Über die Darstellung der Lehre vom Inhalt in der Integralrechnung.

Von

Erhard Schmidt in Berlin.

Einleitung.

Den Gegenstand dieser Ausführungen bildet eine kleine Schwierigkeit, welche bei der üblichen Darstellung des Volumenbegriffs als Grundlage der Theorie der vielfachen Integrale auftritt. Ich lege dabei das Riemannsche Integral zugrunde, obgleich sich die Bemerkung auch auf das Lebesguesche bezieht. Ebenso beschränke ich mich im Interesse der Durchsichtigkeit auf zwei Dimensionen, doch besitzen alle Ausführungen für n Dimensionen unveränderte Gültigkeit.

Die übliche Definition des äußeren und inneren Inhaltes einer beschränkten Punktmenge P ist bis auf unwesentliche Abweichungen folgende:

Man zerlege die Ebene durch Parallelen zu den Koordinatenachsen in ein Quadratnetz von der Seitenlänge a . Es bezeichne α die Anzahl derjenigen Quadrate, welche überhaupt Punkte von P enthalten, β die Anzahl derjenigen, welche nur aus Punkten von P bestehen. Dann ist zunächst

$$(1) \quad \alpha a^2 \geq \beta a^2.$$

Man definiert nun den äußeren Inhalt $\bar{J}(P)$ als die untere Grenze von αa^2 für alle möglichen derartigen Quadratnetze und den inneren Inhalt $\underline{J}(P)$ als die obere Grenze von βa^2 . Aus (1) ergibt sich dann leicht, daß

$$(2) \quad \bar{J}(P) \geq \underline{J}(P)$$

ist.

Die erwähnte Schwierigkeit besteht nun in dem Nachweis der Unabhängigkeit des so definierten äußeren und inneren Inhaltes von der Wahl des Koordinatensystems, oder mit anderen Worten in dem Nachweis der Inhaltsgleichheit kongruenter Punkt mengen. Dieser Beweis ist leicht,

wenn die einfachsten Tatsachen der elementargeometrischen Lehre vom Inhalt geradlinig begrenzter Figuren vorausgesetzt werden. Es handelt sich dabei insbesondere um den Satz: Wird ein System von β nicht übereinandergreifenden Quadraten mit der Seitenlänge b von einem System von α Quadraten mit der Seitenlänge a überdeckt, so ist $\alpha a^2 \geq \beta b^2$.

Eine saubere Entwicklung der elementargeometrischen Inhaltslehre, insbesondere bei der hier notwendigen Verallgemeinerung auf drei und mehr Dimensionen, dürfte aber die Begründung der Integralrechnung höchst umständlich gestalten — ganz abgesehen von der aus dem Bedürfnis nach Einheitlichkeit erwachsenden Forderung, daß die Begründung der Theorie der vielfachen Integrale gleichzeitig einen independenten Aufbau der Inhaltslehre liefere.

Der zunächst sich darbietende Gedanke, die Invarianz dadurch sicherzustellen, daß der äußere und innere Inhalt von vornherein als untere Grenze von αa^2 und obere Grenze von βa^2 für alle möglichen — also nicht bloß den Koordinatenachsen parallel orientierten — Quadratnetze definiert werden, verschiebt nur die Schwierigkeit auf den nunmehr zu erbringenden Beweis der Ungleichung (2). Dagegen ist diese Ungleichung natürlich eine unmittelbare Konsequenz des obenerwähnten Satzes der elementargeometrischen Inhaltslehre.

Der Schwierigkeit entgeht auch das folgende, von einigen Autoren eingeschlagene elegante Verfahren nicht:

Man leite zunächst bloß den Begriff des Doppelintegrals über ein quadratisches Gebiet her und definiere dann den äußeren und inneren Inhalt der Punktmenge P , indem man sie mit einem Quadrat überdeckt und über dieses das obere und untere Integral derjenigen Funktion bildet, welche für alle Punkte von P gleich Eins und für alle übrigen Punkte gleich Null ist.

Denn nun handelt es sich um den Nachweis der Unabhängigkeit des so definierten Inhaltes von der Wahl des Überdeckungsquadrates.

Um die Schwierigkeit zu überwinden, könnte folgender Weg eingeschlagen werden.

Man definiert den Inhalt vorläufig in bezug auf ein Koordinatensystem xy und leitet auf dieser Grundlage die Theorie der Doppelintegrale her, namentlich ihre Berechnung durch sukzessive Integration nach x und y . Dann läßt sich der zu führende Invarianzbeweis, wie leicht ersichtlich, auf den Nachweis reduzieren, daß der obige in bezug auf das Koordinatensystem xy definierte Inhalt eines beliebig orientierten Quadrates von der Seite 1 gleich 1 ist. Das kann durch effektive Ausrechnung des Doppelintegrals mittels sukzessiver Integration nach x und y

geschehen. Diese Rechnung ist bei zwei Dimensionen leicht durchzuführen, gestaltet sich aber bei steigender Dimensionenzahl höchst lästig.

In der mustergültigen und eleganten Darstellung von Carathéodory in seinen „Vorlesungen über reelle Funktionen“ wird der Inhalt ebenfalls vorläufig in bezug auf ein Koordinatensystem definiert. Der Beweis der Invarianz wird dann geführt, indem durch eine Reihe von einfachen Transformationen unter Heranziehung der Determinantentheorie die bekannte Determinantenformel für den Inhalt eines Parallelepipeds hergeleitet wird. Aus dieser folgt dann, daß der Inhalt eines beliebig orientierten Würfels von der Kante 1 gleich 1 ist.

Ich möchte im folgenden eine, wie mir scheint, sehr einfache unabhängige Darstellung der Inhaltslehre auseinandersetzen, die sich ohne jede Weiterung auf n Dimensionen übertragen läßt.

§ 1.

Elementargeometrische Hilfssätze.

Es mögen β nicht übereinandergreifende Quadrate mit den Seiten $b_1, b_2, \dots, b_\beta$ von einem Quadrat mit der Seite a überdeckt werden. Dann ist

$$(3) \quad a^2 \geq \sum_{r=1}^{\beta} b_r^2.$$

Beweis. Zerlegt man zunächst ein Rechteck durch eine im Innern verlaufende Parallele zu einer Seite, so folgt aus dem distributiven Gesetz der Multiplikation, daß das Seitenprodukt des ganzen Rechtecks gleich der Summe der Seitenprodukte der beiden Teilrechtecke ist. Durch Wiederholung dieses Schlusses ergibt sich leicht, daß, wenn ein Rechteck durch endlich viele im Innern verlaufende Parallelen zu den Seiten in Teilrechtecke zerlegt wird, das Seitenprodukt des ganzen Rechtecks gleich der Summe der Seitenprodukte der Teilrechtecke ist.

Sind nun die gegebenen inneren Quadrate b_r zu dem äußeren Quadrat a parallel gelegen, so ist die zu beweisende Behauptung trivial.

Denn verlängert man die Seiten der inneren Quadrate bis zu ihrem Schnittpunkt mit dem äußeren, so zerfallen sämtliche Quadrate in Teilrechtecke. Gemäß dem eben Ausgeführten wird dabei a^2 gleich der Summe der Seitenprodukte sämtlicher Teilrechtecke, während für jedes innere Quadrat b_r^2 gleich der Summe der Seitenprodukte derjenigen Rechtecke wird, in welche es zerfällt. Da nun keine zwei inneren Quadrate ein Teilrechteck gemein haben, so folgt die zu beweisende Behauptung.

Im allgemeinen Falle konstruiere man in jedem Quadrate b_r ein konzentrisches, zum Quadrat a paralleles Quadrat mit der Seite c_r :

$$(4) \quad c_r = \frac{b_r}{\sqrt{2}}.$$

Da jedes Quadrat c_r vom entsprechenden Quadrat b_r überdeckt wird, so erhält man jetzt β nicht übereinandergreifende Quadrate c_r , welche vom Quadrate a überdeckt werden und diesem parallel sind. Also ist gemäß dem eben Ausgeführten

$$(5) \quad a^2 \geq \sum_1^\beta c_r^2 = \sum_1^\beta \frac{b_r^2}{2}.$$

Bezeichnet man den Quotienten

$$\frac{\sum_1^\beta b_r^2}{\frac{1}{a^2}}$$

als die Verhältniszahl der aus den Quadraten b_r und dem sie überdeckenden Quadrat a gebildeten Figur, so liefert uns also die Ungleichung (5) für die Verhältniszahl die vorläufige obere Schranke 2.

Man betrachte nun wieder die ursprüngliche, aus dem äußeren Quadrate a und den β inneren Quadraten b_r bestehende Figur. Man konstruiere in jedem Quadrate b_r β neue Quadrate mit den Seiten $b_{r,1}, b_{r,2}, \dots, b_{r,\beta}$, so daß die aus dem Quadrate b_r und den Quadraten $b_{r,1}, b_{r,2}, \dots, b_{r,\beta}$ bestehende Figur der ursprünglichen, aus dem Quadrate a und den Quadraten $b_1, b_2, \dots, b_\beta$ gebildeten ähnlich wird. Setzt man nun

$$\frac{\sum_1^\beta b_r^2}{\frac{1}{a^2}} = q,$$

so wird

$$\frac{\sum_1^\beta b_{r,q}^2}{\frac{1}{b_r^2}} = q, \quad \frac{\sum_1^\beta b_{r,q}^2}{\frac{1}{a^2}} = q^2.$$

Da nun die neuen Quadrate $b_{r,q}$ ebenfalls nicht übereinandergreifen und vom Quadrate a überdeckt werden, so liefert die letzte Gleichung das Ergebnis, daß zu jeder den Voraussetzungen des Satzes I genügenden Figur mit der Verhältniszahl q eine denselben Voraussetzungen genügende Figur mit der Verhältniszahl q^2 konstruiert werden kann.

Wiederholt man diese Konstruktion k mal, so erhält man eine den Voraussetzungen des Satzes I genügende Figur mit der Verhältniszahl q^{2^k}

Da, wie oben bewiesen, 2 eine obere Schranke für die Verhältniszahlen bildet, so ist also

$$q^{2^k} \leq 2.$$

Da endlich diese Ungleichung für beliebig große Werte von k gilt, so folgt

$$q \leq 1,$$

w. z. b. w.

Der Beweis dieses Satzes für m Dimensionen ist offenbar genau derselbe, nur daß die Gleichung (4)

$$c_r = \frac{b_r}{\sqrt{m}}$$

lauten muß, und dementsprechend als vorläufige obere Schranke sich statt der Zahl 2 die Zahl $(\sqrt{m})^m$ ergibt.

Wir verallgemeinern diesen Satz zum Satze

II. Es mögen β nicht übereinandergreifende Quadrate mit den Seiten $b_1, b_2, \dots, b_\beta$ von der Gesamtheit von α Quadraten mit den Seiten $a_1, a_2, \dots, a_\alpha$ überdeckt werden. Letztere Quadrate dürfen also auch insbesondere übereinandergreifen. Dann ist

$$(6) \quad \sum_{\mu}^{\alpha} a_{\mu}^2 \geq \sum_{r}^{\beta} b_r^2.$$

Beweis. Wird jedes Quadrat b_r von mindestens einem Quadrate a_{μ} völlig überdeckt, so ist die Behauptung trivial. Denn sie ergibt sich durch Anwendung des Satzes I auf jedes Quadrat a_{μ} und die von ihm völlig überdeckten Quadrate b_r , a fortiori.

Im allgemeinen Falle konstruiere man um jedes Quadrat a_{μ} ein konzentrisches, paralleles mit der Seite $a'_{\mu} = a_{\mu} + 2\delta$. Man zerlege ferner jedes Quadrat b_r durch Parallelen zu den Seiten in k_r^2 Teilquadrate mit den Seiten $\frac{b_r}{k_r}$, wo k_r so groß gewählt wird, daß die Diagonalen dieser Teilquadrate kleiner als δ werden. Dann wird jedes Teilquadrat von mindestens einem Quadrat a'_{μ} völlig überdeckt. Denn, da es von der Gesamtheit der Quadrate a_{μ} überdeckt wird, muß es mit mindestens einem dieser, etwa a_{μ_0} , einen Punkt gemein haben. Von dem konzentrischen Quadrat a'_{μ_0} wird es dann völlig überdeckt.

Gemäß der Bemerkung am Anfang dieses Beweises ist daher

$$\sum_{\mu}^{\alpha} a'_{\mu}{}^2 \geq \sum_{r}^{\beta} k_r^2 \left(\frac{b_r}{k_r}\right)^2 = \sum_{r}^{\beta} b_r^2.$$

Läßt man jetzt δ verschwinden, so ergibt sich die zu beweisende Ungleichung (6).

Der Beweis dieses Satzes für m Dimensionen ist offenbar genau derselbe.

§ 2.

Die Definition des Inhaltes ¹⁾.

Es sei in der Ebene eine beschränkte Punktmenge P gegeben.

Es seien $a_1, a_2, \dots, a_n$ die Seiten eines beliebigen P überdeckenden endlichen Systems von Quadraten, die also insbesondere auch übereinandergreifen dürfen. Unter dem äußeren Inhalt $\bar{J}(P)$ der Punktmenge verstehen wir die untere Grenze der Summe

$$(7) \quad \sum_1^n a_n^2$$

für die Gesamtheit aller solcher Systeme.

Es seien $b_1, b_2, \dots, b_\beta$ die Seiten eines beliebigen von P überdeckten endlichen Systems nicht übereinandergreifender Quadrate. Unter dem inneren Inhalt $\underline{J}(P)$ der Punktmenge verstehen wir die obere Grenze der Summe

$$(8) \quad \sum_1^\beta b_\nu^2$$

für die Gesamtheit aller solcher Systeme.

Ist der äußere Inhalt gleich dem inneren, so sagt man, die Punktmenge hat einen bestimmten Inhalt und bezeichnet ihn mit $J(P)$.

III. Da jedes System (8) von jedem System (7) überdeckt wird, so folgt aus II

$$(9) \quad \bar{J}(P) \geq \underline{J}(P).$$

Ferner ergeben sich aus der Definition unmittelbar folgende Tatsachen:

IV. Kongruente Punktmen gen haben miteinander einen gleichen äußeren und inneren Inhalt.

V. Ist die Punktmenge Q in P enthalten, so ist

$$(10) \quad \bar{J}(Q) \leq \bar{J}(P),$$

$$(11) \quad \underline{J}(Q) \leq \underline{J}(P).$$

VI. Unter der Vereinigungsmenge der Punktmen gen $P_1, P_2, \dots, P_n$ verstehe man die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche einer der Punkt-

¹⁾ Die in diesem und in den folgenden Paragraphen auseinandergesetzten Definitionen und Sätze sind natürlich sämtlich bekannt. Ich muß sie nur mit ihren Beweisen wiedergeben, um zu zeigen, wie sich der Aufbau der Inhaltslehre auf Grund der Hilfssätze des § 1 durchführen läßt.

mengen P_r angehören. Man bezeichne sie mit $\sum_1^n P_r$ und setze, wie in diesen Ausführungen durchweg geschieht, voraus, daß die Punktmengen P_r beschränkt sind. Dann ergibt sich aus der Definition des äußeren Inhaltes unmittelbar:

$$(12) \quad \bar{J} \sum_1^n P_r \leq \sum_1^n \bar{J}(P_r).$$

Man verstehe unter einem inneren Punkt einer Punktmenge einen solchen Punkt, um welchen als Zentrum sich ein Kreis beschreiben läßt, dessen Inneres nur aus Punkten der Punktmenge besteht. Dann ergibt sich aus der Definition des inneren Inhaltes unmittelbar:

Haben keine zwei der beschränkten Punktmengen $P_1, P_2, \dots, P_n$ einen inneren Punkt gemein, so ist

$$(13) \quad \underline{J} \sum_1^n P_r \geq \sum_1^n \underline{J}(P_r).$$

Es mögen endlich noch die Punktmengen P_r einen bestimmten Inhalt haben, d. h. die Gleichungen bestehen:

$$(14) \quad \bar{J}(P_r) = \underline{J}(P_r) = J(P_r) \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

Dann folgt aus (9), (12), (13), (14), daß auch die Vereinigungsmenge einen bestimmten Inhalt hat, und daß

$$(15) \quad J \sum_1^n P_r = \sum_1^n J(P_r)$$

ist.

VII. Bezeichnet R ein Rechteck mit den Seiten p und q , so ist

$$(16) \quad \bar{J}(R) = \underline{J}(R) = J(R) = p \cdot q.$$

Beweis. Man wähle $q' > q$ und zu p kommensurabel. Es sei also

$$\frac{p}{r'} = \frac{q'}{s'},$$

wo r' und s' ganze Zahlen bedeuten. Man zerlege das verlängerte Rechteck mit den Seiten p und q' durch Parallelen zu den Seiten in $r' \cdot s'$ Teilquadrate mit der Seite $\frac{p}{r'} = \frac{q'}{s'}$. Dann bilden diese Teilquadrate ein R überdeckendes Quadratsystem (7). Mithin ist

$$(17) \quad \bar{J}(R) \leq r' \cdot s' \cdot \left(\frac{p}{r'}\right)^2 = p \cdot q'.$$

Man wähle ferner $q'' < q$ und zu p kommensurabel. Es sei also

$$\frac{p}{r''} = \frac{q''}{s''},$$

wo r'' und s'' ganze Zahlen bedeuten. Man zerlege das verkürzte Rechteck mit den Seiten p und q'' durch Parallelen zu den Seiten in $r'' \cdot s'$ Teilquadrate mit der Seite $\frac{p}{r''} = \frac{q''}{s''}$. Dann bilden diese Teilquadrate ein von R überdecktes nicht übereinandergreifendes Quadratsystem (8). Mit hin ist

$$(18) \quad \underline{J}(R) \geq r'' \cdot s'' \cdot \left(\frac{p}{r''}\right)^2 = p q''.$$

Aus (9), (17), (18) folgt

$$p q' \geq J(R) \geq \underline{J}(R) \geq p q''.$$

Da man nun q' und q'' beliebig nahe an q wählen kann, so ergibt sich hieraus die Gleichung (16), w. z. b. w.

Alle diese Definitionen, Sätze und Beweise bleiben offenbar bei der Verallgemeinerung auf beliebig viele Dimensionen *mutatis mutandis* ohne jede Weiterung bestehen. Handelt es sich etwa um den im dreidimensionalen Raume dem letzten Theorem entsprechenden Satz, daß ein rechtwinkliges Parallelepipeton mit den Kanten $p q l$ einen bestimmten, dem Produkt der drei Kanten gleichen Inhalt hat, so müssen beim Beweise natürlich die Größen $q' l' q'' l''$ so gewählt werden, daß sie zu p kommensurabel sind und den Ungleichungen genügen:

$$q' \geq q \geq q'', \quad l' \geq l \geq l''.$$

Dann lassen sich die ganzen Zahlen $r' s' t' r'' s'' t''$ so bestimmen, daß die Gleichungen

$$\frac{p}{r'} = \frac{q'}{s'} = \frac{l'}{t'}, \quad \frac{p}{r''} = \frac{q''}{s''} = \frac{l''}{t''}$$

gelten. Sonst verläuft der Beweis genau wie im zweidimensionalen Falle.

VIII. Es bezeichne $\{P\}_\varepsilon$ die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche von Punkten der beschränkten Punktmenge P um weniger als ε entfernt sind. Dann ist

$$(19) \quad \lim_{\varepsilon=0} J\{P\}_\varepsilon = J(P),$$

$$(20) \quad \lim_{\varepsilon=0} \underline{J}\{P\}_\varepsilon = \underline{J}(P).$$

Beweis. Zunächst ist offenbar P in $\{P\}_\varepsilon$ enthalten, und, wenn $\varepsilon' < \varepsilon$ ist, auch $\{P\}_{\varepsilon'}$ in $\{P\}_\varepsilon$. Also nimmt gemäß V $\underline{J}\{P\}_\varepsilon$ mit fallendem ε nicht zu, und es ist

$$(21) \quad \lim_{\varepsilon=0} \bar{J}\{P\}_\varepsilon \geq \bar{J}(P),$$

wo der Grenzwert auf der linken Seite jedenfalls existiert.

Es seien nun $a_1, a_2, \dots, a_n$ die Seiten eines P überdeckenden Quadrat-systems. Man konstruiere um jedes dieser Quadrate a_μ ein konzentrisches paralleles mit der Seite $a'_\mu > a_\mu$. Für

$$\varepsilon < \frac{a'_\mu - a_\mu}{2} \quad (\mu = 1, 2, \dots, n)$$

wird dann $\{P\}_\varepsilon$ offenbar vom System der Quadrate a'_μ überdeckt. Mit-hin ist dann gemäß der Definitionseigenschaft des äußeren Inhaltes

$$J\{P\}_\varepsilon \leq \sum_{\mu=1}^n a'^2_\mu.$$

Also ist

$$\lim_{\varepsilon=0} J\{P\}_\varepsilon \leq \sum_{\mu=1}^n a'^2_\mu,$$

und da diese Ungleichung für beliebige $a'_\mu > a_\mu$ gilt,

$$\lim_{\varepsilon=0} \bar{J}\{P\}_\varepsilon \leq \sum_{\mu=1}^n a^2_\mu.$$

Da endlich die letzte Ungleichung für jedes P überdeckendes Quadrat-system mit den Seiten a_μ zutrifft, so ergibt sich aus der Definitionseigen-schaft des äußeren Inhaltes

$$\lim_{\varepsilon=0} \bar{J}\{P\}_\varepsilon \leq \bar{J}(P),$$

woraus in Verbindung mit (21) die zu beweisende Gleichung (19) folgt.

Die Gleichung (20) folgt aus (19) a fortiori, wenn noch die Ungleichung

$$(22) \quad J\{P\}_\varepsilon \geq \bar{J}(P)$$

herangezogen wird, die sich folgendermaßen ergibt.

Man überdecke die Ebene mit einem Quadratnetz, dessen Diagonalen $< \varepsilon$ sind. Es bedeute c die Seitenlänge der Quadrate und n die Anzahl derjenigen Quadrate, welche Punkte von P enthalten. Dann überdeckt letzteres System P und wird seinerseits von $\{P\}_\varepsilon$ überdeckt. Also ist gemäß der Definitionseigenschaft des äußeren und inneren Inhaltes

$$nc^2 \geq \bar{J}(P), \quad nc^2 \leq J\{P\}_\varepsilon,$$

woraus die allein noch zu beweisende Ungleichung (22) folgt.

IX. Man bezeichne als Komplementärmenge $\bar{P}$ der Punktmenge P die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche nicht zu P gehören. Als Be-

randung von P definiere man die Gesamtheit G derjenigen Punkte, welche weder innere Punkte von P noch innere Punkte von $\bar{P}$ sind. Über die Zugehörigkeit der Randpunkte G zur Punktmenge P wird keine Voraussetzung gemacht.

Da ein Häufungspunkt von G weder innerer Punkt von P noch innerer Punkt von $\bar{P}$ sein kann, so muß jeder Häufungspunkt von G zu G gehören, d. h. die Berandung G ist eine abgeschlossene Punktmenge.

X. Gehört der Punkt A zur Punktmenge P und der Punkt A' nicht, so liegt auf der Strecke AA' mindestens ein Punkt der Berandung.

Denn ist ϱ die untere Grenze der Entfernungen des Punktes A von den auf der Strecke AA' gelegenen, nicht zu P gehörigen Punkten, so gehört der auf der Strecke AA' in der Entfernung ϱ von A liegende Punkt offenbar G an.

Hieraus ergibt sich leicht die folgende Verallgemeinerung.

Sind der zu P gehörige Punkt A und der nicht zu P gehörige Punkt A' durch einen Streckenzug mit den Ecken $BCDEF\dots$ verbunden, so liegt auch auf diesem mindestens ein Punkt der Berandung. Denn ist etwa F die erste nicht zu P gehörige Ecke, so gehört die vorhergehende Ecke E zu P , und es muß daher, wie eben gezeigt, auf der Strecke EF mindestens ein Punkt der Berandung liegen.

XI. Es bezeichne $[P]_\varepsilon$ die Gesamtheit derjenigen Punkte der beschränkten Punktmenge P , welche von jedem Punkte der Berandung G um mindestens ε entfernt sind. Dann ist

$$(23) \quad \lim_{\varepsilon=0} \underline{J}[P]_\varepsilon = \underline{J}(P),$$

$$(24) \quad \lim_{\varepsilon=0} \bar{J}[P]_\varepsilon = \bar{J}(P).$$

Beweis. Zunächst ist offenbar $[P]_\varepsilon$ in P enthalten, und für $\varepsilon' < \varepsilon$ auch $[P]_{\varepsilon'}$ in $[P]_\varepsilon$. Gemäß V nimmt also $\underline{J}[P]_\varepsilon$ mit fallendem ε nicht ab, und es ist

$$(25) \quad \lim_{\varepsilon=0} \underline{J}[P]_\varepsilon \leq \underline{J}(P),$$

wo der Grenzwert auf der linken Seite jedenfalls existiert.

Es seien nun $b_1, b_2, \dots, b_\beta$ die Seiten eines von P überdeckten nicht übereinandergreifenden Quadratsystems. Man konstruiere in jedem Quadrate b_r ein konzentrisches paralleles mit der Seite $b'_r < b_r$. Für

$$\varepsilon < \frac{b_r - b'_r}{2} \quad (r = 1, 2, \dots, \beta)$$

wird dann das nicht übereinandergreifende Quadratsystem b'_r offenbar von

$[P]_\varepsilon$ überdeckt. Mithin ist dann gemäß der Definitionseigenschaft des inneren Inhaltes

$$\underline{J}[P]_\varepsilon \geq \sum_{r=1}^{\beta} b_r'^2.$$

Also ist

$$\lim_{\varepsilon=0} \underline{J}[P]_\varepsilon \geq \sum_{r=1}^{\beta} b_r'^2,$$

und da diese Ungleichung für beliebige $b_r' < b_r$ gilt,

$$\lim_{\varepsilon=0} \underline{J}[P]_\varepsilon \geq \sum_{r=1}^{\beta} b_r^2.$$

Da endlich die letzte Ungleichung für jedes von P überdeckte System nicht übereinandergreifender Quadrate b_r zutrifft, so ergibt sich aus der Definitionseigenschaft des inneren Inhaltes

$$\lim_{\varepsilon=0} \underline{J}[P]_\varepsilon \geq \underline{J}(P),$$

woraus in Verbindung mit (25) die zu beweisende Gleichung (23) folgt.

Die Gleichung (24) folgt aus (23) a fortiori, wenn noch die Ungleichung

$$(26) \quad \bar{J}[P]_\varepsilon \leq \bar{J}(P)$$

herausgezogen wird, die sich folgendermaßen ergibt.

Man überdecke die Ebene mit einem Quadratnetz, dessen Diagonalen $< \varepsilon$ sind. Es bedeute c die Seitenlänge der Quadrate und n die Anzahl derjenigen Quadrate, welche Punkte von $[P]$ enthalten. Da nun keines dieser Quadrate Punkte von G enthalten kann, so muß wegen X jedes nur aus Punkten von P bestehen. Also ist gemäß der Definitionseigenschaft des äußeren und inneren Inhaltes $\bar{J}[P]_\varepsilon \leq n c^2$, $\underline{J}(P) \geq n c^2$, woraus die allein noch zu beweisende Ungleichung (26) folgt.

XII. Es bezeichne wie oben P eine beschränkte Punktmenge und G ihre Berandung, wobei darüber, inwieweit die Punkte von G der Punktmenge P angehören oder nicht, keine Voraussetzung gemacht werde. Dann ist

$$(27) \quad J(P) = \underline{J}(P) + \bar{J}(G).$$

Beweis. Aus der Definition folgt zunächst unmittelbar, daß $[P]_\varepsilon$ und $\{G\}_\varepsilon$ keinen gemeinsamen Punkt haben.

Es ist ferner

$$(28) \quad [P]_\varepsilon + \{G\}_\varepsilon = \{P\}_\varepsilon.$$

Denn daß jeder Punkt einer der beiden Punktmengen auf der linken Seite, auch der Punktmenge auf der rechten Seite angehört, leuchtet unmittelbar ein. Andererseits gehört jeder Punkt von P offenbar zu $[P]_e$ oder $\{G\}_e$. Um einzusehen, daß dasselbe auch für jeden Punkt A von $\{P\}_e$ gilt, bleibt also nur noch der Fall zu erledigen, daß A nicht zu P gehört. Dann gibt es aber in P einen Punkt B , von dem A um weniger als ε entfernt ist. Also muß gemäß X auf der Strecke AB ein Punkt von G liegen, der von A um weniger als ε entfernt ist, und mithin muß A zu $\{G\}_e$ gehören.

Aus (28) folgt gemäß (12), (13)

$$\begin{aligned} \bar{J}\{P\}_e &\leq \bar{J}[P]_e + \bar{J}\{G\}_e, \\ \underline{J}\{P\}_e &\geq \underline{J}[P]_e + \underline{J}\{G\}_e. \end{aligned}$$

Läßt man in diesen Gleichungen ε verschwinden, so ergibt sich aus (19), (20), (23), (24) die zu beweisende Gleichung (27).

XIII. Es seien endlich viele beschränkte Punktmengen $P_1, P_2, \dots, P_n$ gegeben. Man bezeichne mit S ihre Vereinigungsmenge und mit D ihren Durchschnitt, d. h. die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche allen Punktmengen $P_1, P_2, \dots, P_n$ gemein sind.

Hat dann jede der Punktmengen P_i einen bestimmten Inhalt, so gilt dasselbe auch von ihrem Durchschnitt D und von ihrer Vereinigungsmenge S .

Beweis. Man bezeichne mit $\bar{P}_i, D, \bar{S}$ die Komplementärmengen und mit G_i, G_D, G_S die Berandungen der Punktmengen P_i, D, S .

Ist nun A ein Punkt von G_D , so kann A nicht innerer Punkt von sämtlichen P_i sein, weil sonst A auch innerer Punkt von D sein müßte. Es sei also etwa $\bar{P}_e$ eine Punktmenge, zu deren inneren Punkten A nicht gehört. A kann aber auch nicht innerer Punkt von $\bar{P}_e$ sein, weil A sonst offenbar auch innerer Punkt von D sein müßte. Also muß A zu G_e gehören. Damit ist also gezeigt, daß G_D in der Vereinigungsmenge

$\sum_{i=1}^n G_i$ enthalten ist. Hieraus folgt gemäß (12)

$$J(G_D) \leq \sum_{i=1}^n J(G_i).$$

Auf Grund der Voraussetzung, daß jede der Punktmengen P_i einen bestimmten Inhalt hat, verschwinden nun gemäß Satz XII sämtliche Summanden $J(G_i)$. Daraus folgt das Verschwinden von $J(G_D)$ und damit wieder gemäß Satz XII die zu beweisende Behauptung über den Durchschnitt D .

Ist andererseits A ein Punkt von G_S , so kann A nicht innerer Punkt von sämtlichen $\bar{P}_r$ sein, weil sonst A auch innerer Punkt von $\bar{S}$ sein müßte. Es sei also $\bar{P}_q$ eine der Komplementärpunktmenge, zu deren inneren Punkten A nicht gehört. A kann aber auch nicht innerer Punkt von P_q sein, weil A sonst offenbar auch innerer Punkt von S sein müßte. Also muß A zu G_q gehören. Damit ist also gezeigt, daß G_S in der Vereinigungsmenge $\sum_1^n G_r$ enthalten ist, woraus wie oben die zu beweisende Behauptung über S folgt.

XIV. Ist Q eine beschränkte auf einer Geraden gelegene Punktmenge, so läßt sich Q in ein Rechteck von beliebig kleinem Seitenprodukt einbetten. Wegen V und VII ist dann also

$$\bar{J}(Q) = 0.$$

Dasselbe gilt wegen (12) auch für jede auf einer endlichen Anzahl von Geraden verteilte beschränkte Punktmenge Q .

XV. Aus dem letzten Satz in Verbindung mit XII folgt: Jede beschränkte Punktmenge, deren Berandung auf einer endlichen Anzahl von Geraden liegt, hat einen bestimmten Inhalt.

Alle diese Sätze und Beweise bleiben bei der Verallgemeinerung auf beliebig viele Dimensionen ohne jede Weiterung mutatis mutandis bestehen. So heißt der letzte Satz für den Raum:

XVI. Jede beschränkte Punktmenge im Raum, deren Berandung auf einer endlichen Anzahl von Ebenen liegt, hat einen bestimmten Inhalt.

XVII. Nunmehr soll ein Satz hergeleitet werden, der zur Berechnung des äußeren und inneren Inhaltes einer beschränkten Punktmenge P oft angewendet wird.

Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß folgendes erfüllt ist:

Es sei ein System von endlich vielen Punktmenge $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ gegeben, das den nachstehenden Bedingungen genügt.

a) In jeder Punktmenge σ_r ist die obere Grenze der Entfernungen irgend zweier Punkte $< \varepsilon$.

b) Die Punktmenge P wird von der Vereinigungsmenge $\sum_1^n \sigma_r$ überdeckt.

c) Jede Punktmenge σ_r enthält mindestens einen Punkt von P .

d) Keine zwei verschiedenen Punktmenge σ_r haben einen inneren Punkt gemein.

e) Jede der Punktmenge σ_r hat einen bestimmten Inhalt.

Dann ist

$$(29) \quad \delta \geq \sum_1^{\alpha} J(\sigma_r) - J(P) \geq 0,$$

$$(30) \quad \delta \geq \underline{J}(P) - \sum_r' J(\sigma_r) \geq 0,$$

wo die zweite Summe nur über alle diejenigen σ_r zu erstrecken ist, welche aus Punkten von P bestehen.

Beweis. Aus d) und e) folgt zunächst wegen VI (14)

$$(31) \quad \underline{J} \sum_1^{\alpha} \sigma_r = \underline{J} \sum_1^{\alpha} \sigma_r = \sum_1^{\alpha} J(\sigma_r),$$

$$(32) \quad \underline{J} \sum_r' \sigma_r = \underline{J} \sum_r' \sigma_r = \sum_r' J(\sigma_r).$$

Nun ist wegen b) und V

$$\bar{J} \sum_1^{\alpha} \sigma_r \geq \bar{J}(P).$$

Andererseits wird wegen c) und a) $\sum_1^{\alpha} \sigma_r$ von $\{P\}_r$ überdeckt. Es ist daher wegen V

$$\bar{J} \sum_1^{\alpha} \sigma_r \leq \bar{J}\{P\}_r.$$

Aus den beiden letzten Ungleichungen und (31) ergibt sich

$$\bar{J}\{P\}_r \geq \sum_1^{\alpha} J(\sigma_r) \geq \bar{J}(P),$$

woraus wegen (19) die zu beweisende Ungleichung (29) folgt.

Da ferner $\sum_r' \sigma_r$ von P überdeckt wird, so ist

$$\underline{J} \sum_r' \sigma_r \leq \underline{J}(P).$$

Endlich muß jeder Punkt A von $[P]_r$ wegen b) in mindestens einer Punktmenge σ_e vorkommen. Wegen a) und der Definitionseigenschaft von $[P]_r$ kann dann die Punktmenge σ_e keinen Punkt von G enthalten. Die Punktmenge σ_e muß mithin, da sie den zu P gehörigen Punkt A enthält, wegen X nur aus Punkten von P bestehen, d. h. in $\sum_r' \sigma_r$ vorkommen. Also wird $[P]_r$ von $\sum_r' \sigma_r$ überdeckt, und es ist wegen V

$$\underline{J} \sum_r' \sigma_r \geq \underline{J}[P]_r.$$

Aus den beiden letzten Ungleichungen und (32) ergibt sich

$$\underline{J}(P) \geq \sum_r' J(\sigma_r) \geq \underline{J}[P],$$

woraus wegen (23) die zu beweisende Ungleichung (30) folgt.

§ 3.

Bestimmung des Inhaltes einiger Elementarfiguren.

Bei den nachfolgenden Sätzen tritt die Schlußweise klarer hervor, wenn statt der Ebene der Raum zugrunde gelegt wird. Sie gelten natürlich wie alles Bisherige ohne jede Weiterung für beliebig viele Dimensionen.

XVIII. Es sei L eine in einer Ebene gelegene beschränkte Punktmenge. Man trage in jedem Punkte von L in einer festen nicht in die Tragebene von L fallenden Richtung die Strecke l ab. Die aus allen Punkten dieser Strecken bestehende räumliche Punktmenge heiße eine „Säule“, L — ihre Basis, die Länge des vom Endpunkt einer der Strecken l auf die Basisebene gefällten Lotes — ihre Höhe.

Es sei nun eine senkrechte Säule S mit der Basis L und der Höhe h gegeben. Es mögen $\bar{J}_2(L)$ und $\underline{J}_2(L)$ den ebenen äußeren und inneren Inhalt von L , $\bar{J}_3(S)$ und $\underline{J}_3(S)$ den räumlichen äußeren und inneren Inhalt von S bezeichnen. Dann ist

$$(33) \quad \bar{J}_3(S) = h \cdot \bar{J}_2(L),$$

$$(34) \quad \underline{J}_3(S) = h \cdot \underline{J}_2(L).$$

Beweis. Man zerlege den Raum zwischen der Basisebene und der in der Entfernung h über ihr ausgebreiteten Parallelebene durch drei zueinander orthogonale Scharen äquidistanter Parallelebenen in ein Würfelnetz mit der Kante $\frac{h}{n}$, so daß die Basisebene und die eben genannte Parallelebene die unterste und oberste Ebene der einen Schar von Zerlegungsebenen werden.

Nun wende man zur Berechnung von $\bar{J}_2(L)$ und $\underline{J}_2(L)$ den Satz XVII an, indem man als Punktmenge σ , diejenigen Würfelgrundflächen wähle, welche in die Basisebene fallen und Punkte von L enthalten. Ihre Anzahl sei N , während N' die Anzahl derjenigen von ihnen sei, welche nur aus Punkten von L bestehen. Dann ergibt sich

$$(35) \quad \bar{J}_2(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} N \left(\frac{h}{n} \right)^2,$$

$$(36) \quad \underline{J}_2(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} N' \left(\frac{h}{n} \right)^2.$$

Zur Berechnung von $\bar{J}_s(S)$ und $\underline{J}_s(S)$ wende man ebenfalls den Satz XVII an, indem man als Punktmengen σ , diejenigen Netzwürfel wähle, deren senkrechte Projektionen auf die Basisebene Punkte von L enthalten. Ihre Anzahl ist offenbar nN , während die Anzahl derjenigen von ihnen, welche nur aus Punkten von S bestehen, nN' ist. Es ergibt sich also

$$(37) \quad \bar{J}_s(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} nN \left(\frac{h}{n}\right)^3,$$

$$(38) \quad \underline{J}_s(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} nN' \left(\frac{h}{n}\right)^3.$$

Aus (35) und (37) folgt unmittelbar die zu beweisende Gleichung (33) und aus (36) und (38) die zu beweisende Gleichung (34).

XIX. Da man ein Parallelogramm durch Hinzufügen und Wegnehmen kongruenter Dreiecke in ein Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe verwandeln kann, so folgt gemäß XV, (15), (16), daß der Inhalt eines Parallelogramms gleich dem Produkt aus Grundlinie und Höhe ist.

XX. Da man ein Parallelepipedon, dessen eine Kante rechtwinklig zu den beiden anderen steht, als rechtwinklige Säule über einem Parallelogramm betrachten kann, so folgt aus den beiden vorigen Sätzen, daß das Volumen eines solchen Parallelepipedons gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe ist, wobei nachträglich jede der Begrenzungsflächen als Grundfläche gewählt werden kann.

XXI²⁾. Es sei P eine beschränkte Punktmenge im Raum, E eine Ebene, l eine gerichtete Gerade in E . Man verschiebe jeden Punkt des Raumes in der Richtung von l um $k \cdot d$, wo k eine Konstante und d die Entfernung des Punktes von der Ebene E bedeutet. Dabei gehe P in P' über. Dann ist

$$\bar{J}(P) = \bar{J}(P'), \quad \underline{J}(P) = \underline{J}(P').$$

Beweis. Man zerlege den Raum in ein Würfelnetz, dessen Kanten der Geraden l , der Senkrechten auf ihr in der Ebene E und dem Lot auf der Ebene E parallel sind. Bei der Transformation geht dieses Netz in ein Netz von Parallelepipeden über, deren eine Kante senkrecht auf den beiden anderen steht, und deren Volumen daher gemäß dem vorigen Satz gleich dem Volumen der entsprechenden Würfel ist.

Berechnet man nun den äußeren und inneren Inhalt von P mit Hilfe des Satzes XVII, indem als σ , Netzwürfel gewählt werden, und den äußeren und inneren Inhalt von P' , indem als σ , die entsprechenden Netzparallel-

²⁾ Diesen Transformationssatz in Verbindung mit dem Transformationssatz XXIII legt Carathéodory dem Aufbau der Inhaltslehre in seinen „Vorlesungen über reelle Funktionen“ zugrunde.

epipeda gewählt werden, so ergibt sich unmittelbar die zu beweisende Behauptung.

XXII. Da eine schiefe Säule aus einer senkrechten mit derselben Grundfläche und gleicher Höhe durch eine Transformation von der im vorigen Satz definierten Art erzeugt werden kann, so folgt aus diesem Theorem, daß das äußere und innere Volumen einer schiefen Säule gleich dem Produkt aus der Höhe und dem äußeren resp. inneren Inhalt der Grundfläche sind.

Insbesondere ist also auch das Volumen eines beliebigen Parallelepipeds gleich dem Produkt aus Höhe und Grundfläche.

XXIII. Es sei P eine beschränkte Punktmenge im Raume und E eine Ebene. Man verschiebe jeden Punkt des Raumes auf der durch ihn gehenden Senkrechten zur Ebene E in die k -fache Entfernung von E , wo k eine Konstante bedeutet. Dabei gehe P in P' über. Dann ist

$$\bar{J}(P') = k \cdot \bar{J}(P), \quad \underline{J}(P') = k \cdot \underline{J}(P).$$

Beweis. Man zerlege den Raum in ein Würfelnetz, dessen eine Ebenenschar parallel zur Ebene E ist. Bei der Transformation geht das Würfelnetz in ein Netz rechtwinkliger Parallelepipeda über, deren Volumen gemäß (16) gleich dem k -fachen Volumen der entsprechenden Würfel ist. Daraus folgt wie beim Beweise von XXI unter Anwendung des Satzes XVII die zu beweisende Behauptung.

XXIV. Aus dem vorigen Satze folgt leicht, daß, wenn die Punktmenge Q aus der Punktmenge P durch eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Vergrößerungsverhältnis k hervorgeht,

$$\bar{J}(Q) = k^3 \bar{J}(P), \quad \underline{J}(Q) = k^3 \underline{J}(P)$$

ist.

XXV. Es sei die „Pyramide“ P gegeben, die man durch Verbindung eines Raumpunktes, der Spitze, mit allen Punkten einer beschränkten ebenen Punktmenge L , der Basis, erhält. h sei die Höhe der Pyramide. Dann ist

$$\bar{J}_3(P) = \frac{h \cdot \bar{J}_2(L)}{3}, \quad \underline{J}_3(P) = \frac{h \cdot \underline{J}_2(L)}{3}.$$

Beweis. Zerlegt man einen Würfel mit der Kante a vom Mittelpunkt aus in sechs kongruente Pyramiden mit der Grundfläche a^2 und der Höhe $\frac{a}{2}$, so folgt aus XVI, IV und (15), daß das Volumen jeder einzelnen Pyramide gleich

$$(39) \quad \frac{a^3}{6} = \frac{\frac{a}{2} a^2}{3}$$

ist. Durch die Transformation XXI läßt sich nun jede Pyramide, deren Grundfläche ein Quadrat mit der Seite a ist, in eine Pyramide mit demselben Quadrat als Grundfläche und von gleicher Höhe verwandeln, deren Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche liegt. Durch die Transformation XXIII läßt sich dann die Spitze auf der Mittelsenkrechten in die Entfernung $\frac{a}{2}$ von der Grundfläche rücken. Also folgt aus XXI, XXIII und (39), daß das Volumen einer Pyramide mit der Höhe h und dem Quadrate a^2 als Grundfläche gleich $\frac{h a^2}{3}$ ist.

Man zerlege nunmehr die Tragebene von L in ein Quadratnetz mit der Seite a und verbinde alle Quadrate mit der Spitze der Pyramide. Die so entstehenden Pyramiden haben das Volumen $\frac{h \cdot a^2}{3}$, lassen sich aber bei der Anwendung des Satzes XVII noch nicht als Punktmengen σ , benutzen, da sie nicht in allen Erstreckungen mit a verschwinden. Um das zu erreichen, durchschneide man sie mit einer Schar von Parallelebenen zur Tragebene von L . Dann erhält man bei Berücksichtigung von XVI und (15) auf Grund von (29) und (30) leicht

$$J_3(P) = \lim_{a=0} \frac{h}{3} \sum a^2, \quad J_3(P) = \lim_{a=0} \frac{h}{3} \sum' a^2,$$

wo die erste Summe über alle Quadrate zu erstrecken ist, die Punkte von L enthalten, die zweite über alle, die nur aus Punkten von L bestehen. Aus dieser Gleichung folgt die zu beweisende Behauptung.

§ 4.

Das mehrfache Integral.

Die Entwicklung des Begriffes des mehrfachen Integrals läßt sich auf diesem Standpunkt etwa folgendermaßen bequem durchführen.

Es sei die beschränkte Funktion $f(xy)$ in der beschränkten Punktmenge L der xy -Ebene definiert. L habe einen bestimmten Inhalt und es sei zunächst

$$(40) \quad f(xy) \geq 0.$$

Man trage auf jedem Punkte von L die Strecke $f(xy)$ in der Richtung der positiven Z -Achse auf und bezeichne die aus allen Punkten dieser Strecken bestehende Punktmenge mit P . Dann definiere man das obere und untere Darboux'sche Integral von $f(xy)$ über L durch den äußeren und inneren Inhalt von P .

Ist die Bedingung (40) nicht erfüllt, so wähle man die Konstante c so, daß

$$f_c(xy) = c + f(xy) \geq 0$$

wird und definiere wie oben die Punktmenge P_c für die Funktion $f_c(xy)$. Dann sind das obere und das untere Integral von $f(xy)$ über L durch die Differenzen

$$J_3(P_c) - cJ_2(L), \quad J_3(P_c) - cJ_2(L)$$

zu definieren, und es ergibt sich aus (33), (34) leicht, daß diese Differenzen von der Wahl von c unabhängig sind.

Berlin, den 12. Oktober 1921.

(Eingegangen am 13. Oktober 1921.)