**IV. Ueber Tropfen an festen Körpern insbesondere an Cylindern;
von Dr. Kurd Laßwitz in Breslau.**

I.

Differentialgleichung und Volumen von Tropfen.

Die von Laplace¹⁾, Gaußs²⁾ und Poisson³⁾ aufgebaute mathematische Theorie der Capillarität ist, zumeist von Poisson selbst, zur Auflösung einer großen Anzahl von Aufgaben über das Gleichgewicht von Flüssigkeiten und festen Körpern benutzt worden und hat im Allgemeinen eine außerordentliche Uebereinstimmung der Rechnung mit der Erfahrung ergeben⁴⁾. Aus diesem Grunde soll, obwohl die physikalischen Hypothesen Poissons der modernen Anschauung kaum genügen können, die Anwendung jener Theorie im Nachstehenden auf einen weiteren Specialfall ausgedehnt werden, wobei es vorläufig dahingestellt bleiben muß, ob das Experiment auch hier die Theorie bestätigt. Das unbekannte Gesetz der Molekular-Wirkung tritt nur in Form von Constanten in die resultirenden Gleichungen, welche doch erst *a posteriori* bestimmt werden können. Die Berechtigung der Untersuchung beruht auf dem wohl zweifellosen Satze, daß die Wirkung des Capillardrucks senkrecht ist zur Oberfläche und proportional der Summe der reciproken Krümmungsradien der Hauptschnitte, $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, ein Ausdruck, wel-

- 1) *Sur l'action capillaire, Supplément au X livre du traité de mécanique céleste*; und *Supplément à la théorie de l'action capillaire*. Beide Abhandlungen in *traité de mécanique céleste, T. IV.*
- 2) *Principia generalia theoriae fluidorum in statu aequilibrii.*
- 3) *Nouvelle théorie de l'action capillaire.* Paris 1831. Vergleiche ferner: Paul du Bois-Reymond „*De aequilibrio fluidorum*“, Dissertatio inaug. Berol. 1859.
- 4) Ausgedehnte Beobachtungen rühren her von Gay-Lussac, Desains, Bède, Brunner, Hagen, Frankenheim, Quincke u. A.

cher in der Kürze mit *Krümmung* der Oberfläche bezeichnet werden soll ¹⁾.

Es soll in der Folge der Gleichgewichtszustand solcher Flüssigkeitsmengen untersucht werden, welche sich auf der unteren (dem Erd-Mittelpunkte zugekehrten) Seite fester Körper hängend befinden und deren Oberfläche eine Rotationsfläche darstellt. Jede derartige Flüssigkeitsmasse soll im Allgemeinen den Namen *Tropfen* führen.

Unter der Voraussetzung, daß der feste Körper, an welchem der Tropfen hängt, in seiner Oberfläche als vollständig glatt und homogen und in seinem Verhalten gegen die, natürlich adhäreirende, Flüssigkeit als gleichartig angesehen werden kann, wird die Oberfläche des Tropfens dann eine Rotationsoberfläche darstellen, wenn die Oberfläche des festen Körpers selbst eine solche ist und ihre Rotationsaxe mit der Richtung der Schwere zusammenfällt.

Nehmen wir rechtwinklige Raumcoordinaten und die *positive* Richtung der Z-Axe der der Schwere entgegengesetzt. Der Normaldruck (N) auf die Einheit der Oberfläche ist in jedem Punkte gleich der algebraischen Summe aus dem Capillardrucke und dem hydrostatischen Drucke, d. h. dem Gewichte der über jenem Punkte ruhenden Flüssigkeitssäule. Der Luftdruck kann als constant vernachlässigt werden. Bezeichnet a^2 die Capillaritätsconstante ²⁾, s das specifische Gewicht der Flüssigkeit, δ die

- 1) Das von Poisson zu Grunde gelegte Gesetz leistet daher die erforderliche Uebereinstimmung nur innerhalb gewisser Gränzen; dieselben überschreitet Poisson z. B., wo er aus seinen Annahmen den Einfluß der Temperatur auf die capillare Steighöhe ableiten will (*Nouvelle théorie* p. 106). Vergl. hierüber C. Brunner (Sohn), Untersuchungen über die Cohäsion der Flüssigkeiten, Pogg. Ann. Bd. LXX. Aus diesem Grunde ist der Einfluß der Temperatur auf die capillaren Erscheinungen hier nirgends in Betracht gezogen worden.
- 2) Poisson führt in der *Nouvelle théorie* eine Capillaritätsconstante a^2 ein, welche den doppelten Werth hat als hier, wo die Bezeichnungsweise von Beer (Einleitung in die math. Theorie der Elasticität und Capillarität. Herausg. von Giesen. Leipzig 1869, S. 115) gebraucht ist. Die ebenfalls häufig übliche Capillaritätsconstante α ist gleichbedeutend mit $a^2 s$ hier und mit $\frac{1}{2} a^2 s$ bei Poisson. Vergleiche Wuellner, Lehrb. d. Experimentalphysik, Leipzig 1870, 1. Bd., S. 264

Entfernung des Punktes der Oberfläche von dem festen Körper in der Richtung der Verticalen, also die Länge der zu tragenden Flüssigkeitssäule, so ist der Normaldruck

$$N = a^2 s \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \delta s.$$

So lange dieser Normaldruck nach dem festen Körper zu wirkt, also N positiv, haftet die Flüssigkeit am Körper. Wenn N gleich Null wird, so tritt labiles Gleichgewicht ein, Capillar- und Schwerkraft heben sich auf und der Tropfen befindet sich *im Moment des Zerreißens*. Dies ist der von uns besonders zu behandelnde Fall. Der Tropfen zerreißt, wenn die Schwere überwiegt und N negativ wird.

Wir führen nun cylindrische Coordinaten z und $t = \sqrt{x^2 + y^2}$ ein und verlegen den Coordinaten-Anfangspunkt in den *tiefsten* Punkt des Tropfens, der in der Rotationsaxe liegen wird. Wir brauchen alsdann nur die Meridiancurve des Tropfens und des festen Körpers zu betrachten. Die Gleichung der Meridiancurve des Rotationskörpers sey $z_1 = \varphi(t)$, so ist für einen Punkt der Tropfenoberfläche (z, t)

$$\delta = z_1 - z = \varphi(t) - z,$$

demnach die Bedingung des Gleichgewichtes nach Vorigem:

$$a^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - (\varphi(t) - z) = c,$$

wenn c eine stets positive GröÙe bezeichnet, die im Falle des labilen Gleichgewichtes zu Null wird.

Bedeutet γ die *Krümmung der Meridiancurve* im tiefsten Punkte, so erhält man für $z = 0, t = 0$:

$$2a^2\gamma = \varphi(0) + c,$$

wobei $\varphi(0) = h_0 = 2a^2\gamma - c$ die Entfernung des tiefsten Tropfenpunktes von dem vertical über ihm liegenden Punkte des festen Körpers angiebt. Wird das Gleichgewicht labil, so verschwindet c und es wird die verticale Entfernung des tiefsten Tropfenpunktes vom Körper, welche

wir die *Länge* des Tropfens nennen wollen, bei einem zer-
reisenden Tropfen

$$h_0 = 2 a^2 \gamma = q(o).$$

Diese Länge ist vorläufig nicht bekannt.

Die Differentialgleichung eines an einem Rotationskörper hängenden Tropfens lautet nunmehr, wenn man die Krümmung durch ihre Ausdrücke in Differentialquotienten ersetzt:

$$\frac{a^2 \frac{d^2 z}{dt^2}}{\left(1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{a^2}{t} \frac{dz}{dt}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} = 2 a^2 \gamma - q(o) + q(t) - z \quad (1).$$

Für den Rand, mit welchem die freie Oberfläche der Flüssigkeit an den festen Körper gränzt, gilt ferner die Gleichung ¹⁾

$$\cos i = \text{Const.},$$

wobei i den Winkel zwischen den Normalen, auf der Oberfläche der Flüssigkeit und des festen Körpers nach Außen errichtet, bezeichnet (den Contingenz-Winkel).

Das Vorzeichen der Wurzel bestimmt sich aus der Beziehung

$$\sin \vartheta = \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}},$$

wenn man unter ϑ den Winkel versteht, welchen die auf der Meridiancurve nach außen errichtete Normale mit der negativen Richtung der z bildet. Beschränken wir uns wegen der Symmetrie der Curve zur z -Axe auf den rechts von derselben liegenden Theil, so bleibt hier unseren Annahmen nach stets $0 < \vartheta < \pi$, also $\sin \vartheta$ stets positiv. Demnach ist der Wurzel hier stets dasselbe Zeichen zu geben, wie $\frac{dz}{dt}$. Wir behandeln übrigens hier nur Tropfen, bei denen jedes z für jedes t nur *einen* Werth besitzt. Der Winkel, welchen die Oberfläche des festen Körpers

1) Gauss und Poisson a. a. O. — Beer, a. a. O. S. 118.

an der Gränze der Oberfläche der Flüssigkeit mit der Horizontalebene bildet, heiße der Randwinkel (ω); die Summe aus Contingenzwinkel und Randwinkel $\omega + i$ ist demnach derjenige Winkel, welchen die Oberfläche der Flüssigkeit mit der Horizontalebene bildet. Für diesen Rand, d. h. den Parallelkreis, in welchem Flüssigkeits- und Körperoberfläche sich schneiden, wird demnach $\angle i = \omega + i$; ferner seyen $z = h$ und $t = R$ die entsprechenden Coordinaten des Randes. Ist $z = f(a, \gamma, t)$ die (vorläufig noch unbekannte) Integralgleichung der Tropfenoberfläche, wobei a und γ constante Parameter sind, so gilt also für den Rand

$$h = f(a, \gamma, R) \quad (2).$$

und durch Differentiation der Integralgleichung

$$\text{tang}(\omega + i) = f'(a, \gamma, R); \quad (3)$$

ferner aus der gegebenen Gleichung des festen Körpers

$$h = \varphi(R) \text{ und } \text{tang } \omega = \varphi'(R). \quad (4-5)$$

Diese vier Gleichungen, deren Herstellung unsere Aufgabe ist, genügen zur Lösung des Problems, in welchem nur die vier Unbekannten

$$\gamma, h, R, \omega$$

vorkommen, sobald *labiles* Gleichgewicht besteht. Die Gleichung des festen Körpers enthält nämlich noch eine unbestimmte Constante $h_0 = 2a^2\gamma - c = \varphi(0)$; beim zerreißenden Tropfen wird $c = 0$, $h_0 = 2a^2\gamma = \varphi(0)$ und dadurch diese Unbekannte bestimmt. Ein solcher maximaler Tropfen besitzt natürlich auch ein bestimmtes Volumen (T_0), das wir sogleich berechnen werden.

Ist dagegen nicht labiles Gleichgewicht vorhanden, so bedarf es noch der Bestimmung von c . Diese kann nur durch eine neue Angabe ermöglicht werden, es muß also noch eine der vier Größen γ, h, R, ω , oder, was das Natürlichere ist, das *Gewicht* (resp. Volumen T) der am festen Körper hängenden Flüssigkeitsmenge gegeben seyn. Wir stellen nunmehr den Zusammenhang zwischen dem Tropfen-Volumen (T) und den übrigen Bestimmungsstücken her.

Das Volumen eines Rotationskörpers zwischen zwei in der Höhe z_0 und z gelegten Horizontalebene ist gegeben durch das Integral

$$\pi \int_{z_0}^z t^2 dz \text{ oder } \pi \left[z t^2 \right]_{z_0}^z - 2\pi \int_{t_0}^t z t dt.$$

Demnach ist das Volumen des Tropfens vom tiefsten Punkte bis zum Rande:

$$T = \pi \int_0^h t^2 dz - S,$$

wenn S das mit eingeschlossene Segment des festen Körpers bezeichnet, welches seinerseits ist

$$S = \pi \int_{h_0}^h t^2 dz = R^2 \pi h - 2\pi \int_0^R \varphi(t) t dt.$$

Multiplicirt man nun beide Seiten der Gleichung (1) mit $t dt$ und integrirt rechts und links, so wird mit Hülfe einer partiellen Integration

$$\frac{a^2 t \frac{dz}{dt}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} = (2a^2 \gamma - \varphi(0)) \frac{t^2}{2} + \int_0^t \varphi(t) t dt - \frac{1}{2} z t^2 + \frac{1}{2} \int_0^z t^2 dz. \quad (6)$$

Die Integrationsconstante verschwindet, wenn man von $z=0, t=0$ bis z, t integrirt. Mit Berücksichtigung der früheren Gleichungen ergibt dies nunmehr für $z=h, t=R$ als Volumen des Tropfens:

$$T = R^2 \pi h + 2a^2 \pi R \sin(\omega + i) - (2a^2 \gamma - h_0) R^2 \pi - 2\pi \int_0^R \varphi(t) t dt - S,$$

das ist

$$T = 2a^2 \pi R \sin(\omega + i) - (2a^2 \gamma - h_0) R^2 \pi. \quad (7)$$

Dies ist die zu (2 bis 6) tretende 5. Gleichung, womit

nun alle fraglichen Größen bestimmt sind. Im labilen Gleichgewicht wird $h_0 = 2a^2\gamma$, d. h.

Das Volumen eines an einem beliebigen Rotationskörper hängenden im Zerreißen begriffenen Tropfens ist gegeben durch

$$T_n = 2a^2 R \pi \sin(\omega + i).$$

II.

Tropfen an verticalen geraden Kreiscylindern.

Wir beschränken uns nunmehr auf zwei Fälle:

1) *Der Tropfen hänge am untern Ende eines massiven verticalen geraden Kreiscylinders.* Ein specieller Fall hiervon ist ein Tropfen an einer horizontalen Ebene.

Derartige Tropfen sollen *kreisförmige* heißen.

An Stelle der Gleichung des festen Körpers tritt hier die Beziehung $t_1 = R = \text{Const.}$, wobei Const. der gegebene Cylinderradius ist. Ferner ist $z_1 = q(t) = q(o)$, daher die Gleichung des Tropfens (aus I, 1):

$$\frac{\frac{d^2 z}{dt^2}}{\left(1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{1}{t} \frac{dz}{dt}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} = 2\gamma - \frac{z}{a^2}. \quad (1)$$

2) *Der Tropfen sey in einer Richtung unendlich ausgedehnt;* er hänge z. B. an einer unendlich langen horizontalen Platte von gegebener Breite. Die Oberfläche ist dann als Rotationsoberfläche anzusehen, deren Axe in unendlicher Entfernung liegt. Mit hinreichender Genauigkeit werden unter diesem Gesichtspunkte auch diejenigen Tropfen zu behandeln seyn, welche an der Wand cylindrischer Röhren hängen, deren Durchmesser im Lichten von bedeutender Größe ist. Aus diesem Grunde sollen derartige Tropfen kurz als *ringförmige* bezeichnet werden.

Ist β die Krümmung der Meridiancurve im tiefsten Punkte des Tropfens, so erhält man ganz analog wie oben, jenen Punkt als Ursprung der Coordinaten gewählt, die Differentialgleichung der Meridiancurve wegen $R_2 = \infty$:

$$\frac{\frac{d^2 z}{dt^2}}{\left(1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \beta - \frac{z}{a^2}. \quad (2)$$

In beiden Fällen werden der Mantel des Cylinders und seine ebene horizontale Basis in Wirklichkeit niemals eine mathematische Ecke bilden, sondern durch ein krummes Rotationsflächenstück verbunden seyn, dessen Meridiancurve einen sehr kleinen Krümmungsradius besitzt. Da jedoch dieser Krümmungsradius, so klein er auch sey, schon der Constitution der natürlichen Körper nach, immer noch als unendlich groß angenommen werden darf gegen den Radius der Wirkungssphäre der Molekularkräfte, auf deren Annahme die Entwicklung der gebrauchten Gleichungen beruht, so gelten letztere auch für die Kante. Es mag der Ausdruck *Kante* nunmehr kurzweg für das verbindende Rotationsflächenstück gebraucht werden.

Nach den oben angegebenen Bedeutungen des Contingenzwinkels i und des Randwinkels ω gelten nunmehr für den Rand die Gleichungen:

$$\sin(\omega + i) = \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \text{ und } \cos(\omega + i) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}, \quad t = R.$$

Im Speciellen gehen dieselben über, wenn der Tropfen den Mantel des Cylinders berührt, für $\omega = \frac{\pi}{2}$ in

$$\sin(\omega + i) = \cos i \text{ und } \cos(\omega + i) = -\sin i;$$

und wenn der Tropfen nur an der Basis hängt, für $\omega = 0$ in:

$$\sin(\omega + i) = \sin i, \quad \cos(\omega + i) = \cos i.$$

Der Contingenzwinkel i ist, wie gesagt, constant für dieselbe Flüssigkeit und denselben festen Körper; der Winkel ω dagegen sehr schnell veränderlich auf dem schmalen Flächenstück, welches den Uebergang zwischen Basis und Mantel des Cylinders bildet (*Kante*). Zugleich ist dieser Winkel unbekannt; denn wenn nur die Krümmung der Kante scharf genug gewählt wird, darf man

ohne Fehler den Radius der Basis und jedes Punktes der Kante gleich dem Radius des Cylinders R annehmen, so daß zu demselben R jeder Werth von ω zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gehören kann. Da über den Verlauf der Krümmung der Kante nichts bekannt ist, wird daher der Randwinkel ω erst aus der Gleichung für die Oberfläche des Tropfens gefunden werden können, indem man $t = R$ setzt. An Stelle der Gleichungen 4 und 5 in (I) traten nämlich hier die Gleichungen $R = \text{const.}$ (der gegebene Cylinderradius) und, im Falle der Tropfen am Mantel des Cylinders hängt, $\angle \omega = \frac{\pi}{2}$; falls aber die Flüssigkeit an der Kante abschneidet:

$$h = h_0 = 2 a^2 \gamma - c,$$

oder, im 2. Falle, $h = h_0 = a^2 \beta - c.$

Wenn der Tropfen zerreißt, wird $c = 0$, $h = h_0 = 2 a^2 \gamma$ oder $a^2 \beta$. Hierdurch ist die Länge eines Tropfens gegeben, welche derselbe höchstens erreichen kann, oder in anderen Worten: *Das Product aus der Länge eines im Zerreißen begriffenen Tropfens und seinem Krümmungsradius im tiefsten Punkte hat für jede Flüssigkeit einen constanten Werth.* Dieser Werth ist bei einem kreisförmigen Tropfen $2 a^2$, bei einem ringförmigen a^2 , was sich auch dahin aussprechen läßt: *Wenn ein kreisförmiger Tropfen und ein ringförmiger dieselbe Krümmung der Meridiancurve im tiefsten Punkte besitzen, so hat ersterer im Falle des Zerreißens die doppelte Länge als letzterer.*

Dieser Satz hat sein Analogon in dem Verhältniß der Steighöhe von Flüssigkeiten in Capillarröhren zu der zwischen parallelen Platten. Ist der Durchmesser der Capillarröhren gleich der Distanz der Platten und beide so klein, daß die Meridiancurve als Halbkreis aufzufassen ist, so tritt der erwähnte Satz in Anwendung.

Da die rechte Seite der Gleichung (1) oder (2) stets positiv bleiben muß (denn $z = h = 2 a^2 \gamma$ ist der äußerste Fall), so kann man die Bedingung der Existenz eines Trop-

fens auch dahin aussprechen, daß man sagt, *die Krümmung desselben dürfe nie gleich Null werden*. Demnach ergibt sich zunächst, daß, wenn die Krümmung der Oberfläche in einem Punkte positiv ist, sie überall positiv sein muß. Denn da nach der Natur der Aufgabe die Krümmung der Oberfläche eine stetige sein muß, so könnte sie nur durch den Uebergang durch Null an irgend einem Punkte negativ werden. In jedem solchen Punkte ohne Krümmung tritt aber der Grenzfall des Gleichgewichts ein, d. h. der Fall, in welchem der Tropfen physikalisch zerreißt.

Für *ringförmige Tropfen und Wulste* fällt die Krümmung der Oberfläche mit der der Meridiancurve zusammen; es ergibt sich somit, *daß ihre Oberfläche dem festen Körper entweder stets die concave oder stets die convexe Seite zukehren muß*.

Das Volumen eines kreisförmigen Tropfens ist nach I, 7, indem man jetzt $h_0 = h$ setzt,

$$T = 2a^2 R \pi \sin(\omega + i) - (2a^2 \gamma - h) R^2 \pi. \quad (3.)$$

Denn die Dimensionen der Kante sind offenbar gegen h und R zu vernachlässigen; die nahezu unendlich große Krümmung der Meridiancurve des festen Körpers an der Kante tritt nur in der Veränderlichkeit von ω auf. Das Volumen des maximalen Tropfens ist

$$T_m = 2a^2 R \pi \sin(\omega + i).$$

Verlangt man, daß ein solcher Tropfen zugleich einen bestimmten Randwinkel ω besitze, so ist dies im Allgemeinen nicht möglich, giebt man jedoch für ω den speciellen Werth *Null*, d. h. hängt der Tropfen nur an der horizontalen Basis, so wird dadurch der Radius des Tropfens, welcher jetzt nicht mehr gleich dem des Cylinders R zu sein braucht, unbestimmt — er sei gleich r ; man hat dann zur Bestimmung von h , p , r und t die vier Gleichungen:

$$h = 2a^2 \gamma = f(a, \gamma, r), \quad tg i = f'(a, \gamma, r)$$

und $T = 2a^2 r \pi \sin i$.

Hieraus folgt: *Bei jedem Tropfen, welcher auf der untern Seite einer horizontalen Ebene hängt, haben Länge,*

Radius, Volumen und Krümmung im tiefsten Punkte für jede Flüssigkeit constante Werthe, im Augenblicke, wo der Tropfen zerreißt.

Setzt man den Contingenzwinkel i gleich Null, indem man sich der Einfachheit wegen den ganzen Cylinder mit einer unendlich dünnen Flüssigkeitsschicht benetzt denkt, so erhält man für einen Tropfen von maximaler Länge:

$$T_{\infty} = 2a^2 R \pi \sin \omega$$

und für einen den Mantel des Cylinders berührenden Tropfens ($\omega = \frac{\pi}{2}$)

$$T_{90} = 2a^2 R \pi - (2a^2 \gamma - h) R^2 \pi.$$

Es erhellt aus diesen Gleichungen, daß für das Volumen hängender Tropfen in Bezug auf ihr Verhältniß zum Radius so einfache Beziehungen nicht bestehen, wie die Proportionalität zwischen dem Radius der Capillarröhren und der gehobenen Flüssigkeitsmenge. Vielmehr tritt hier der Randwinkel ω auf, und man hat den Satz: *Das Volumen hängender Tropfen von maximaler Länge ist proportional dem Producte aus ihrem Radius und dem Sinus des Randwinkels.*

Man sieht zugleich, daß immer das Volumen eines hängenden Tropfens kleiner ist, als das von einer Capillarröhre von gleichem Radius gehobene Flüssigkeits-Volumen.

Wenn jedoch der Radius des Cylinders sehr klein ist, so kann trotzdem ein verhältnißmäßig bedeutendes Volumen getragen werden, indem sich die Flüssigkeit am Cylinder hinaufzieht. Alsdann wird in Formel (4) das zweite Glied, welches R^2 enthält, im Verhältniß zu dem ersten R linear enthaltenden Gliede sehr klein werden und ohne erheblichen Fehler vernachlässigt werden können. Ebenso wird das von dem Volumen T_{90} noch abzuziehende Volumen des benetzten Cylinders, welches stets kleiner als $2a^2 \gamma R^2 \pi$ seyn muß, zu vernachlässigen seyn. Nunmehr erhält man

$$T = 2a^2 R \pi,$$

d. h. das Volumen von Tropfen, welche an dem Mantel sehr

dünner (fadenförmiger) Cylinder hängen, ist proportional dem Radius (resp. Umfang) des Cylinders.

III.

Ringförmige Tropfen.

Zunächst stellen wir eine Formel für das Volumen ringförmiger Tropfen her. Wir multipliciren Gleichung II, 2 mit dt und integriren von $t = 0$ bis $t = B$, worin B die halbe Breite der Basis des ringförmigen Cylinders von sehr großem Radius sein soll, an welchem der Tropfen hängt. Es wird

$$\sin(\omega + i) = \beta B - \frac{1}{a^2} \int_0^B z dt.$$

Das Integral rechts stellt den Flächeninhalt dar, welcher von der Abscisse B , der Ordinate h und der zugehörigen Meridiancurve eingeschlossen wird. Der Flächeninhalt F des Meridiandurchschnittes ergibt sich:

$$F = 2Bh - 2 \int_0^B z dt, \text{ d. i.}$$

$$F = 2a^2 \sin(\omega + i) - 2(a^2 \beta - h)B.$$

Nach den gewählten Einheiten in Millimetern giebt diese Formel gleichzeitig das Volumen eines Tropfenstücks, welches zwischen zwei in der Entfernung von einem Millimeter zur Längsrichtung des Tropfens senkrecht gelegten Ebenen enthalten ist. Das Volumen eines Theiles von der beliebigen Dicke L wird demnach durch Multiplication mit L erhalten. Es sollen im speciellen solche Tropfen in Betracht gezogen werden, welche am untern Ende geraderventicaler cylindrischer Röhren von hinreichend großem Radius und der Wandstärke $2B$ hängen, und zwar soll unter r das arithmetische Mittel zwischen dem Radius der äußern und innern Röhrenwand verstanden werden, also die Entfernung des tiefsten Punktes des Tropfens von der Axe des Cylinders. Der Schwerpunkt des Querschnitts, durch dessen Rotation um die Cylinderaxe der Tropfen

erzeugt gedacht werden kann, liegt wegen der Symmetrie desselben zu der durch den tiefsten Punkt gehenden Verticalen in dieser selbst. Nach einem bekannten Satze von Guldin ist demnach das *Volumen des gesammten ringförmigen Tropfens*, wenn $U = 2 r \pi$ den Umfang des vom Schwerpunkt (oder dem tiefsten Punkte) beschriebenen Kreises bedeutet:

$$V = 2 U \{ a^2 \sin(\omega + i) - (a^2 \beta - h) B \}. \quad (1.)$$

Man bemerkt sofort, *dafs die Volumina ringförmiger Tropfen unter sonst gleichen Umständen dem Umfange U proportional sind.*

Im Folgenden wird U als ein für alle Mal gegeben angesehen werden. Es sei noch bemerkt, dafs die im Problem auftretenden Gröfsen ω , β , h , B von U insofern vollständig unabhängig sind, als U nur in der Formel für das Volumen vorkommt.

Multiplicirt man Gleichung II, 2 mit dz und integrirt, so wird

$$-\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} = \beta z - \frac{z^2}{2a^2} + \text{Const.}^8)$$

Für $z = 0$ soll werden $\frac{dz}{dt} = 0$, also $-1 = \text{Const.}$, so dafs:

$$-\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} = \beta z - \frac{z^2}{2a^2} - 1. \quad (2.)$$

Für $z = h$ erhält man hieraus

$$1 - \cos(\omega + i) = \beta h - \frac{h^2}{2a^2}, \text{ woraus}$$

$$h = a^2 \beta \pm \sqrt{a^4 \beta^2 - 2a^2(1 - \cos(\omega + i))};$$

da stets $h < a^2 \beta$, so gilt nur das untere Zeichen, also schliesslich:

$$h = a^2 \beta - \sqrt{a^4 \beta^2 - 2a^2(1 - \cos(\omega + i))}. \quad (3)$$

8) Die Wurzel hat das positive Zeichen, so lange ϑ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, was hier immer der Fall ist.

Demnach wird der Grenzfall des Gleichgewichts oder das Maximum von h erreicht, wenn

$$a^2 \beta^2 = 2 (1 - \cos (\omega + i)) = 4 \sin^2 \frac{1}{2} (\omega + i)$$

oder

$$\sin \frac{1}{2} (\omega + i) = \frac{1}{2} a \beta.$$

Ferner ist

$$\cos (\omega + i) = 1 - \frac{1}{2} a^2 \beta^2 \text{ und } \sin (\omega + i) = a \beta \sqrt{1 - \frac{1}{4} a^2 \beta^2}.$$

Statt dessen kann man auch schreiben, weil $\beta = \frac{h}{a^2}$:

$$\cos (\omega + i) = 1 - \frac{h^2}{2a^2} \text{ und } \sin (\omega + i) = \frac{h}{a} \sqrt{1 - \frac{h^2}{4a^2}}.$$

Zu den Relationen (1) und (3), wobei wir uns zur Vereinfachung wieder $\angle i = 0$ gesetzt denken, wird aus der noch unbekannten Integralgleichung noch eine Beziehung treten von der Form $B = \varphi (a, \beta, \omega)$.

Man hat dann zwischen den fünf Größen V , B , h , β , ω drei Gleichungen, so daß also noch zwei derselben willkürlich sind. Fügt man noch die Bedingung des Grenzfalles des Gleichgewichts als vierte hinzu, nämlich $h = \beta a^2$, so wird das Volumen

$$V = 2 U a^2 \sin \omega,$$

d. h. das Volumen ringförmiger Tropfen im Augenblicke des Zerreißens ist proportional dem Sinus des Randwinkels.

Nach eben entwickelten Formeln wird

$$V = U a^3 \beta \sqrt{1 - \frac{1}{4} a^2 \beta^2} = 2 U a h \sqrt{1 - \frac{h^2}{4a^2}}. \quad (4.)$$

Eine der Größen, z. B. h , kann noch als willkürlich angesehen werden. Man erhält dadurch in (4) eine Beziehung zwischen dem Volumen ringförmiger Tropfen und ihrer Länge. Die Länge h ist, wie die Erfahrung lehrt, überhaupt eine kleine Größe. Beschränkt man sich also auf Tropfen, welche nur eine geringe Länge (d. h. auch β und ω klein) erreichen, so kann man das Glied $\frac{h^2}{4a^2}$ gegen 1 vernachlässigen, und man erhält innerhalb gewisser Grenzen:

$$V = 2 U a h.$$

Demnach gelten für zerreisende ringförmige Tropfen in den erwähnten Grenzen die Sätze:

Die Volumina ringförmiger Tropfen von geringer Länge verhalten sich wie diese Längen.

Die Längen der Tropfen sind direct proportional dem Umfange U .

Die Längen der Tropfen von bestimmtem Gewicht sind für jede Flüssigkeit constant.

Das Gewicht eines Tropfens ist direct proportional der Länge des Tropfens.

Giebt man anstatt des Grenzfalles des Gleichgewichts als vierte Bedingung, daß der Tropfen den Mantel des Cylinders berühre, also $\angle \omega = \frac{\pi}{2}$, $\sin \omega = 1$, so wird

$$h = a^2 \beta - \sqrt{a^4 \beta^2 - 2a^2} \text{ und } V = 2U(a^2 - a\sqrt{a^2 \beta - 2} \cdot B).$$

Die Bedingung, daß solche Tropfen möglich seyen, ist Reellität des zweiten Gliedes in der Klammer, d. h. es muß seyn

$$\beta > \frac{\sqrt{2}}{a}.$$

Der Grenzfall $a\beta = \sqrt{2}$ fällt mit dem Grenzfall des Gleichgewichts zusammen, indem, wie natürlich, $h = a^2 \beta$ wird, d. i. hier

$$h = a\sqrt{2}.$$

Indem man aber auf diese Weise die Bedingungen $\sin \omega = 1$, $h = a^2 \beta$ gleichzeitig gelten läßt, sind nunmehr alle fünf Größen vollständig bestimmt, nämlich, resp.

$$B = B_1^9), V = 2Ua^2, \beta = \frac{\sqrt{2}}{a}, h = a\sqrt{2}, \omega = \frac{\pi}{2}.$$

Demnach kann man auch schreiben

$$V = Uh^2,$$

d. h. Es giebt für jede Flüssigkeit eine bestimmte Breite B_1 ringförmiger Tropfen, für welche das Volumen gleich dem Producte aus dem Quadrate der Länge in den Umfang U wird.

9) Vergl. Abschn. VI.

Ein solcher Tropfen stellt zugleich, wie aus der Form der Gleichung für V hervorgeht, den größten Werth des Volumens dar, welchen ein ringförmiger Tropfen unter den günstigsten Umständen erlangen kann.

Die zugehörige Länge des Tropfens $h = a\sqrt{2}$ ist die größte aller Längen, welche ein den Mantel des Cylinders berührender ringförmiger Tropfen erreichen kann.

Unter Zugrundelegung des von Brunner¹⁰⁾ für Wasser von 0° C. gefundenen Werthes $2a^2 = 15,332$ Quadr.-Millim., welches zugleich einer der größten der von den verschiedenen Beobachtern angegebenen Werthe von $2a^2$ ist, ergibt sich diese maximale Länge

$$h = 3,916^{mm}$$

und für Aether bei 0° C., ebenfalls nach Brunner, $h = 2,31^{mm}$. Für Tropfen, welche nur an der Basis hängen, folgt endlich

$$V = 2U(a^2 \sin i - (a^2 \beta - h)B)$$

und
$$h = a^2 \beta - \frac{V a^4 \beta^2 - 2a^2(1 - \cos i)}{2a^2}$$

Aus beiden Formeln zeigt sich, daß alsdann für $i = 0$ keine Tropfen mehr möglich sind. Die praktische Möglichkeit ringförmiger Tropfen überhaupt scheint sehr problematisch.

IV.

Integralgleichung kleiner Tropfen.

Nach den vorangegangenen Bemerkungen über Volumen und Länge der Tropfen soll nunmehr die Gestalt der Oberfläche untersucht werden. Für einen *kreisförmigen Tropfen* tritt somit die Forderung auf, das Integral der Differentialgleichung II, 1:

- 10) Die in der Theorie der Capillarität so vielfach auftretende Constante $2a^2$ liegt nach den Beobachtungen von Gay-Lussac, Frankenheim, Sondhaus, Artur, Hagen, Brunner, Bède bei Temperaturen von 0° bis 16° C. für Wasser in den Grenzen von 15,523 bis 14,84 Quadratmillimetern. Für Aether beträgt $2a^2$ bei 0° C. 5,35 Quadratmillimeter, für Olivenöl bei 0° C. 7,46 Quadratmillimeter. Vergl. Brunner, Untersuchungen über die Cohäsion der Flüssigkeiten, Poggendorff's Annalen Bd. LXX., S. 522 und Beer a. a. O. S. 133.

$$\frac{\frac{d^2 z}{dt^2}}{\left(1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{1}{t} \frac{dz}{dt}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} = 2\gamma - \frac{z}{a^2} \quad (\text{II, 1.})$$

zu ermitteln.

Die Integration in geschlossenen Ausdrücken ist nicht möglich. Obgleich später eine allgemeine Integration durch Reihenentwicklung bewerkstelligt werden soll, so wird doch im Nachstehenden zunächst der zu anschaulicheren Resultaten führende Weg allmählicher Annäherung eingeschlagen werden.

Bezeichnet man den reciproken Werth der Capillaritätsconstante mit ε , also $\varepsilon = \frac{1}{a^2}$, so kann man sich die Ordinate z dargestellt denken durch eine Reihe, welche nach Potenzen von ε fortschreitet, nämlich

$$z = z_0 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \dots \quad (1.)$$

Hierin sind z_0, z_1 usw. unbekannte Functionen von t , welche außerdem noch den Parameter γ enthalten werden.

Für eine erste Annäherung sollen nun die Dimensionen des Tropfens so klein gedacht werden, daß die mit a^2 dividirten Glieder vernachlässigt werden können;¹¹⁾ d. h. es soll ε im Verhältniß zu z so klein seyn, daß man in der Gleichung (1) nur das erste Glied $z = z_0$ in Betracht zu ziehen braucht. Man erhält alsdann, am besten von der halbintegrirten Form der Differentialgleichung (vergl. I, 6):

$$\frac{t \frac{dz}{dt}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} = \gamma t^2 - \varepsilon \int z t dt \quad (2.)$$

ausgehend, indem man das mit ε multiplicirte Glied fortläßt:

$$\frac{dz_0}{dt} = \frac{\gamma t}{\sqrt{1 - \gamma^2 t^2}}.$$

11) Ueber die Grenzen der Vernachlässigung vergl. den Werth von a^2 in Anm. 9.

Das Integral ist demnach, da für $z = 0$ auch $t = 0$:

$$\gamma z_0 = 1 - \sqrt{1 - \gamma^2 t^2} \text{ oder } z_0 = \varrho - \varrho \sqrt{1 - \frac{t^2}{\varrho^2}},$$

wenn ϱ den Krümmungsradius des Tropfens im tiefsten Punkte bedeutet. In der Form

$$t^2 + (\varrho - z_0)^2 = \varrho^2$$

erkennt man, *dafs die Oberfläche des Tropfens eine Kugel darstellt, deren Radius der Krümmungsradius des Tropfens im tiefsten Punkte ist, und deren Mittelpunkt die Coordinaten $z_0 = \varrho$ und $t = 0$ hat.*

Die Beziehungen zwischen den Bestimmungsstücken des Tropfens ergeben sich nun von selbst aus den bekannten Eigenschaften der Kugel. Man erhält für den Rand

$$\gamma h = 1 - \sqrt{1 - \gamma^2 R^2} \text{ oder } h = \varrho - \sqrt{\varrho^2 - R^2},$$

$$\sin(\omega + i) = \gamma R,$$

und das Volumen

$$T = \varrho h^2 \pi - \frac{1}{3} h^3 \pi = \frac{1}{2} R^2 \pi h + \frac{1}{6} h^3 \pi.$$

Im Maximalfalle wird

$$h = \varrho = R, \angle \omega + i = \frac{\pi}{2}, T = \frac{2}{3} R^3 \pi.$$

Die allgemeine Formel für das Volumen II, 3 und die Beziehung $h = 2a^2 \gamma$ werden in unserem Falle illusorisch, weil wir nur mit Gröfsen rechnen, welche als unendlich klein anzusehen sind gegenüber den Gröfsen von der Ordnung a^2 . Die für sehr kleine Tropfen aufgestellten Formeln sind unabhängig von der Capillaritätsconstante und unterscheiden sich für verschiedene Flüssigkeiten nur durch die Grenzen, bis zu welchen die gemachten Vernachlässigungen gestattet sind.

Die Annäherung soll nun dadurch weiter getrieben werden, dafs man aus der Reihe (1) ein weiteres Glied in Betracht zieht und setzt $z = z_0 + z_1 \varepsilon$, wobei für z_1 nach obigem Resultat geschrieben wird $z_1 = \varrho - \varrho \sqrt{1 - \frac{t^2}{\varrho^2}}$. Jener Ausdruck wird in die Differentialgleichung eingeführt, und indem man alle Glieder vernachlässigt, welche ε in höheren Potenzen als in der ersten enthalten, der

Werth von z , berechnet. Hierbei soll festgehalten werden, daß γ die Krümmung der durch die zweite Annäherung zu erhaltenden Oberfläche bezeichnet, welche von der Krümmung $\frac{1}{\rho} = \gamma$, der bei der ersten Annäherung erhalten Kugel-
fläche um eine kleine GröÙe abweichen wird.

Wir setzen zur bequemerer Rechnung

$$v = \sqrt{1 - \frac{t^2}{\rho^2}}, \text{ also } t = \rho \sqrt{1 - v^2} \text{ und } z_0 = \rho (1 - v).$$

Gleichung (2) geht dadurch über in

$$-\frac{(1 - v^2) \frac{dz}{dv}}{\sqrt{v^2 + \frac{1 - v^2}{\rho^2} \left(\frac{dz}{dv}\right)^2}} = \gamma \rho^2 (1 - v^2) + \varepsilon \rho^2 \int_1^v z v dv. \quad (3.)$$

Für $t = 0$ wird $v = 1$, für $t = \rho$ wir $v = 0$. Setzt man jetzt $z = \rho (1 - v) + \varepsilon z_1$, so wird

$$\frac{dz}{dv} = -\rho + \varepsilon \frac{dz_1}{dv},$$

und weil die mit ε^2 multiplicirten Glieder vernachlässigt werden

$$\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 = \rho^2 - 2\rho \frac{dz_1}{dv} \varepsilon,$$

ferner

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{v^2 + \frac{1 - v^2}{\rho^2} \left(\frac{dz}{dv}\right)^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{\rho} (1 - v^2) \frac{dz_1}{dv} \varepsilon}} \\ &= 1 + \frac{1 - v^2}{\rho} \frac{dz_1}{dv} \varepsilon. \end{aligned}$$

Demnach wird

$$\frac{\frac{dz}{dv}}{\sqrt{v^2 + \frac{1 - v^2}{\rho^2} \left(\frac{dz}{dv}\right)^2}} = \varepsilon v^2 \frac{dz_1}{dv} - \rho.$$

Für das Integral erhält man

$$\varepsilon \rho^2 \int_1^v z v dv = \varepsilon \rho^2 \int_1^v (\rho - \rho v) v dv = -\frac{\varepsilon \rho^3}{6} (2v^3 - 3v^2 + 1). \quad (4.)$$

Durch Eintragen der Werthe kommt schliesslich zur Bestimmung von z_i die Differentialgleichung:

$$dz_i = \frac{\varrho - \gamma \varrho^2}{\varepsilon} \frac{dv}{v^2} - \frac{\varrho^3}{6} \left\{ -\frac{dv}{v^2} + \frac{2dv}{1+v} \right\},$$

und durch Integration:

$$z_i = -\frac{\varrho - \gamma \varrho^2}{\varepsilon v} - \frac{\varrho^3}{6} \left(2 \lg(1+v) + \frac{1}{v} \right) + \text{Const.}$$

Für $t = 0$, $v = 1$ wird $z = 0$, $z_i = 0$, also auch $z_i = 0$, d. h.

$$\varepsilon z_i = -(\varrho - \gamma \varrho^2) \left(\frac{1}{v} - 1 \right) - \varepsilon \frac{\varrho^3}{3} \left\{ \lg \frac{1+v}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v} - 1 \right) \right\}.$$

Demnach erhält man für z :

$$z = \varrho(1-v) + \left(\gamma \varrho^2 - \varrho - \frac{\varrho^3}{6a^2} \right) \left(\frac{1}{v} - 1 \right) - \frac{\varrho^3}{3a^2} \lg \frac{1+v}{2},$$

$$v = \sqrt{1 - \frac{t^2}{\varrho^2}}.$$

Für $t = \varrho$ wird $v = 0$; damit nun für diesen Werth z nicht unendlich werde, ist hinreichende und nothwendige Bedingung, dass man habe:

$$\gamma \varrho^2 - \varrho - \frac{\varrho^3}{6a^2} = 0,$$

oder

$$\gamma = \frac{1}{\varrho} + \frac{\varrho}{6a^2}. \quad (5.)$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung von ϱ aus der Constante γ , so dass nachher die Gleichung für z nur noch γ als die der zweiten Annäherung entsprechende Krümmung im tiefsten Punkte enthält. Schreibt man diese Gleichung:

$$\gamma = \gamma_i + \frac{\varepsilon}{6\gamma_i},$$

so wird:

$$\gamma_i = \frac{1}{2} \gamma \pm \sqrt{\frac{1}{4} \gamma^2 - \frac{1}{6} \varepsilon},$$

wobei das obere Vorzeichen zu nehmen ist, da γ_i von γ nur um eine kleine Grösse verschieden sein soll. Durch Entwicklung nach ε erhält man:

$$\gamma_i = \gamma - \frac{\varepsilon}{6\gamma} = \gamma - \frac{1}{6a^2\gamma},$$

und für ϱ :

$$\varrho = \frac{1}{\gamma_i} = \gamma_i^{-1} = \left(\gamma - \frac{\varepsilon}{6\gamma}\right)^{-1} = \frac{1}{\gamma} + \frac{\varepsilon}{6\gamma^3}, \quad (6.)$$

oder wenn P den Krümmungsradius des Tropfens im tiefsten Punkte bedeutet:

$$\varrho = P + \frac{1}{6a^2} P^3.$$

Demnach erhält man endlich als zweite Annäherung für die Oberfläche des Tropfens, welche nunmehr bis auf Größen von der Ordnung $\varepsilon^2 = a^4$ genau ist:

$$z = \varrho (1 - v) + \frac{\varrho^3}{3a^2} \lg \frac{2}{1+v}. \quad (7.)$$

Ist R wieder der Radius des Cylinders, so erhält man für den Rand, wenn $\sqrt{1 - \frac{R^2}{\varrho^2}} = v_R$,

$$h = \varrho (1 - v_R) + \frac{\varrho^3}{3a^2} \lg \frac{2}{1+v_R}. \quad (8.)$$

Mit Hilfe von (2), (3) und (4) erhält man

$$\sin \vartheta = \gamma \varrho \sqrt{1 - v^2} - \frac{\varrho^2}{6a^2} \frac{2v^3 - 3v^2 + 1}{\sqrt{1 - v^2}},$$

demnach für $\vartheta = \omega + i$, $t = R$, $v = v_R$:

$$\sin (\omega + i) = \gamma \varrho \sqrt{1 - v_R^2} - \frac{\varrho^2}{6a^2} \frac{2v_R^3 - 3v_R^2 + 1}{\sqrt{1 - v_R^2}}. \quad (9.)$$

Einfacher wird der Ausdruck, wenn man v_R durch seinen Werth $\sqrt{1 - \frac{R^2}{\varrho^2}}$ ersetzt. Man erhält ihn direct aus (2.), indem man den Werth von z einsetzt und über t von o bis R integrirt.

$$\sin (\omega + i) = \gamma R - \frac{1}{2} \varepsilon \varrho R + \frac{\varepsilon}{3} \frac{\varrho^3}{R} - \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{R} (\varrho^2 - R^2)^{\frac{3}{2}},$$

und bloß durch ϱ ausgedrückt:

$$\sin (\omega + i) = \frac{R}{\varrho} - \frac{\varepsilon}{3} \left(\varrho R - \frac{\varrho^3}{R} \right) - \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{R} (\varrho^2 - R^2)^{\frac{3}{2}}, \quad (10.)$$

und allein durch γ ausgedrückt:

$$\sin (\omega + i) = \gamma R - \frac{\varepsilon R}{2\gamma} + \frac{\varepsilon}{3\gamma^3 R} - \frac{\varepsilon}{3\gamma^3 R} (1 - \gamma^2 t^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Fügt man noch die Gleichung für das Volumen hinzu:

$$T = 2a^2 R \pi \sin(\omega + i) - (2a^2 \gamma - h) R^2 \pi, \quad (11.)$$

so ist durch die Gleichungen 6, 7, 8, 10, 11 das Problem gelöst, für jedes t das zugehörige z zu finden, wenn von den fünf Größen T , ω , h , γ , R zwei willkürlich gegeben sind. Fügen wir noch eine Bedingung hinzu, so sind dadurch alle jene Größen bis auf eine bestimmt; als letztere soll der Radius R aufgefaßt werden, und die vierte Bedingung soll sein, daß die Hilfsgröße $\rho = R$ sei. Es wird alsdann $v_R = 0$, wodurch nach (9):

$$\sin(\omega + i) = \gamma \rho - \frac{\rho^2}{6a^2},$$

was nach (5) gleich 1 ist; desgleichen folgt aus (10) für $\rho = R$: $\sin(\omega + i) = 1$, demnach $\angle \omega + i = \frac{\pi}{2}$.

Ferner wird in diesem Falle:

$$h = R + \frac{R^3}{3a^2} \lg 2.$$

Wie man aus (7) sieht, ist dies zugleich der Fall, in welchem h sein Maximum für den Cylinder, dessen Radius R ist, erreicht. Denn da v nicht negativ werden kann, z aber stetig wächst, wenn v abnimmt, so ist $v = v_R = 0$ der kleinste Werth, welchen v , und $z = h = R + \frac{R^3}{3a^2} \lg 2$ der größte Werth, welchen z (resp. h) annehmen kann.

Die Krümmung im tiefsten Punkte erhält den Werth:

$$\gamma = \frac{1}{R} + \frac{R}{6a^2},$$

und man findet endlich:

$$T = \frac{2}{3} R^3 \pi + \frac{R^5}{3a^2} \pi \lg 2.$$

Dies ist also dasjenige Volumen, welches ein Tropfen vom Radius R besitzt, wenn seine Länge ihr Maximum erreicht; ferner haben wir gesehen, daß alsdann auch der Winkel ω sein Maximum erreicht. Es folgt somit, daß dieses Volumen das größte ist, welches ein Tropfen vom Radius R erreichen kann. Aus der Vergleichung dieser Formeln mit den bei der ersten Annäherung erhaltenen

sieht man die GröÙe der anzubringenden Correction. Aus den Formeln für die Maximalwerthe des Tropfens ergibt sich im Speciellen unter Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung $\frac{1}{a^4}$:

Beschreibt man mit dem Radius des Cylinders eine Halbkugel unterhalb der Basis, so übertrifft ein an der Basis des Cylinders hängender Tropfen im Maximum an seiner Länge den Radius der Halbkugel um $\frac{R^3}{3a^2} \lg 2$, in seiner Krümmung die Krümmung der Halbkugel um $\frac{R}{6a^2}$, an Volumen das Volumen der Halbkugel um $\frac{R^3}{3a^2} \pi \lg 2$.

Wollte man die Annäherung weitertreiben, zunächst durch Einführung des Gliedes $\varepsilon^2 z_2$, so kommt man schon dadurch auf einen sehr complicirten logarithmisch-algebraischen Ausdruck, so daß wir auf die weitere Ausführung verzichten.

V.

Integralgleichung flacher Tropfen.

Es soll nunmehr eine Annäherung für eine andere Art specieller Tropfen, nämlich für sehr flache kreisförmige Tropfen gesucht werden. Wir führen in der Differentialgleichung I, 5 die Substitution ein:

$$z = y + 2a^2 \gamma, \quad t = ax, \quad \text{demnach} \quad y = z - 2a^2 \gamma, \quad x = \frac{t}{a}.$$

Die Gleichung nimmt dann nach Beseitigung des Nenners folgende Form an:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} \left[1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] + y \left[1 + \frac{1}{a^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} = 0. \quad (1.)$$

Man kann sich nun, wie vorhin z nach Potenzen von ε , so hier y nach Potenzen des Parameters γ entwickelt denken. Da, wie aus Früherem folgt, in unserem Falle für $\gamma = 0$ keine Werthe von y und z existiren können, so darf als erstes Glied der Entwicklung geschrieben werden $y = y_1 \gamma$. Wird nun die *Krümmung als sehr klein*

angesehen, so erhält man für die Tropfenoberfläche einen angenäherten Werth, wenn man mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von γ nur dieses Glied in Rechnung zieht. Setzt man in (1) $y = y_0 \gamma$ und läßt die Glieder von höherer Ordnung fort (gerade Potenzen treten nicht auf), so erhält man:

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy_0}{dx} + y_0 = 0. \quad (2.)$$

Diese Annahme sehr geringer Krümmung fällt zusammen mit derjenigen, daß Winkel ϑ stets sehr klein ist, d. h. daß man die höheren Potenzen von $\frac{dz}{dt}$ vernachlässigen kann, wie man sich leicht überzeugt.

Das allgemeine Integral¹²⁾ der Gleichung (2) wird ausgedrückt durch

$$y = A J_{(x)} + Y_{(x)},$$

wobei A und B willkürliche Constanten sind und $J_{(x)}$ die Bessel'sche Function bedeutet, welche dargestellt wird durch die stets convergente Reihe

$$J_{(x)} = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

oder durch das bestimmte Integral:

$$J_{(x)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos \varphi) d\varphi.$$

Ueber die Function $Y_{(x)}$, welche im Folgenden nicht gebraucht wird, bemerken wir nur, daß sie für $x = 0$ Unendlich wird, woraus folgt, daß in unserm Falle zu setzen ist $B = 0$. Da für $t = 0$ auch $x = 0$ und $z = 0$, also $y = -2a^2 \gamma$, so folgt wegen

$$J_{(0)} = 1,$$

daß $A = -2a^2 \gamma$, und demnach $y = -2a^2 \gamma J_{(x)}$, oder

$$z = 2a^2 \gamma \left\{ 1 - J_{(x)} \left(\frac{t}{a} \right) \right\}.$$

12) S. u. A.: Carl Neumann, Theorie der Bessel'schen Functionen, S. 41, 45, 46.

Ersetzt man J^o durch seine Reihe, so erhält man

$$z = \frac{1}{2} \gamma t^2 \left\{ 1 - \frac{1}{4^2} \frac{t^2}{a^2} + \frac{1}{4^2 \cdot 6^2} \frac{t^4}{a^4} - \dots \right\} \quad (3.)$$

als Gleichung der Meridiancurve eines flachen Tropfens.

Hieraus wird für den Rand des Tropfens:

$$h = 2a^2 \gamma \left[1 - J^o \left(\frac{R}{a} \right) \right] = \frac{1}{2} \gamma R^2 \left(1 - \frac{1}{4^2} \frac{R^2}{a^2} + \frac{1}{4^2 \cdot 6^2} \frac{R^4}{a^4} - \dots \right). \quad (4.)$$

Der Contingenzwinkel i sei gleich Null. Wegen der Kleinheit des Randwinkels ω kann man dann setzen

$$\operatorname{tg} \omega = \omega = \sin \omega.$$

Demnach erhält man zunächst für ϑ

$$\vartheta = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{a} \frac{dz}{dx} = -2a\gamma \frac{dJ^o_{(x)}}{dx}.$$

Nach einer Relation zwischen den Bessel'schen Functionen mit dem Index 0 und dem Index 1 ist

$$\frac{dJ^o_{(x)}}{dx} = -J^1_{(x)},$$

$$\text{demnach } \vartheta = 2a\gamma J^1_{(x)} \text{ und } \omega = 2a\gamma J^1 \left(\frac{R}{a} \right). \quad (5a.)$$

Hierbei ist $J^1_{(x)}$ definirt durch eine Reihe oder ein bestimmtes Integral:

$$\begin{aligned} J^1_{(x)} &= \frac{x}{2} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6} - \dots \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \varphi \sin (x \cos \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Der Werth von ω läßt sich daher auch schreiben:

$$\omega = \gamma R \left\{ 1 - \frac{1}{2 \cdot 4} \left(\frac{R}{a} \right)^2 + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{R}{a} \right)^4 - \dots \right\} \quad (5b.)$$

Die Differentialgleichung, welche die Bessel'sche Function $J^1_{(x)}$ definirt, nämlich

$$\frac{d^2 J^1}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ^1}{dx} + \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) J^1 = 0$$

läßt sich für ϑ direct aus der Differentialgleichung II, 1

herleiten. Man multiplicire dieselbe mit $\frac{dz}{dt}$ und setze $\frac{dz}{dt} = t g \vartheta$, so geht sie über in

$$\cos \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\sin \vartheta}{t} = 2\gamma - \frac{z}{a^2},$$

und nach abermaliger Differentiation nach t :

$$\frac{d}{dt} \left[\cos \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\sin \vartheta}{t} \right] = -\frac{1}{a^2} t g \vartheta.$$

Setzen wir $\sin \vartheta = \mu$, so erhält man:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{d\mu}{dt} + \frac{\mu}{t} \right] = -\frac{\mu}{a^2 \sqrt{1-\mu^2}}$$

oder

$$\frac{d^2 \mu}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d\mu}{dt} - \frac{\mu}{t^2} + \frac{\mu}{a^2 \sqrt{1-\mu^2}} = 0.$$

Diese neue Form der Differentialgleichung der Capillar-Oberflächen ist in unserm Falle dahin zu specialisiren, daß man setzt

$$\vartheta = \sin \vartheta = \mu,$$

und die höheren Potenzen von μ vernachlässigt. Es wird

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d\vartheta}{dt} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{t^2} \right) \vartheta = 0,$$

was nach der Substitution $t = ax$ übergeht in die verlangte Gleichung

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\vartheta}{dx} + \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \vartheta = 0.$$

Zu den Gleichungen 4 und 5 a, resp. 5 b tritt behufs vollständiger Lösung des Problems noch die Beziehung für das Volumen

$$T = 2a^2 R \pi \cdot \omega - (2a^2 \gamma - h) R^2 \pi,$$

welche auch die Form annimmt:

$$T = 4a^3 \gamma R \pi J' \left(\frac{R}{a} \right) - 2a^2 \gamma R^2 \pi J' \left(\frac{R}{a} \right) = 2a^2 \gamma R \pi \left\{ 2a J' \left(\frac{R}{a} \right) - R J' \left(\frac{R}{a} \right) \right\}.$$

Mit Einführung der Reihen für J^i und J^j wird:

$$T = 2a^2 \gamma R^2 \pi \left\{ \frac{1}{2 \cdot 4} \left(\frac{R}{a} \right)^2 - \frac{1}{2^3 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{R}{a} \right)^4 \right. \\ \left. + \dots (-1)^{n+1} \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 (2n-2)^2 2n(2n+2)} \left(\frac{R}{a} \right)^{2n} + \dots \right\}$$

Es bleibt noch der Grenzfall des Gleichgewichts zu untersuchen.

Aus den Formeln $h = 2a^2 \gamma (1 - J_{(x)})$, $x = \frac{R}{a}$ geht hervor, daß dieser Grenzfall erreicht wird, sobald $J_{(x)} = 0$ wird. Die Function $J_{(x)} = 0$ wird aber für unendlich viele Werthe von x gleich Null. Der kleinste positive Werth von x , für welchen $J_{(x)}$ verschwindet, sei x_0 ; dann wird $R_0 = ax_0$ der kleinste Werth von R sein, für welchen h sein Maximum $2a^2 \gamma$ erreicht. *Dieser Radius R_0 aber ist der größte Werth, welchen der Radius eines Cylinders haben darf, wenn an demselben überhaupt ein Tropfen der gedachten Art möglich seyn soll.*

Denn gäbe es einen derartigen Tropfen mit einem größeren Radius R , so würde im Verlaufe der Meridiancurve immer ein Werth von t existiren müssen, für welchen $x = x_0$ und $J_{(x)}$ wird, dann aber erhielte das zugehörige z den Werth $2a^2 \gamma$ und das Gleichgewicht wäre gestört.

Um eine untere Grenze für den Werth $x = x_0$, welcher $J_{(x)} = 0$ macht, zu finden, berücksichtige man, daß x_0 die Bedingung erfüllen soll

$$1 = \frac{x_0^2}{4} - \frac{x_0^4}{2^2 \cdot 4^2} + \dots = S,$$

und daß man immer hat

$$\frac{x_0^2}{4} > S,$$

Denkt man sich nun x von 0 an stetig wachsen, so wächst auch der Werth von S , für $x = x_0$ wird $S = 1$, demnach $\frac{x_0^2}{4} > 1$. Es muß also der Werth von x , welcher

$\frac{x^3}{4} = 1$ macht, d. h. der Werth $x = 2$ schon vorgekommen sein, woraus folgt, $x > 2$. Andererseits ist immer $\frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{4 \cdot 16} < 1$ oder $4 > x^3 - \left(\frac{x^2}{4}\right)^2$, also a fortiori $4 > x^3 - 1$, d. h. $x < \sqrt[3]{5}$. Demnach ergeben sich als Grenzen für den größten Cylinderradius R , an welchem flache Tropfen möglich sind:

$$2a < R < a\sqrt[3]{5},$$

das ist für Wasser bei 0° Celsius (s. Abschn. III.).

$$5,538 < R < 6,191 \text{ Millimeter.}$$

Bei der Kleinheit der Grenze, unter welcher t stets liegt, braucht man somit stets nur sehr wenige Glieder der Reihe in Rechnung zu ziehen. In dem Ausdrucke für z in (3) wird z. B. schon das dritte Glied $\frac{1}{4^2 \cdot 6^2} \frac{t^4}{a^4}$ selbst für den nahezu maximalen Werth $t = 2a$ so klein, daß der Fehler nur $\frac{1}{36}$ beträgt. Wir können daher statt der früheren Formeln folgende schreiben:

$$z = \frac{1}{2} \gamma t^2 \left(1 - \frac{t^2}{16a^2}\right), \quad h = \frac{1}{2} \gamma R^2 \left(1 - \frac{R^2}{16a^2}\right),$$

$$\omega = \gamma R \left(1 - \frac{R^2}{8a^2}\right), \quad T = \frac{1}{4} \gamma R^4 \pi.$$

Will man z. B. den Wendepunkt der Meridiancurve berechnen, so ist die Bedingung für denselben $\frac{d^2 z}{dt^2} = 0$, d. h.

$$\gamma - \frac{3\gamma t^2}{8a^2} = 0,$$

woraus $t = a\sqrt{\frac{8}{3}}$, $z = \frac{10}{9} a^2 \gamma$, $\mathcal{S} = \frac{2}{3} a \gamma \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{4}{9} a \gamma \sqrt{6}$, und das Volumen bis zum Wendepunkte $T = \frac{1}{9} a^4 \gamma \pi$. Andererseits ergibt sich für einen Tropfen an einem Cylinder von 1 Centimeter Durchmesser, also $R = 5^{\text{mm}}$, die Krümmung im tiefsten Punkte

$$\gamma = \frac{4T}{625\pi}.$$

Eine weitere Annäherung auf dem eingeschlagenen Wege zu suchen, indem man setzt $y = y_0 \gamma + y_1 \gamma^2$, erscheint nicht vortheilhaft, weshalb dieselbe hier übergangen werden soll.

VI.

Integralgleichung ringförmiger Tropfen.

Die Differentialgleichung eines *ringförmigen Tropfens* war in III, 2 auf die Form gebracht worden:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} = \frac{z^2}{2a^2} - \beta z + 1, \quad (\text{III, 2.})$$

woraus sich ergibt:

$$z = a^2 \beta - \sqrt{a^4 \beta^2 - 2a^2 (1 - \cos \vartheta)}$$

und

$$t = \int \frac{(z^2 - 2a^2 \beta z + 2a^2) dz}{\sqrt{-(z^2 - 2a^2 \beta z)(z^2 - 2a^2 \beta z + 4a^2)}}.$$

Wir setzen

$$z = a^2 \beta - a^2 \beta \cos \varphi, \quad x = \frac{1}{2} a \beta, \quad d\varphi = \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi}, \quad (1.)$$

wodurch kommt

$$t = 2a \int_0^{\varphi} d\varphi d\varphi - a \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta \varphi}, \quad \cos \varphi = \frac{a^2 \beta - z}{a^2 \beta}. \quad (2.)$$

Die Gleichungen (1) und (2) bestimmen jeden Punkt der Meridiancurve durch die unabhängige Variable φ ; wenn φ alle Werthe von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ durchläuft, so durchläuft z alle Werthe von 0 bis $a^2 \beta$; fügt man die Gleichungen hinzu

$$\frac{1}{2} B = 2a \int_0^{\varphi} \Delta \varphi d\varphi - a \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta \varphi}, \quad \cos \varphi = \frac{a^2 \beta - h}{a^2 \beta},$$

$$h = a^2 \beta = \sqrt{a^4 \beta^2 - 2a^2 [1 - \cos(\omega + i)]},$$

$$V = 2U [a^2 \sin(\omega + i) - (a^2 \beta - h) B],$$

so ist das Problem vollständig gelöst. Vergl. S. 12.

Für den *Grenzfall des Gleichgewichts* erhält man wegen $h = a^2 \beta$: $\cos \varphi = 0$, demnach $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$ etc.,
woraus

$$B = 4a \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \Delta \varphi d\varphi - 2a \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta \varphi},$$

oder, wenn E und K resp. das vollständige elliptische Integral zweiter und erster Gattung bezeichnen,

$$B = 2a(2E - K)(2n + 1).$$

Hierbei muß jedoch n den Werth Null haben; denn hätte es irgend einen größeren Werth, so müßte unter den Radienvectoren t des Tropfens immer irgend ein t existiren, für welches $n = 0$, also $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und demnach $z = a^2 \beta$, also der Grenzfall des Gleichgewichts eintreten müßte. Die größte Breite, welche ein ringförmiger Tropfen erlangen kann, ist also

$$B = 2a(2E - K).$$

Alsdann wird ferner (s. Abschn. III.): $\sin \frac{1}{2}(\omega + i) = \frac{1}{2}a\beta = x$, und $V = 2Ua^2 \sin(\omega + i) = 4Ua^2 x \sqrt{1-x^2} = 4Ua^2 x x_1$, wenn x_1 den complementären Modul bezeichnet.

Fügt man noch die Bedingung $\omega = \frac{1}{2}\pi$ hinzu, so sind dadurch alle Dimensionen des Tropfens bestimmt (s. Abschnitt III.) Wegen $a\beta = \sqrt{2}$ erhält dann der Modul den Werth $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$, und dies gestattet eine bequeme numerische Berechnung von B . Es ist nämlich dann, wenn K das vollständige elliptische Integral erster Gattung mit complementärem Modul bezeichnet,

$$K = K_1 = 1,8540747^{12)}$$

und demnach $q = e^{-\frac{\pi K_1}{K}} = e^{-\pi} = 0,0432138$,

$$E = 1,3511453^{13)}$$

Es wird somit

$$B = 2a \cdot 0,8482159,$$

wodurch sich aus dem früher gebrauchten Werthe von $2a^2 = 15,332$ für Wasser von 0° C. ergibt

$$B = 4,697^{mm}.$$

12) Durège, Theorie der ellipt. Functionen, § 47, § 52.

13) Aus der Reihe $E = K - \frac{2\pi^2}{K} \left\{ \frac{q}{1-q^2} + \frac{2q^2}{1-q^4} + \frac{3q^3}{1-q^6} + \dots \right\}$.
Man erhält bereits für $q^4 = 0,0000035$. Vergl. Jacobi, *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*, § 47. Durège a. a. O.

Es ist dies die Breite eines Tropfens von der Länge (vergl. Abschn. III.):

$$h = 3,916^{\text{mm}}.$$

Setzt man

$$\int_0^q \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u, \text{ demnach } \varphi = am u,$$

so erhält man Ausdrücke für z und t in elliptischen Functionen.

(1) geht über in

$$z = a^2 \beta - a^2 \beta \cos am u,$$

und wegen der Relation¹³⁾

$$E(u) = \frac{E}{K} u + Z(u)$$

wird aus der Formel (2):

$$\begin{aligned} t &= a [2E(u) - u] = a \left\{ u \left(\frac{2E}{K} - 1 \right) - 2Z(u) \right\} \\ &= a \left\{ \frac{u(2E - K)}{K} - 2Z(u) \right\}. \end{aligned}$$

Wegen $\frac{1}{2} B = a(2E - K)$ kann man auch schreiben

$$t = \frac{uB}{2K} - 2aZ(u).$$

Der Grenzfall des Gleichgewichts, nämlich $z = h = a^2 \beta$, $t = \frac{1}{2} B = a(2E - K)$ wird erreicht, wenn $\varphi = am u = \frac{1}{2} \pi$, also wenn $u = K$. Hat der Modul $\kappa = \frac{1}{2} a\beta$ kleine Werthe, so eignen sich die zuletzt angegebenen Formeln zu annä-

hernden Berechnungen. Man erhält dann für $q = e^{-\frac{\pi K}{K}}$ einen kleinen Werth und kann nun mit Vortheil die Ausdrücke für $\cos am u$ und $Z(u)$ anwenden, welche sich für dieselben durch die Jacobi'sche Θ -Function ergeben. Es ist nämlich¹⁴⁾

$$\cos am u = 2 \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa}} \frac{\sqrt[4]{q} \cos \frac{\pi u}{2K} + \sqrt[4]{q^3} \cos \frac{3\pi u}{2K} + \dots}{1 - 2q \cos \frac{\pi u}{K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi u}{K} - \dots}$$

14) Jacobi, *fundamenta nova*, § 61.

$$\text{und } Z(u) = \frac{2\pi}{K} \frac{q \sin \frac{\pi u}{K} - 2q^4 \sin \frac{2\pi u}{K} + \dots}{1 - 2q \cos \frac{\pi u}{K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi u}{K} - \dots}.$$

Vernachlässigt man die Potenzen von q von q^3 an, und berücksichtigt, daß

$$2 \frac{\sqrt{x_i}}{\sqrt{x}} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots}{q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{3}{2}} + q^{\frac{5}{2}} + \dots},$$

so erhält man hieraus:

$$\sqrt{\frac{x_i}{x}} \sqrt{q} = 1 - 2q,$$

und demnach für $\cos amu$ und $Z(u)$ die einfachen Ausdrücke:

$$\cos amu = \frac{(1-2q) \cos \frac{\pi u}{2K}}{1 - 2q \cos \frac{\pi u}{K}} \text{ und } Z(u) = \frac{2\pi}{K} \frac{q \sin \frac{\pi u}{K}}{1 - 2q \cos \frac{\pi u}{K}}.$$

Ferner erhält man für K aus der Reihe¹⁵⁾

$$\frac{2K}{\pi} = 1 + 4 \left\{ \frac{q}{1-q} - \frac{q^2}{1-q^3} + \dots \right\}$$

$$K = \frac{\pi}{2} (1 + 4q + 4q^2) = \frac{\pi}{2} (1 + 2q)^2,$$

und daraus (s. Anm. 13)

$$E = \frac{\pi}{2} (1 - 4q + 20q^2),$$

demnach

$$2E - K = \frac{\pi}{2} (1 - 12q + 36q^2) = \frac{\pi}{2} (1 - 6q)^2.$$

Für q selbst erhält man wegen

$$\sqrt{x_i} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots}$$

mit der angegebenen Vernachlässigung:

$$q = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{x_i}}{1 + \sqrt{x_i}}.$$

15) Jacobi, a. a. O., § 40.

Auf folgende Weise erhält man einfache Ausdrücke für E und K durch den Modul und demnach durch β oder ω . Entwickelt man $\sqrt{x_i}$ nach Potenzen von q und bricht vor der dritten ab, so folgt

$$\sqrt{x_i} = \frac{1 - 2q + \dots}{1 + 2q + \dots} = 1 - 4q + 8q^2,$$

demnach

$$x_i = 1 - 8q + 32q^2 \text{ und } x^2 = 1 - x_i^2 = 16q - 128q^2.$$

Man kann nun mit Hilfe der Gleichung für K oder E in bequemer Weise q und q^2 eliminieren und erhält demnach

$$K = \frac{\pi}{32} (34 - 18x_i - 5x^2),$$

$$E = \frac{\pi}{32} (10 + 6x_i - x^2),$$

$$\text{endlich } 2E - K = \frac{\pi}{32} (3x^2 + 30x_i - 14).$$

Für den Grenzfall des Gleichgewichts (s. Abschn. III.) ist $x = \frac{1}{2}a\beta = \sin \frac{\omega + i}{2}$, demnach $x_i = \sqrt{1 - x^2} = \cos \frac{\omega + i}{2}$, und $B = 2a(2E - K)$.

Man erhält nun die *Breite B durch die Krümmung im tiefsten Punkte β oder den Randwinkel ω ausgedrückt, nämlich:*

$$B = \frac{a\pi}{16} (\frac{3}{4}a^2\beta^2 + 30\sqrt{1 - \frac{3}{4}a^2\beta^2} - 14)$$

$$\text{oder } B = \frac{a\pi}{16} (3 \sin^2 \frac{\omega + i}{2} + 30 \cos \frac{\omega + i}{2} - 14).$$

Durch diese Formeln ist man nunmehr in den Stand gesetzt, für Hohlcyylinder von gegebener Wandstärke B die Constante β und den Winkel ω zu berechnen, welche dem Tropfen im Augenblicke des Zerreißens zugehören. Es ist damit die Aufgabe gelöst, mittelst der Formeln $h = a^2\beta$ und $V = 2Ua^2 \sin(\omega + i)$ die *maximale Länge und das zugehörige Volumen eines Tropfens zu bestimmen, welcher an einem gegebenen verticalen Hohlcyylinder hängen kann.*

Einen Zusammenhang zwischen dem Substitutionswinkel φ und dem Winkel ϑ findet man durch Vergleichung der

beiden Ausdrücke für z , nämlich

$$z = a^2 \beta - \sqrt{a^4 \beta^2 - 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta} \quad \text{und} \quad z = a^2 \beta - a^2 \beta \cos \varphi,$$

woraus $a \beta \sin \varphi = 2 \sin \frac{\vartheta}{2}$ oder $\sin \frac{1}{2} \vartheta = z \sin \varphi$.

VII.

Allgemeine Integralgleichung.

Zum Schluß soll die allgemeine Integration der Differentialgleichung II, 1 durch eine Reihenentwicklung angedeutet werden. Sobald Winkel $\vartheta = 90^\circ$, $\frac{dz}{dt} = \infty$ wird, ist eine Entwicklung von z nach Potenzen von t offenbar im Allgemeinen nicht möglich. Stellt man aber die Bedingung voran, daß $\vartheta < \frac{\pi}{2}$, worin die Bedingung $\omega < \frac{\pi}{2}$ eingeschlossen ist, so wird man bei der Einschränkung auf Tropfen der genannten Art mindestens innerhalb gewisser Grenzen immer berechtigt seyn, die Entwicklung

$$z = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

als gestattet anzusehen.

Zur Bestimmung der Coefficienten a_n formen wir II, 1 um, indem wir dieselbe mit dz multipliciren, integriren und zur Abkürzung $\angle \vartheta$ einführen, dabei $\varepsilon = \frac{1}{a^2}$ schreiben; es wird

$$\cos \vartheta = 1 - \int_0^t \left(2\gamma - \varepsilon z - \frac{\sin \vartheta}{t} \right) t g \vartheta dt.$$

Durch nochmalige Multiplication mit $t g \vartheta$, resp. $\frac{dz}{dt}$, wird

$$\sin \vartheta = \frac{dz}{dt} \left\{ 1 - \int_0^t \left[2\gamma - \varepsilon z - \frac{\sin \vartheta}{t} \right] \frac{dz}{dt} dt \right\}. \quad (1.)$$

Berücksichtigt man, daß nach IV, 2:

$$\sin \vartheta = \gamma t - \frac{\varepsilon}{t} \int_0^t z t dt,$$

so lassen sich nun alle in Gleichung (1) vorkommenden Gröſsen leicht durch Reihenausdrücke ersetzen, welche aus

$$x = \sum_0^{\infty} a_n t^n$$

erhalten werden. Die Ausführung der Rechnung, worüber die Inaugural-Dissertation¹⁶⁾ des Verfassers Näheres giebt, liefert nach angemessener Constantenbestimmung die Coefficienten der Reihe folgendermaßen:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_3 = a_5 \dots a_{2n+1} \dots = 0, \\ 2a_2 &= \gamma, \\ 4a_4 &= 2\gamma a_2^2 - \frac{\varepsilon}{4} a_2, \\ 6a_6 &= 4\gamma a_2 a_4 + 2\gamma a_4 a_2 - 2a_2 \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{3}{4} a_2 \cdot 2a_2 - \frac{\varepsilon}{6} a_4, \\ 8a_8 &= 6\gamma a_2 a_6 + 4\gamma a_4 a_4 + 2\gamma a_6 a_2, \\ &\quad - 4a_4 \frac{\varepsilon}{4} (\frac{3}{4} a_2 \cdot 2a_2), \\ &\quad - 2a_2 \frac{\varepsilon}{6} (\frac{3}{4} a_2 \cdot 4a_4 + \frac{5}{6} a_4 \cdot 2a_2) \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{8} a_6, \\ &\quad \dots \dots \dots \\ (2n+2)a_{2n+2} &= 2n\gamma a_2 a_{2n} + (2n-2)\gamma a_4 a_{2n-2} \\ &\quad + \dots \dots 2\gamma a_{2n} a_2, \\ &\quad - (2n-2)a_{2n-2} \frac{\varepsilon}{4} (\frac{3}{4} a_2 \cdot 2a_2), \\ &\quad - (2n-4)a_{2n-4} \frac{\varepsilon}{6} (\frac{3}{4} a_2 \cdot 4a_4 + \frac{5}{6} a_4 \cdot 2a_2), \\ &\quad - \dots \dots \dots \\ &\quad - 2a_2 \frac{\varepsilon}{2n} [\frac{3}{4} a_2 (2n-2)a_{2n-2} + \\ &\quad \frac{5}{6} a_4 (2n-4)a_{2n-4} + \dots + \frac{2n-1}{2n} a_{2n-2} 2a_2], \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{2n+2} a_{2n}. \end{aligned}$$

Rechnet man die Coefficienten der ersten Glieder aus, so erhält man als die ersten Glieder des Integrals der Gleichung II, 1:

16) Ueber Tropfen, welche an festen Körpern hängen und der Schwerkraft unterworfen sind. Breslau, 1873.

$$z = \frac{1}{2}\gamma t^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{\gamma^3}{4} - \frac{1}{2}\frac{\gamma}{4^2}\varepsilon\right)t^4 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\frac{\gamma^5}{6} - \frac{5}{72}\gamma^3\varepsilon\right. \\ \left. + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^2}\frac{1}{6^2}\gamma\varepsilon^2\right)t^6 + \dots$$

$$\text{oder } z = \frac{1}{2}\gamma t^2 \left\{1 + \frac{1}{4}\left(\gamma^2 - \frac{1}{4a^2}\right)t^2\right. \\ \left. + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}\gamma^4 - \frac{5}{12}\frac{\gamma^2}{a^2} + \frac{1}{96a^4}\right)t^4 + \dots\right\}.$$

Dafs hieraus die früher durch Annäherung gefundenen Fälle als specielle Fälle hervorgehen, wenn man nur die 0ten resp. 1sten Potenzen von ε resp. γ in Betracht zieht, ist unschwer nachzuweisen.

Da man zur Bestimmung der Coefficienten a_n genöthigt war, eine dreifache Multiplication von unendlichen Reihen vorzunehmen, so ist noch nachzuweisen, dafs die Summe der resultirenden Reihe gleich dem Product der Summen der ursprünglichen Reihe sey, dafs man also ihre Coefficienten einander gleichsetzen dürfe. Die bisher stillschweigend gemachte Annahme ist nur dann gestattet, wenn die zu multiplicirenden Reihen, welche möglicher Weise negative Glieder enthalten, auch dann noch convergiren, wenn man sämmtlichen Coefficienten das positive Vorzeichen giebt. Um die unbedingte Convergenz zu zeigen, führe man $t = Rx$ in die Differentialgleichung ein, wodurch man eine Entwicklung von z nach geraden Potenzen von $\frac{t}{R}$ enthält, während die Coefficienten bis auf einen Factor R^3 in ihrem letzten Gliede von derselben Form bleiben. Man zeigt dann, dafs auch für unendliche n keiner der Coefficienten unendlich grofs werden kann, indem jedes der Aggregate von unendlicher Gliederzahl, aus welchen er zusammengesetzt ist, sich einer endlichen bestimmten Grenze nähert. Damit ist schliesslich bewiesen, dafs die für z gefundene Reihe unbedingt convergirt für jeden Werth von t , welcher kleiner ist als die beliebig gewählte Gröfse R . Dasselbe gilt dann für die Reihe für $\frac{dz}{dt}$.

Nachdem so die Coefficienten a_n bekannt geworden, ergeben sich leicht die Formeln für Länge, Randwinkel und Volumen des Tropfens, nämlich:

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^{2n}, \sin(\omega + i) = \gamma R - \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2n+2} R^{2n+1},$$

$$T = R^2 h \pi - 2 \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2n+2} R^{2n+2} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n+2} a_n R^{2n+2}.$$

V. Ueber die Einwirkung des Lichtes auf freies Chlor von E. Budde.

Vorgetragen in der Sitzung der niederrhein. Gesellschaft für Natur- und Heilkunde am 7. Juli 1873.

In einer früheren Abhandlung (diese Annalen Bd. 140, S. 213) habe ich die Thatsache veröffentlicht, daß freies Chlor und Brom unter dem Einfluß der Lichtstrahlen von hoher Brechbarkeit sich ausdehnen. Ich habe zugleich die theoretischen Erwägungen mitgetheilt, welche mich zur Entdeckung dieser Erscheinung führten, und die Hypothesen aufgezählt, welche behufs Erklärung derselben in Betracht kommen. Sie lauten:

- 1) Das Licht lockert und zersetzt die Chlormoleküle Cl_2 in freie Atome Cl .
- 2) Das Licht leistet im Chlor irgend eine andere Arbeit, die sich in Wärme umsetzt und dadurch die Ausdehnung hervorruft.
- 3) Es erwärmt das Chlor direct, so wie es z. B. den Rufs erwärmt.

Von diesen drei Hypothesen ist die zweite nur ein Nothbehelf; die dritte war wenig wahrscheinlich, weil wir, seit den feinen Versuchen Tyndall's noch mehr als frü-