Die Bewegungsgleichungen konservativer Systeme mit linearen Bewegungsintegralen.

Von

A. BILIMOWITSCH in Kiew.

Es seien q_s ($s=1, 2, \dots, n+k$) die Koordinaten eines materiellen Systems, T seine lebendige Kraft und U die Kräftefunktion, wobei die Zeit t weder in T noch in U explizit enthalten sein möge. Die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial (T+U)}{\partial q_s} \quad s=1, 2, \dots, n+k$$

mögen die linearen Integralgleichungen:

$$(1) \quad q'_{n+v} = \sum_{i=1}^n a_{vi} q'_i + a_v, \quad v=1, 2, \dots, k$$

zulassen, wo die a_{vi} und a_v Funktionen der Koordinaten und der willkürlichen Konstanten bezeichnen. Eliminieren wir aus den Lagrange'schen Gleichungen unter Benutzung von (1) die Geschwindigkeiten q'_{n+v} ($v=1, 2, \dots, k$), indem wir die Funktionen

$$\Theta(q_s, q'_i) = T(q_s, q'_i); \quad \theta_v(q_s, q'_i) = \frac{\partial T}{\partial q'_{n+v}} \\ s=1, 2, \dots, n+k; \quad i=1, 2, \dots, n; \quad v=1, 2, \dots, k$$

einführen, so erhalten wir die Gleichungen*):

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial q'_i} - \frac{\partial (\Theta + U)}{\partial q_i} - \sum_{v=1}^k \frac{\partial (\Theta + U)}{\partial q_{n+v}} \frac{\partial q'_{n+v}}{\partial q'_i} \\ = \sum_{\mu=1}^k \theta_\mu \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial q'_{n+\mu}}{\partial q'_i} - \frac{\partial q'_{n+\mu}}{\partial q_i} - \sum_{v=1}^k \frac{\partial q'_{n+\mu}}{\partial q_{n+v}} \frac{\partial q'_{n+v}}{\partial q'_i} \right) \quad i=1, 2, \dots, n.$$

*) Vergl. P. Woronetz, Transformation der dynamischen Gleichungen mit Hilfe von linearen Bewegungsintegralen, Kiew. Universitäts-Nachrichten 1906.

Mit Hilfe des Integrals der lebendigen Kraft:

$$T = U + h,$$

wo h eine willkürliche Konstante bezeichnet, kann noch aus (1) und (2) die Zeit t eliminiert werden, sodaß sich das Problem der Bewegung des materiellen Systems auf die Integration von $n - 1$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung und k Differentialgleichungen erster Ordnung und auf eine Quadratur reduzieren läßt. Die erwähnten $n - 1$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung können folgendermaßen aufgestellt werden.

I. *Der allgemeine Fall.* Nach Elimination der abhängigen Geschwindigkeiten $q'_{n+\nu}$ ($\nu = 1, 2, \dots, k$) mit Hilfe von (1) aus der lebendigen Kraft erhalten wir:

$$\Theta = Q + P + N,$$

wo Q und P homogene Funktionen zweiten und ersten Grades der Geschwindigkeiten q'_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sind und N unabhängig von q'_i ist.

Wir wählen zur unabhängigen Variablen q_1 , bezeichnen:

$$k_i = \frac{q'_i}{q'_1} = \frac{dq_i}{dq_1} \quad i = 2, 3, \dots, n$$

und setzen:

$$Q = q_1'^2 G, \quad P = q_1' L,$$

wo G und L Funktionen der Koordinaten und der Differentialquotienten von $q_2, q_3, \dots, q_n$ nach q_1 bezeichnen.

Sind die Koordinaten $q_2, q_3, \dots, q_{n+k}$ durch q_1 ausgedrückt, so bestimmen wir die Zeit t aus

$$(3) \quad dt = \frac{2G}{-L \pm \sqrt{L^2 + 4G(U + h - N)}} dq_1$$

durch Quadraturen, wobei das Vorzeichen der Quadratwurzel den Anfangsbedingungen gemäß zu wählen ist.

Multiplizieren wir die Formeln (2) mit $\frac{dt}{dq_1} = \frac{1}{q'_1}$, so ergibt sich:

$$(4) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dq_1} \frac{\partial \Theta}{\partial q'_i} - \frac{1}{q'_1} \left[\frac{\partial(\Theta + U)}{\partial q_i} + \sum_{\nu=1}^k \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial q_{n+\nu}} a_{\nu i} \right] \\ &= \sum_{\mu=1}^k \theta_{\mu} \left[\frac{da_{\mu i}}{dq_1} - \frac{1}{q'_1} \left(\frac{\partial q'_{n+\mu}}{\partial q_i} + \sum_{\nu=1}^k \frac{\partial q'_{n+\mu}}{\partial q_{n+\nu}} a_{\nu i} \right) \right] \quad i = 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

Benutzen wir nun (3) und die Formeln:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial q'_i} = q'_1 \frac{\partial G}{\partial k_i} + \frac{\partial L}{\partial k_i}; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial q_s} = q_1'^2 \frac{\partial G}{\partial q_s} + q'_1 \frac{\partial L}{\partial q_s} + \frac{\partial N}{\partial q_s};$$

$$\theta_{\mu} = \sum_{j=1}^n b_{\mu j} q'_j + b_{\mu} = q_1' \left(b_{\mu 1} + \sum_{j=2}^n b_{\mu j} k_j \right) + b_{\mu};$$

$$\frac{1}{q_1'} \frac{\partial q_{n+\mu}'}{\partial q_s} = \frac{\partial a_{\mu 1}}{\partial q_s} + \sum_{j=2}^n \frac{\partial a_{\mu j}}{\partial q_s} k_j + \frac{1}{q_1'} \frac{\partial a_{\mu}}{\partial q_s},$$

$$s = 1, 2, \dots, n+k; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \mu = 1, 2, \dots, k,$$

so können wir t aus (4) eliminieren.

II. *Der Fall* $P = 0$. Es fällt nicht schwer nachzuweisen, daß dieser Fall dann eintritt, wenn

$$\sum_{v=1}^k a_v \frac{d}{dq_i'} \frac{\partial T}{\partial q_{n+v}'} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ist, wobei $\frac{d}{dq_i'}$ die Differentiation nach q_i' in der Voraussetzung, daß q_i' sowohl explizite wie auch implizite durch q_{n+v}' in der betreffenden Funktion enthalten ist, bedeutet.

In diesem Fall wird die Zeit t aus

$$dt = \sqrt{\frac{G}{U+h-N}} dq_1$$

durch Quadraturen erhalten. Die Gleichungen (4) ergeben unter Benutzung der Bezeichnung $R = \sqrt{G(U+h-N)}$:

$$(5) \quad \frac{d}{dq_1} \frac{\partial R}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial R}{\partial q_i} + \sum_{v=1}^k \frac{\partial R}{\partial q_{n+v}} a_{vi} \right) = \sqrt{\frac{G}{U+h-N}} \left(\frac{\partial N}{\partial q_i} + \sum_{v=1}^k \frac{\partial N}{\partial q_{n+v}} a_{vi} \right) \\ + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^k \theta_{\mu} \left[\frac{\partial a_{\mu i}}{\partial q_1} - \frac{1}{q_1'} \left(\frac{\partial q_{n+\mu}'}{\partial q_i} + \sum_{v=1}^k \frac{\partial q_{n+\mu}'}{\partial q_{n+v}} a_{vi} \right) \right] \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Beispiel. Die aufgestellten Gleichungen (5) wollen wir auf das Dreikörperproblem anwenden. Durch die bekannte Jacobische Transformation*) reduziert sich dieses Problem auf das Problem der Bewegung zweier materieller Punkte, wobei die Kräftefunktion nur von den Entfernungen r und r_1 dieser Punkte vom Koordinatenursprunge und von dem Kosinus τ des Winkels V zwischen r und r_1 abhängt. Bezeichnen wir mit μ und μ_1 die Massen der Punkte und benutzen die Jacobischen Koordinaten**) $r, v, i; r_1, v_1, i_1; \Omega$, so ist:

$$2T = \mu [r'^2 + r^2(v' + \Omega' \cos i)^2 + r^2(i' \sin v - \Omega' \cos v \sin i)^2] \\ + \mu_1 [r_1'^2 + r_1^2(v_1' + \Omega \cos i_1)^2 + r_1^2(i_1' \sin v_1 - \Omega' \cos v_1 \sin i_1)^2];$$

$$U = \text{fonct}(r, r_1, V); \quad \tau = \cos V = \cos v \cos v_1 + \sin v \sin v_1 \cos J; \quad J = i_1 - i.$$

*) C. G. J. Jacobi, Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps. Ges. Werke IV.

**) ibidem S. 308.

Die Veränderlichen $r, v, i; r_1, v_1, i_1; \Omega$ genügen*) den Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\Omega' &= \frac{\sin^2 J}{C} \frac{\sin v \sin v_1}{\sin i \sin i_1} \frac{\partial U}{\partial \tau} = M_\Omega \frac{\partial U}{\partial \tau}; \\ i' &= \frac{\sin^2 J}{C} \frac{\cos v \sin v_1}{\sin i_1} \frac{\partial U}{\partial \tau} = M_i \frac{\partial U}{\partial \tau}; \quad i_1' = \frac{\sin^2 J}{C} \frac{\cos v_1 \sin v}{\sin i} \frac{\partial U}{\partial \tau} = M_{i_1} \frac{\partial U}{\partial \tau}; \\ v' &= -\frac{\sin^2 J}{C} \frac{\sin v \sin v_1}{\operatorname{tg} i \sin i_1} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{c \sin i_1}{\mu r^2 \sin J} = M_v \frac{\partial U}{\partial \tau} + N_v; \\ v_1' &= -\frac{\sin^2 J}{C} \frac{\sin v_1 \sin v}{\operatorname{tg} i_1 \sin i} \frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{c \sin i}{\mu_1 r_1^2 \sin J} = M_{v_1} \frac{\partial U}{\partial \tau} + N_{v_1}; \\ \frac{d^2}{dt^2} (\mu r^2 + \mu_1 r_1^2) &= 2U + 4h; \quad T = U + h,\end{aligned}$$

wo C eine willkürliche Konstante ist.

Aus diesen Gleichungen soll nun die Zeit eliminiert werden**).

Eliminieren wir aus $T, \frac{\partial T}{\partial \Omega'}, \frac{\partial T}{\partial i'}, \dots, \frac{\partial T}{\partial v_1'}$ die Größen $\Omega', i', i_1', v', v_1'$, so wird:

$$\begin{aligned}2\Theta &= \mu r'^2 + \mu_1 r_1'^2 + \frac{C^2}{\sin^2 J} \left(\frac{\sin^2 i_1}{\mu r^2} + \frac{\sin^2 i}{\mu_1 r_1^2} \right); \quad \theta_1 = C; \quad \theta_2 = \theta_3 = 0; \\ \theta_4 &= \frac{C}{\sin J} \sin i_1; \quad \theta_5 = -\frac{C}{\sin J} \sin i.\end{aligned}$$

Setzen wir jetzt $k = \frac{r'}{r_1'} = \frac{dr}{dr_1}$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}G &= \frac{1}{2} (\mu k^2 + \mu_1); \quad R = \sqrt{\frac{1}{2} (\mu k^2 + \mu_1) (U_1 + h - N)}; \\ N &= \frac{C^2}{2 \sin^2 J} \left(\frac{\sin^2 i_1}{\mu r^2} + \frac{\sin^2 i}{\mu_1 r_1^2} \right).\end{aligned}$$

Die Größen $a_{\mu i}$ sind alle gleich Null, die θ_μ von r und r_1 unabhängig, und außerdem ist $N - \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^k \theta_\mu a_\mu = 0$.

Die Gleichung (5) nimmt also die Form:

$$(6) \quad \frac{d}{dr_1} \frac{\partial R}{\partial k} - \frac{\partial R}{\partial r} = 0$$

an, wobei

$$r_1' = \sqrt{\frac{U + h - N}{G}}$$

*) C. G. J. Jacobi, l. c., S. 313.

**) Eine solche Elimination hat schon nach einer anderen Methode Cayley (Report of the British Association, 32 meeting, S. 215, London 1863) ausgeführt.

ist. Das Problem reduziert sich also auf die Integration der Differentialgleichung (6) zweiter Ordnung und der vier Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{di}{M_i \frac{\partial U}{\partial \tau}} = \frac{di_1}{M_{i_1} \frac{\partial U}{\partial \tau}} = \frac{dv}{M_v \frac{\partial U}{\partial \tau} + N_v} = \frac{dv_1}{M_{v_1} \frac{\partial U}{\partial \tau} + N_{v_1}} = \frac{dr_1}{\sqrt{\frac{U+h-N}{G}}}$$

und auf zwei Quadraturen, die Ω und t einführen.

III. *Der Fall der zyklischen Koordinaten.* Wenn die Koordinaten $q_{n+1}, q_{n+2}, \dots, q_{n+k}$ zyklisch sind, so haben wir die Integrale:

$$\theta_v = \frac{\partial T}{\partial q'_{n+v}} = \Gamma_v, \quad v = 1, 2, \dots, k,$$

wo die Γ_v willkürliche Konstanten bezeichnen. In diesem Falle ist:

$$P = 0; \quad \frac{\partial R}{\partial q_{n+v}} = \frac{\partial N}{\partial q_{n+v}} = \frac{\partial q'_{n+v}}{\partial q_{n+v}} = 0; \quad N = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^k \Gamma_v a_v,$$

sodaß (5)

$$\frac{d}{dq_1} \frac{\partial R}{\partial k_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^k \Gamma_\mu \left(\frac{da_{\mu i}}{dq_1} - \frac{\partial a_{\mu 1}}{\partial q_i} - \sum_{j=2}^n \frac{\partial a_{\mu j}}{\partial q_i} k_j \right) \quad i = 2, 3, \dots, n$$

ergibt, oder

$$\frac{d}{dq_1} \frac{\partial S}{\partial k_i} - \frac{\partial S}{\partial q_i} = 0; \quad S = R - \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^k \Gamma_\mu \left(a_{\mu 1} + \sum_{j=2}^n a_{\mu j} k_j \right) = R - \frac{1}{2} \Pi.$$

Diese Gleichungen können auch aus den Routhschen Gleichungen, oder unter Benutzung der „modified Lagrangian function“ aufgestellt werden*).

Beispiel. Um die aufgestellten Formeln an einem Beispiel zu erläutern, betrachten wir das Problem der Rotation eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt O .

Bezeichnen wir den Nutationswinkel durch φ , den Präzessionswinkel durch ψ und den Winkel der reinen Drehung des Körpers durch θ , so ist $2T = A(-\psi' \sin \varphi \cos \theta + \varphi' \sin \theta)^2 - B(\psi' \sin \varphi \sin \theta + \varphi' \cos \theta)^2 + C(\psi' \cos \varphi + \theta')^2$;

$$U = -Mg[(a \cos \theta - b \sin \theta) \sin \varphi - c \cos \varphi],$$

wo M die Masse des Körpers, g die Beschleunigung der Schwere, A, B, C die Hauptträgheitsmomente um den Punkt O des Körpers und a, b, c die Koordinaten des Schwerpunktes des Körpers in bezug auf das mit dem

*) Thomson and Tait, Treatise on Natural Philosophy, I, art. 319, 1879. Routh, A treatise on the stability of a given state of motion, ch. IV, art. 20, London 1877. Helmholtz, Prinzipien der Statik monozyklischer Systemes, Journ. f. Math. 97, 1884. Kolossow, Über einige Abänderungen des Hamiltonschen Prinzips (Petersburg 1903, russisch).

Körper fest verbundene Koordinatenachsensystem bezeichnen. Die Koordinate ψ ist zyklisch, sodaß

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = \Gamma = \text{const.}$$

ist. Die Funktionen G, Π, N ergeben in diesem Falle, wenn man zur unabhängigen Variablen θ wählt,

$$2G = [(A \sin^2 \theta + B \cos^2 \theta) - \Delta(B-A)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sin^2 \varphi] k^2 \\ - 2\Delta C(B-A)k \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi + C(1 - \Delta C \cos^2 \varphi),$$

$$\Pi = -\Gamma \Delta [(B-A)k \sin \theta \cos \theta + C \cos \varphi], \quad 2N = \Gamma^2 \Delta,$$

wo

$$\frac{1}{\Delta} = (A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) \sin^2 \varphi + C \cos^2 \varphi.$$

Die Aufgabe reduziert sich auf die Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung*) und auf zwei Quadraturen, die ψ und t bestimmen.

Die in Rede stehende Gleichung zweiter Ordnung kann auf die Form

$$y'' = P_3 + V P_2 \sqrt{W P_2}$$

gebracht werden, wo V, W rationale Funktionen von x und y , P_3 und P_2 Polynome dritten und zweiten Grades in bezug auf den Differentialquotienten y' mit veränderlichen rationalen Koeffizienten bezeichnen.

Im April 1910.

*) Vergl. P. Stäckel, Ausgezeichnete Bewegungen des schweren unsymmetrischen Kreisels. Mathematische Annalen Bd. 65, S. 554.