Astronomische Nachrichten.

Expedition auf der Königlichen Sternwarte bei Kiel.

Herausgeber: Prof. Dr. C. A. F. Peters.

Band 91.

Nr. 2173

13.

Ueber die Bewegung eines Punktes, welcher von einem abgeplatteten Rotationsellipsoid angezogen wird.

In den letzten Nummern der Astron. Nachr. hat Herr Weiler diese Aufgabe einer neuen Bearbeitung unterzogen und ist dabei zu höchst überraschenden Resultaten über die Säcularänderung der mittleren Länge des Mondes gelangt. Bekanntlich hat aber Hansen in seinem grossen Werke über die theoretische Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen den Einfluss der Figur der Erde auf die Bewegung des Mondes auf das Genaueste untersucht. In der ersten Abhandlung wird der allgemeine Character dieses Einflusses gekennzeichnet und die Veränderungen der ersten Ordnung in Bezug auf die Massen abgeleitet. In der zweiten Abhandlung wird dann auch der Einfluss der übrigen bedeutenden Ungleichheiten in der Mondbewegung berücksichtigt.

Schon dies musste mir die Frage nahe legen, ob die Weiler'sche Arbeit nicht am Ende durch Uncorrec-
theiten zu den von Hansen gänzlich verschiedenen Resultaten geführt hat. In der That habe ich nun diese Vermuthung bestätigt gefunden, indem die Grundgleichungen für die Anziehungscomponenten eines Rotationsellipsoides auf einen äusseren Punkt, von welchem die Weiler'sche Untersuchung ausgeht, nicht richtig sind.

Damit wäre eine allenfallsige Controverse, zu welcher Anlass gegeben werden könnte, beseitigt. Indessen schien es mir interessant, die mathematische Aufgabe, wie sie in der Ueberschrift formulirt ist, von Neuem zu behandeln und ich erlaube mir im Folgenden eine Lösung derselben mitzutheilen. Ich werde dabei auch von vornherein den Weg der Näherungen betreten, da, wie Herr Weiler auch erwähnt, eine strenge Lösung der Aufgabe wohl unüberwindliche Schwierigkeiten darbieten würde.

Die Rotationsaxe des homogenen Rotationsellipsoides falle mit der x-Axe unseres Coordinatensystems zusammen. Der Anfang derselben liege in dem Centrum des Ellipsoides. M sei die Gesamtmasse des Sphäroids,

A die Rotationsaxe, B die zweite Axe und die beiden Grössen λ u. A' defnirt durch die Gleichungen:

$$\lambda^2 = \frac{B^2 - A^2}{A'^2}; \quad \frac{x^2}{A'^2} + \frac{y^2 + z^2}{A'^2 + B^2 - A^2} = 1$$

x, y, z bedeuten dabei die Coordinaten des angezogenen Punktes. Dann lassen sich bekanntlich die Componenten X, Y, Z der anziehenden Kraft in folgender Form darstellen:

$$\left\{ \begin{aligned} X &= -\frac{3Mx}{A^3} \int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2 du}{1 + \lambda^2 u^2} \\ Y &= -\frac{3My}{A^3} \int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2 du}{(1 + \lambda^2 u^2)^2} \\ Z &= -\frac{3Mz}{A^3} \int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2 du}{(1 + \lambda^2 u^2)^2} \end{aligned} \right.$$

oder wenn wir die ausführbare Integration gleich be-
werkstelligen:

$$(I) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= -\frac{3Mx}{\lambda^3 A^3} \left(\lambda \frac{A}{A'} - \arctg \lambda \frac{A}{A'} \right) \\ Y &= -\frac{3My}{\lambda^3 A^3} \left(\arctg \lambda \frac{A}{A'} - \frac{\lambda A A'}{A'^2 + \lambda^2 A^2} \right) \\ Z &= -\frac{3Mz}{\lambda^3 A^3} \left(\arctg \lambda \frac{A}{A'} - \frac{\lambda A A'}{A'^2 + \lambda^2 A^2} \right) \end{aligned} \right.$$

Die Grösse $\lambda \frac{A}{A'}$ ist in dem Falle Erde — Mond ungefähr $\frac{1}{720}$. Wir können also mit Vortheil nach dieser kleinen Grösse entwickeln. Es ergiebt sich dann

$$\begin{aligned} X &= -\frac{3Mx}{A^3} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \left(\frac{\lambda A}{A'} \right)^2 + \frac{1}{7} \left(\frac{\lambda A}{A'} \right)^4 \right\} \\ Y &= -\frac{3My}{A^3} \left\{ \frac{2}{3} - \frac{4}{5} \left(\frac{\lambda A}{A'} \right)^2 + \frac{6}{7} \left(\frac{\lambda A}{A'} \right)^4 \right\} \end{aligned}$$

und die Z-Componente ist ganz ähnlich der Y gebildet.

Wir bezeichnen nun weiter mit r die Entfernung des Mondes vom Mittelpunkte der Erde. Also:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\frac{1}{A^3} = \frac{1}{r^3} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{x^2}{r^2} - 1 \right) \left(\frac{\lambda A}{r} \right)^2 + \left(\frac{\lambda A}{r} \right)^4 \left(\frac{x^2}{r^2} - 1 \right)^2 - \dots \right\}$$

$$\frac{\lambda A}{A} = \frac{\lambda A}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{r^2} - 1 \right) \left(\frac{\lambda A}{r} \right)^3 - \left(\frac{\lambda A}{r} \right)^5 \left(\frac{x^2}{r^2} - 1 \right)^2 - \dots$$

Wenn wir nun die höheren Potenzen von $\frac{\lambda A}{r}$ als die zweite vernachlässigen, so können wir die Anziehungscomponenten in folgender Weise darstellen:

$$\left. \begin{aligned} X &= -\frac{3Mx}{r^3} \left\{ \frac{1}{3} - \left(\frac{\lambda A}{r} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \frac{x^2}{r^2} - \frac{3}{10} \right) \right\} \\ Y &= -\frac{3My}{2r^3} \left\{ \frac{2}{3} - \left(\frac{\lambda A}{r} \right)^2 \left(\frac{x^2}{r^2} - \frac{1}{5} \right) \right\} \\ Z &= -\frac{3Mz}{2r^3} \left\{ \frac{2}{r} - \left(\frac{\lambda A}{r} \right)^2 \left(\frac{x^2}{r^2} - \frac{1}{5} \right) \right\} \end{aligned} \right\}$$

Bezeichnet also k eine gewisse Constante, so sind die Bewegungsgleichungen in unserem Falle

$$(II) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{r^3} \left\{ 1 - \left(\frac{\lambda A}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \frac{x^2}{r^2} - \frac{9}{10} \right) \right\} &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{ky}{r^3} \left\{ 1 - \left(\frac{\lambda A}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \frac{x^2}{r^2} - \frac{3}{10} \right) \right\} &= 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{kz}{r^3} \left\{ 1 - \left(\frac{\lambda A}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \frac{x^2}{r^2} - \frac{3}{10} \right) \right\} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Soll der Punkt gezwungen sein, in der Aequator-ebene des Sphäroides zu bleiben, so wird $x = 0$ und die Gleichungen nehmen die Form an:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{ky}{r^3} \left\{ 1 - \frac{2m}{r^2} \right\} &= 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{kz}{r^3} \left\{ 1 - \frac{2m}{r^2} \right\} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Es ist dabei zur Abkürzung gesetzt worden:

$$m = -\frac{3}{20} (\lambda A^2)$$

oder m wird, wenn wir, was auch im Folgenden durchweg geschehen soll, A als Einheit der Längenmasse annehmen, ungefähr $= -\frac{1}{1000}$.

Für den zuletzt betrachteten Fall stimmen die Formeln mit den von Herrn Weiler gegebenen ihrer Form nach vollständig überein. Nur die Grösse m wurde dort zu $-\frac{1}{250}$ bestimmt, während sich hier

Dann ist:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{x^2}{A^2} + \frac{x^2}{B^2} - \frac{x^2}{A^2} + \frac{r^2}{A^2 + B^2 - A^2} = 1.$$

Und hieraus ergeben sich ziemlich einfach folgende Entwicklungen:

ihre Werthe zu $-\frac{1}{1000}$ ergab. Die Resultate, die in dieser Beziehung von Herrn Weiler auf schöne und höchst elegante Weise gefunden worden sind, bleiben also bis auf die Zahlenwerthe bestehen. So wird also z. B. die dort gefundene retrograde säculare Bewegung der Apsidenlinie in eine progressive verwandelt und die Schnelligkeit dieser Bewegung in dem Verhältnisse der beiden für m angegebenen Zahlenwerthe verlangsamt. Anders gestaltet sich aber die Behandlung der allgemeinen Gleichungen (II), da hier ein mit der x -Coordinate behaftetes Glied in den Ausdrücken der wirkenden Kräfte vorkommt.

Ich will nun im Folgenden die Rotationsaxe des Erdsphäroides zur Z-Axe des Coordinatensystems wählen. Bezeichnet man dann:

$$m = \frac{3}{2} \lambda^2 A^2$$

$$(III) \quad \Omega = -\frac{k^2}{r^3} \left(\frac{1}{5} m \frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{15} m \right)$$

wo zugleich an Stelle des früheren k , k^2 gesetzt worden ist, so erhalten wir jetzt:

$$(IV) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k^2x}{r^3} &= \frac{d\Omega}{dx} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k^2y}{r^3} &= \frac{d\Omega}{dy} \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k^2z}{r^3} &= \frac{d\Omega}{dz} \end{aligned} \right.$$

Wir haben auf diese Weise die Bewegungsgleichungen gleich in eine Form gebracht, wie sie in den Störungsrechnungen gebräuchlich ist. Wir werden aus denselben Gründen, aus welchen es dort geschieht, Ω die Störungsfunktion nennen und die allgemeinen Prinzipien der physischen Astronomie werden ausreichen, diejenigen Correctionen der elliptischen Bewegung des Punktes, welche durch die Kraftcomponenten $\frac{d\Omega}{dx}$, $\frac{d\Omega}{dy}$

u. $\frac{d\Omega}{dz}$ hervorgerufen werden, zu berechnen. Da sich die Entwicklungen, wegen der Kleinheit der störenden Kraft, nur auf die allerersten Glieder beschränken können, so wird keine der bekannten Methoden die allgemeinen Störungen zu berechnen, den Dienst ganz versagen. In unserm Falle, wo ja namentlich die Bewegung des Mondes um die Erde controllirt werden soll, werden ausserdem Entwicklungen, die nach Potenzen der sehr kleinen Excentricität der Mondbahn fortschreiten, nicht nur nicht auszuschliessen, sondern sogar mit Vortheil anzuwenden sein, so dass also die Entwicklung der Störungsfunktion in Function der Zeit keine weiteren Schwierigkeiten darbieten wird.

$$(V) \left\{ \begin{aligned} \frac{di}{dt} &= r \cos u \, W \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r \sin u}{\sin i} \, W \\ e \frac{d\pi}{dt} &= -p \cos v \, R + (p+r) S \sin v + (1 - \cos i) e \frac{r \sin u}{\sin i} \, W \\ \frac{d\varphi}{dt} &= a \cos \varphi \sin v \, R + a \cotg \varphi \left(\frac{p}{r} - \frac{r}{a} \right) S \\ \frac{d\mu}{dt} &= -3k \cos \varphi \left\{ \frac{e \sin v}{\sqrt{p}} \, R + \frac{\sqrt{p}}{r} \, S \right\} \\ \frac{dL}{dt} &= -(2r \cos \varphi + p \, \text{tg} \frac{1}{2} \varphi \cos v) \, R + (p+r) \, \text{tg} \frac{1}{2} \varphi \sin v \, S \\ &\quad + (1 - \cos i) \frac{r \sin u}{\sin i} \, W + \int \frac{d\mu}{dt} \, dt. \end{aligned} \right.$$

Die Bezeichnungen sind die von Encke in allen seinen theoretischen Arbeiten gebrauchten. Also R, S, W die Componenten der störenden Kraft, in der Richtung des Radius-vectors, senkrecht darauf in der Ebene der Bahn und senkrecht auf die Bahnebene, dividirt aber durch die Quantität $k\sqrt{p}$.

Zur Berechnung dieser Componenten haben wir nun folgenden Weg einzuschlagen.

Wir haben Ω zu beziehen auf ein Coordinatensystem, dessen Axen gleichgerichtet sind mit R, S und W. Wir bezeichnen mit ξ, η, ζ die Coordinaten eines beliebigen Punktes in Bezug auf diese neuen Axen. Nachdem Ω als Function von ξ, η, ζ ausgedrückt ist, bilden wir die partiellen Differentialquotienten $\frac{d\Omega}{d\xi}$,

$\frac{d\Omega}{d\eta}$ u. $\frac{d\Omega}{d\zeta}$ und setzen nach der Differentiation $\xi = r$; $\eta = 0$ und $\zeta = 0$ um sofort die Componenten R, S und

Vor Allem war mir wichtig zu erfahren, ob und in welchen Elementen säculare Veränderungen vorkommen. Ich habe deshalb die Veränderung der elliptischen Bahnelemente durch allgemeine Ausdrücke dargestellt. Aus ihnen lassen sich bekanntlich auch sofort die Reihen für die Störungen in 3 Polarcoordinaten herstellen. Ich habe übrigens diese Rechnungen nicht ausgeführt, da sie mit dem directen Zwecke dieser Zeilen nicht zusammenhängen.

Die Methode der Variation der Constanten giebt bekanntlich für die Differentialquotienten der Elemente nach der Zeit folgende Formeln:

W zu erhalten. Die Transformationsformeln, welche die beiden Coordinatensysteme mit einander verbinden seien:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \xi + b \eta + c \zeta \\ y &= a' \xi + b' \eta + c' \zeta \\ z &= a'' \xi + b'' \eta + c'' \zeta \end{aligned} \right\}$$

und ganz allgemein werden folgende Beziehungen zwischen den Coefficienten stattfinden.

$$\left. \begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1 \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1 \end{aligned} \right| \begin{aligned} ab + a' b' + a'' b'' &= 0 \\ ac + a' c' + a'' c'' &= 0 \\ bc + b' c' + b'' c'' &= 0 \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\frac{d\Omega}{d\xi} = \frac{d\Omega}{dx} \cdot \frac{dx}{d\xi} + \frac{d\Omega}{dy} \frac{dy}{d\xi} + \frac{d\Omega}{dz} \frac{dz}{d\xi}$$

oder:

$$\frac{d\Omega}{d\xi} = a \frac{d\Omega}{dx} + a' \frac{d\Omega}{dy} + a'' \frac{d\Omega}{dz}.$$

Wie sich aber aus (III) ergibt, ist:

$$y \frac{d\Omega}{dx} = x \frac{d\Omega}{dy}$$

$$x \frac{d\Omega}{dz} = z \frac{d\Omega}{dx} - \frac{3}{5} \frac{k^2 xz}{r^5} (\lambda A)^2$$

und infolge dessen können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\xi} &= (ax + a'y + a''z) \frac{1}{x} \cdot \frac{d\Omega}{dx} - \frac{3}{5} a'' k^2 \frac{z}{r^5} \\ &= \frac{\xi}{x} \frac{d\Omega}{dx} - \frac{2}{5} a'' k^2 \frac{mz}{r^5} \end{aligned}$$

und wenn wir nun $\xi = r$; $\eta = \zeta = 0$ setzen:

$$\frac{d\Omega}{d\xi} = \frac{k^2 m}{r^4} \left(\frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{5} \right) - \frac{2}{5} a'' k^2 \frac{mz}{r^5}$$

und auf ganz ähnliche Weise findet sich:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\eta} &= -\frac{2}{5} b'' k^2 \frac{mz}{r^5} \\ \frac{d\Omega}{d\zeta} &= -\frac{2}{5} c'' k^2 \frac{mz}{r^5}. \end{aligned}$$

Nennt man nun noch i' die Neigung der Bahnebene des angezogenen Punktes gegen die Ebene der xy und u' den Winkel zwischen den Knotenlinien und dem Radius-vector, so erhält man leicht:

$$\left. \begin{aligned} a'' &= \sin u' \sin i' \\ b'' &= \cos u' \sin i' \\ c'' &= \cos i' \\ z &= r \sin u' \sin i' \end{aligned} \right\}$$

und hieraus nach Division durch $k\sqrt{p}$

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{1}{5} \frac{km}{r^4 \sqrt{p}} \left\{ 3 \sin^2 u' \sin^2 i' - 1 \right\} \\ S &= -\frac{1}{5} \frac{km}{r^4 \sqrt{p}} \sin 2u' \sin^2 i' \\ W &= -\frac{1}{5} \frac{km}{r^4 \sqrt{p}} \sin u' \sin 2i' \end{aligned} \right\}$$

Mit diesen Werthen finde ich zunächst:

$$\begin{aligned} R &= -\frac{1}{5} \frac{km}{a^4 \sqrt{p}} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i' + 2e \cos \zeta (2 - 3 \sin^2 i') + \frac{3}{2} \sin^2 i' \cos (2\zeta + 2N) + 6e \sin^2 i' \cos (3\zeta + 2N) \right\} \\ S &= -\frac{1}{5} \frac{km}{a^4 \sqrt{p}} \sin^2 i' \left\{ \sin (2\zeta + 2N) + 4e \sin (3\zeta + 2N) \right\} \\ W &= -\frac{1}{5} \frac{km}{a^4 \sqrt{p}} \sin 2i' \left\{ e \sin N + \sin (\zeta + N) + 3e \sin (2\zeta + N) \right\}. \end{aligned}$$

Da die xy -Ebene unseres ursprünglichen Coordinatensystems, wenn wir die Anwendung auf den Fall Mond — Erde machen, zusammenfällt mit dem Aequator, während man die Bahnelemente, welche in (V) vorkommen, auf die Ekliptik zu beziehen gewohnt ist, so habe ich die ersteren Elemente zur Unterscheidung von den letzteren mit einem Accente versehen.

Denkt man sich den Aequator, die Ekliptik und die Mondbahn als grösste Kreise auf die Himmelskugel projicirt, und bezeichnet man mit σ dasjenige Stück des die Mondbahn repräsentirenden Kreises, welches zwischen Ekliptik und Aequator liegt, so ist:

$$u = u' - \sigma = v + N - \sigma,$$

wobei wir setzen:

$$\pi - \Omega + \sigma = N.$$

Ist weiter ζ die mittlere Anomalie, also

$$\zeta = n(t - t_0)$$

wo n die mittlere Bewegung und t_0 die Durchgangszeit durch das Perihel bedeutet, so wird die zu lösende Aufgabe darin bestehen, die rechten Seiten der Gleichungen (V) auszudrücken durch Reihen, welche nach Sinus und Cosinus der vielfachen von ζ fortschreiten. Dann kann die Integration nach t unmittelbar vorgenommen werden. Ich will mich nun im Folgenden darauf beschränken, nur die erste Potenz von e mitzunehmen. Unter dieser Voraussetzung kann gesetzt werden:

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 - e \cos \zeta \\ \sin v &= \sin \zeta + e \sin 2\zeta \\ \cos v &= \cos \zeta - e \cos 2\zeta \\ \sin u' &= \sin (\zeta + N) - e \sin N + e \sin (2\zeta + N) \\ \cos u' &= \cos (\zeta + N) - e \cos N + e \cos (2\zeta + N) \\ &\text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind nun in (V) einzusetzen. Ich kann mich wohl damit begnügen das Resultat dieser Substitution anzuführen. Die Rechnung macht keine weitere Schwierigkeit. Gegen etwaige Rechenfehler habe ich mich durch doppelte Ausführung der vorkommenden höchst elementaren Operationen zu schützen gesucht. Es ergeben sich also folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{5} \frac{km}{a^3 \sqrt{p}} \sin 2i' \left\{ \frac{1}{2} \sin \sigma (1 + 3e \cos \zeta) - \frac{1}{4} e \sin(\zeta + 2N - \sigma) + \frac{1}{2} \sin(2\zeta + 2N - \sigma) + \frac{7}{4} e \sin(3\zeta + 2N - \sigma) \right\} \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{1}{5} \frac{km}{a^3 \sqrt{p}} \frac{\sin 2i'}{\sin i} \left\{ \frac{1}{2} \cos \sigma - \frac{1}{2} \cos(2\zeta + 2N - \sigma) + \frac{3}{2} e \cos \zeta \cos \sigma \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} e \cos(\zeta + 2N - \sigma) - \frac{7}{4} e \cos(3\zeta + 2N - \sigma) \right\} \\
 \frac{d\mu}{dt} &= + \frac{3k^2 m}{5a^4 \sqrt{p}} \left\{ (1 - \frac{3}{2} \sin^2 i') e \sin \zeta \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4} e \sin^2 i' \sin(\zeta + 2N) + \sin^2 i' \sin(2\zeta + 2N) + \frac{3}{4} e \sin^2 i' \sin(3\zeta + 2N) \right\} \\
 \frac{dq}{dt} &= -\frac{1}{5} \frac{km}{a^3 \sqrt{p}} \left\{ (1 - \frac{3}{2} \sin^2 i') (\sin \zeta + 3e \sin 2\zeta) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \sin^2 i' \sin(\zeta + 2N) - \frac{1}{2} e \sin^2 i' \sin(2\zeta + 2N) + \frac{7}{4} \sin^2 i' \sin(3\zeta + 2N) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{17}{2} e \sin^2 i' \sin(4\zeta + 2N) \right\} \\
 \frac{dL}{dt} &= + \frac{1}{5} \frac{km}{a^3 \sqrt{p}} \left\{ (1 - \frac{3}{2} \sin^2 i') \left(\frac{3}{2} + \frac{13}{2} e \cos \zeta \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{13}{8} e \sin^2 i' \cos(\zeta + 2N) + 3 \sin^2 i' \cos(2\zeta + 2N) + \frac{91}{8} e \sin^2 i' \cos(3\zeta + 2N) \right\} \\
 &\quad + (1 - \cos i) \frac{d\Omega}{dt} + \int \frac{d\mu}{dt} dt \\
 e \frac{d\pi}{dt} &= + \frac{1}{5} \frac{km}{a^3 \sqrt{p}} \left\{ (1 - \frac{3}{2} \sin^2 i') (\cos \zeta + e + 3e \cos 2\zeta) \right. \\
 &\quad - \frac{1 - \cos i}{\sin i} \sin 2i' \left[\frac{1}{2} e \cos \sigma - \frac{e}{2} \cos(2\zeta + 2N - \sigma) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sin^2 i' \cos(\zeta + 2N) - \frac{5}{2} e \sin^2 i' \cos(2\zeta + 2N) \\
 &\quad \left. + \frac{7}{4} \sin^2 i' \cos(3\zeta + 2N) + \frac{17}{2} e \sin^2 i' \cos(4\zeta + 2N) \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{VI}$$

Diese Formeln enthalten eine Inconsequenz insofern als die Aenderung der Länge des Perihels mit der Excentricität e multipliziert vorkommt und man sonach auf die rechte Seite der Gleichung für $\frac{d\pi}{dt}$ noch die Glieder 2. Ordnung in Bezug auf e mitnehmen müsste um in gleicher Weise überall die erste Potenz von e zu berücksichtigen. Ich habe jedoch diese Inconsequenz stehen gelassen, da am Ende die Mühe, die man auf die Berechnung der noch fehlenden Glieder verwenden müsste ohne praktischen Nutzen für die Anwendung unseres Problemes auf das System Mond — Erde sein dürfte.

Die Ausführung der Integration der obigen Gleichungen übergehe ich, da sie ja ohne Weiteres ausführbar ist und man auch schon so die Veränderungen der elliptischen Bahnelemente übersieht.

Man sieht sofort, dass säculare Veränderungen nur die Elemente Neigung, Knoten, Länge des Perihels und mittlere Länge (i , Ω , π und L) erleiden. Denn sämtliche andern Glieder enthalten periodische Functionen der Zeit multipliziert mit constanten Coefficienten.

Namentlich aber kann in der mittleren Bewegung μ kein säculares Glied vorkommen, also auch kein Glied von der Form ct^2 in dem Ausdrucke für die mittlere Länge des Mondes.

Die Säcularänderung der mittleren Länge des Mondes hat aber diese Form und es ist demnach klar, dass die sphäroidische Gestalt der Erde nichts zu dieser Ungleichheit beitragen kann.

Wollen wir freilich die vorhergehenden allgemeinen Formeln im Speziellen auf das System Mond - Erde anwenden, so müssen wir noch einen Schritt weiter gehen, indem sowohl die Knoten- als auch die Apsidenlinie der Mondbahn in kurzen Perioden einen vollen Umkreis beschreibt. Dadurch werden i' und σ periodische Funktionen der Zeit und zwar von kurzer Periode und nur ein Theil der früher als säkular auftretenden Verände-

rungen in Ω , π und L wird noch weiter diese Eigenschaft behalten, während nun die säkulare Veränderung der Neigung ganz verschwindet und rein periodisch wird. Wir werden diese Behauptungen mit geringen Hilfsmitteln nachweisen können. Aus dem sphärischen Dreiecke zwischen Aequator, Ekliptik und Mondbahn folgen die folgenden Formeln, wenn wir noch mit ϵ die Schiefe der Ekliptik bezeichnen.

$$\cos i' = \cos \epsilon \cos i - \sin \epsilon \sin i \cos \Omega$$

$$\sin i' \cos \sigma = \cos \epsilon \sin i + \sin \epsilon \cos i \cos \Omega$$

$$\sin i' \sin \sigma = \sin \Omega \sin \epsilon$$

und hieraus leitet man ohne Weiteres ab:

$$\sin 2i' \sin \sigma = \sin 2\epsilon \cos i \sin \Omega - \sin^2 \epsilon \sin i \sin 2\Omega$$

$$\sin 2i' \cos \sigma = \left\{ \frac{\sin 2i \cos^2 \epsilon}{\frac{1}{2} \sin^2 \epsilon \sin 2i} \right\} + \sin 2\epsilon \cos 2i \cos \Omega - \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon \sin 2i \cos 2\Omega$$

$$\sin^2 i' = 1 - \cos^2 \epsilon \cos^2 i - \frac{1}{4} \sin^2 \epsilon \sin^2 i + \frac{1}{4} \sin 2\epsilon \sin 2i \cos \Omega - \frac{1}{4} \sin^2 \epsilon \sin^2 i \cos 2\Omega.$$

Bei der Berechnung der Ausdrücke (VI) haben wir zu beachten, dass

$$N = \pi - \Omega + \sigma = \omega + \sigma$$

gesetzt worden ist. Daraus erhellt, dass alle Glieder, welche mit ζ zusammenhängen, zu einer der 4 Formen gehören müssen.

$$\sin 2i' \frac{\sin}{\cos} \{M + \sigma\}$$

$$\sin^2 i' \frac{\sin}{\cos} \{p \zeta + 2\omega + 2\sigma\}.$$

M ist dabei ein Winkel der von der Zeit abhängig

ist, also stets die Form $et + e'$ hat. Wir wollen nun nachweisen, dass alle diese Glieder keine säkularen Glieder erzeugen können, also stets periodische Funktionen der Zeit bleiben.

Man erhält nämlich mit Hülfe der vorhergehenden Formeln für i' und σ ohne Weiteres folgendes Resultat:

Setzt man zur Abkürzung:

$$\sin 2i \cos^2 \epsilon - \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon \sin 2i = \alpha$$

$$\sin 2\epsilon \cos 2i = 2\beta$$

$$- \frac{1}{4} \sin^2 \epsilon \sin 2i = 2\gamma$$

$$\cos 2\epsilon \cos i = 2\beta'$$

$$- \sin^2 \epsilon \sin i = 2\gamma'$$

so findet sich:

$$\sin 2i' \sin (M + \sigma) = \alpha \sin M + (\beta + \beta') \sin (M + \Omega) + (\beta - \beta') \sin (M - \Omega)$$

$$+ (\gamma + \gamma') \sin (M + 2\Omega) + (\gamma - \gamma') \sin (M - 2\Omega)$$

$$\sin 2i' \cos (M + \sigma) = \alpha \cos M + (\beta - \beta') \cos (M + \Omega) + (\beta + \beta') \cos (M - \Omega)$$

$$+ (\gamma - \gamma') \cos (M + 2\Omega) + (\gamma + \gamma') \cos (M - 2\Omega).$$

Setzt man ebenso:

$$A = \sin^2 i (\cos^2 \epsilon - \frac{1}{4} \sin^2 \epsilon)$$

$$2B = \frac{1}{4} \sin 2\epsilon \sin 2i$$

$$2C = \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon (1 + \cos^2 i)$$

$$2B' = \frac{1}{4} \sin 2\epsilon \sin i$$

$$2C' = \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon \cos i$$

so erhält man:

$$\sin^2 i \sin (p \zeta + 2\omega + 2\sigma) = A \sin (p \zeta + 2\omega) + (B + B') \sin (p \zeta + 2\omega + \Omega) - (B' - B) \sin (p \zeta + 2\omega - \Omega)$$

$$+ (C + C') \sin (p \zeta + 2\omega + 2\Omega) - (C' - C) \sin (p \zeta + 2\omega - 2\Omega)$$

$$\sin^2 i \cos (p \zeta + 2\omega + 2\sigma) = A \cos (p \zeta + 2\omega)$$

$$+ (B - B') \cos (p \zeta + 2\omega + \Omega) + (B + B') \cos (p \zeta + 2\omega - \Omega)$$

$$+ (C - C') \cos (p \zeta + 2\omega + 2\Omega) + (C + C') \cos (p \zeta + 2\omega - 2\Omega)$$

Es bleiben also in der That alle 4 fraglichen Ausdrücke periodisch abhängig von der Zeit, da ja vorausgesetztermassen M von der Form $ct + c'$ war.

Die obige Behauptung, dass die Säcularveränderung der Neigung verschwindet, ist auch sofort bewiesen, indem jedes Glied $\sin 2i' \sin \sigma$ war; wir hatten aber gefunden:

$\sin 2i' \sin \sigma = \sin 2\epsilon \cos i \sin \Omega - \sin^2 \epsilon \sin i \sin 2\Omega$
da aber Ω von der Form $ct + c'$ ist, so wird also die

$$\begin{cases} \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{1}{10} \frac{km}{a^3 \sqrt{p}} \cdot \frac{\alpha}{\sin i} \\ \frac{d\pi}{dt} = +\frac{1}{10} \frac{km}{a^3 \sqrt{p}} \left\{ -\frac{1-\cos i}{\sin i} \alpha - 1 + 3 \cos^2 \epsilon \cos^2 i + \frac{3}{2} \sin^2 \epsilon \sin^2 i \right\} \\ \frac{dL}{dt} = +\frac{1}{10} \frac{km}{a^3 \sqrt{p}} \left\{ -\frac{3}{2} + \frac{9}{2} \left(\cos^2 \epsilon \cos^2 i + \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon \sin^2 i \right) - \frac{1-\cos i}{\sin i} \alpha \right\}. \end{cases}$$

Ich will nun zum Schlusse diese 3 Grössen ihrem numerischen Werth nach für die Mondbewegung bestimmen.

Es war:

$$m = \frac{3}{2} \lambda^2 A^2; \quad \lambda^2 = \frac{B^2 - A^2}{A^2}.$$

Wir wollen nun folgende Einheiten wählen. Für die Längeneinheiten die Grösse A (die Rotationsaxe der Erde); für die Zeiteinheit den mittleren Sonnentag. Dann erhält man mit der Bossel'schen Abplattung der Erde:

$$\log m = 8.003430.$$

Ferner ist k definirt durch die Gleichung $k = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{T}$

und wir haben hier zu setzen

$$a = p = 60.480$$

$$T = 27^h 7^m 43^s 11^{\frac{1}{2}}.$$

Es ergiebt sich hieraus

$$\log k = 2.03409$$

also $\log \frac{km}{10 a^{\frac{3}{2}}} = 8.11630.$

Nehmen wir nun weiter an

$$\left. \begin{aligned} i &= 5^\circ 8'.7 \\ \epsilon &= 23.27.9 \end{aligned} \right\} \text{ für } 1800$$

so findet man für die säcularen Aenderungen von Ω , π und L innerhalb eines Jahres

frühere Säcularveränderung von i eine Periode erhalten die gleich ist der Periode von Ω resp. 2Ω .

Aus der letzten Auseinandersetzung folgt, dass auch in dem Falle Mond-Erde nur jene Glieder eine säculare Wirkung ausüben werden, die es in dem früheren allgemeinen Probleme thaten. Man findet also die Säcularänderungen von π , Ω und L sehr einfach. Und zwar ergeben sich für diese folgende Werthe:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -7''25$$

$$\frac{d\pi}{dt} = +7''16$$

$$\frac{dL}{dt} = +10''85.$$

Hansen findet bekanntlich für

$$\frac{d\Omega}{dt} = -5''90$$

$$\frac{d\pi}{dt} = +5''87$$

Die zwar unbedeutende Differenz zwischen beiden Zahlenresultaten ist mir noch nicht erklärlich. Da ich aber wenigstens gegenwärtig nicht die Zeit finden konnte, diesen Gegenstand weiter zu untersuchen, so muss ich hier abbrechen.

Um übrigens Missdeutungen von vorneherein vorzubeugen, will ich bemerken, dass auch ich dafür halte, dass die Methode Hansen's die Figur der Erde in der Mondtheorie in Rechnung zu ziehen, den Vorzug verdienen wird, besonders wenn man sich die Ueberzeugung verschaffen will, dass jene Glieder 2. Ordnung, welche die grossen Ungleichheiten der Mondbewegung in den von der Figur der Erde abhängigen Störungen hervorrufen, nicht wesentlich merklich werden können.

Bonn im November 1877.

H. Seeliger.