84	105	91	36	-36	-91	-105	-84	-49	..
$e=8$:	1	7	28	76	154	238	280	232	91	-91	-232	-280	-238	

Da nun einmal in der ersten Horizontalreihe die Coefficienten 1, 1, 1, -1, -1, -1, 0, 0, ... heissen, so muss in der zweiten Reihe der fünfte Coefficient das Negative des vierten, der sechste das Negative des dritten, u. s. w. sein. Aus dieser Eigenschaft der dritten Reihe folgt dann die analoge Eigenschaft der vierten Reihe u. s. f. Es ist also immer $\psi(e, k) = -\psi(e, 2e-k+3)$, und speciell $\psi(e-1, e) = -\psi(e-1, e+1)$. Hieraus folgt aber bei Anwendung der dritten Bedingung die Richtigkeit der vierten Bedingung; denn

$$\psi(e, e+1) = \psi(e-1, e+1) + \psi(e-1, e) + \psi(e-1, e-1)$$

wird wegen der eben bewiesenen Relation zu $\psi(e, e+1) = \psi(e-1, e-1)$.

Die Formel (1), deren Coefficienten nunmehr durch e ausgedrückt sind, multipliciren wir jetzt mit der beliebigen Grundbedingung (a, α), und bestimmen dabei e so, dass die Dimension von $(n-3, n)^e (a, \alpha)$ gleich der Constantenzahl $2n-2$ des Strahls wird. Dadurch erhalten wir $2e + 2n - 1 - a - \alpha = 2n - 2$, also $e = \frac{a+\alpha-1}{2}$. Von den entstandenen $(2n-2)$-fachen, zusammengesetzten Grundbedingungen $(a, \alpha)(n-2e-1, n)$, $(a, \alpha)(n-2e, n-1)$ u. s. w. werden nun sämmtliche unerfüllbar, ausser $(a, \alpha)(n-\alpha, n-a) = (0, 1)$. Deshalb ist die Zahl $(a, \alpha)(n-3, n)^{\frac{a+\alpha-1}{2}}$ gleich dem Coefficienten

$$\psi\left(\frac{a+\alpha-1}{2}, a+1\right),$$

für welchen sich aus (2) ergiebt:

$$(3)\quad \left(\frac{3a+\alpha-5}{2}\right)_{\frac{a+\alpha-5}{2}} - \left(\frac{a+\alpha-1}{2}\right)_1 \cdot \left(\frac{3a+\alpha-11}{2}\right)_{\frac{a+\alpha-5}{2}}$$
$$+ \left(\frac{a+\alpha-1}{2}\right)_2 \cdot \left(\frac{3a+\alpha-17}{2}\right)_{\frac{a+\alpha-5}{2}} + \cdots$$

Wir benutzen ferner die Formeln (1) und (2), um, mit Hülfe von § 5, Formel (5), *die Anzahl der Strahlen zu berechnen, welche die Bedingung* $(n-3, n)$ *e-mal und die Bedingung* $(n-2, n)$ $(2n-2-2e)$-*mal erfüllen.* Für diese Anzahl erhält man:

$$(4)\quad (2n-2e-1)_n \cdot \frac{2e+1}{2n-2e-1} + [(e-1)_{e-2}] \cdot (2n-2e-1)_{n-1} \cdot \frac{2e-1}{2n-2e-1}$$
$$+ [e_{e-2}] \cdot (2n-2e-1)_{n-2} \cdot \frac{2e-3}{2n-2e-1}$$
$$+ [(e+1)_{e-2} - e_1 \cdot (e-2)_{e-2}] \cdot (2n-2e-1)_{n-3} \cdot \frac{2e-5}{2n-2e-1}$$
$$+ [(e+2)_{e-2} - e_1 \cdot (e-1)_{e-2}] \cdot (2n-2e-1)_{n-4} \cdot \frac{2e-7}{2n-2e-1} + \cdots$$

Schliesslich setzen wir in (1) $e = n-1$ oder in (3) $a = n-1$, $\alpha = n$, und erhalten dadurch:

$$(5) \quad \psi(n-1, n) \text{ oder } (2n-4)_{n-3} - (n-1)_1 (2n-7)_{n-3} + (n-1)_2 (2n-10)_{n-3} - \cdots,$$

was nach Formel (2) identisch ist. Dieses Resultat lautet in Worten:

Die Anzahl derjenigen Strahlen eines n-dimensionalen, linearen Raumes, welche jeden von $n-1$ beliebig gegebenen $(n-3)$-dimensionalen Räumen schneiden, beträgt:

$$(2n-4)_{n-3} - (n-1)_1 (2n-7)_{n-3} + (n-1)_2 (2n-10)_{n-3} - (n-1)_3 (2n-13)_{n-3} + \cdots,$$

also z. B. für $n = 9$:

$$14_6 - 8_1 \,.\, 11_6 + 8_2 \,.\, 8_6 = 91.$$

In derselben Weise, wie für den Strahl habe ich auch für die Ebene und für beliebig-stufige Hauptelemente einen Theil der Grundlagen zur Berechnung der zugehörigen fundamentalen Anzahlen festgestellt. Doch werde ich in der Abhandlung, welche ich zunächst veröffentlichen werde, nicht diese Erweiterung des Inhalts der vorliegenden Abhandlung zeigen, sondern die hier gewonnenen Resultate, namentlich den Inhalt von § 3 und § 4, dazu benutzen, um die Tangentensingularitäten eines in einem $[n]$ liegenden, $(n-1)$-stufigen, punktallgemeinen Raumes *m-ten Grades*, also n-dimensionale Verallgemeinerungen von gewissen vielstudierten Theilen der Flächentheorie, anzahlgeometrisch zu behandeln.

Hamburg, October 1884.