SOPRA LE SOLUZIONI COMUNI A PIÙ EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI DI 1° E 2° ORDINE CON PIÙ DI DUE VARIABILI INDIPENDENTI;

Nota di **G. PENNACCHIETTI**, in Catania.

Adunanza del 13 agosto 1893.

Occorrendo alcune volte riconoscere se date equazioni a derivate parziali di 1° e 2° ordine con più di due variabili indipendenti e con una stessa funzione incognita ammettano soluzioni comuni e, nel caso affermativo, avere un metodo per ritrovarle, non credo inutile, relativamente a tale questione, trattare qualche esempio che si può svolgere facilmente generalizzando il metodo che, nel caso di due variabili indipendenti, ha dato il Bianchi in tre sue pregevoli note (*).

1. Sieno date $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni a derivate parziali del 2° ordine con n variabili indipendenti e con una stessa funzione incognita z :

$$p_{r,s} = p_{r,s}(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n), \quad (1)$$

(*) *Sulle soluzioni comuni a due equazioni a derivate parziali del 2° ordine con due variabili.* (Rend. R. Accad. dei Lincei, serie IV, vol. II, 2° sem. 1886.)

Rend. Circ. Matem., t. VII, parte 1ª, — Stampato il 16 ottobre 1893. 35

dove è posto generalmente :

$$p_i = \frac{\partial \chi}{\partial x_i}, \quad p_{n,i} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_i \partial x_n}.$$

Per riconoscere se le (1) ammettano una soluzione comune e, quando esista, ritrovare questa soluzione, si costruisca il sistema delle $n + 1$ equazioni a differenziali totali :

$$d\chi = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n,$$

$$dp_i = p_{i,1} dx_1 + \dots + p_{i,n} dx_n, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

e quindi il sistema delle n equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee :

$$A_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial \chi} p_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} p_{i,1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial p_n} p_{n,i} = 0. \quad (2)$$

Questo sistema è Jacobiano se, qualunque sieno le quantità $x_1, x_2, \dots, x_n, \chi, p_1, \dots, p_n$, considerate come indipendenti fra loro, sono soddisfatte identicamente le $\frac{n^2(n-1)}{2}$ equazioni :

$$A_i(p_{j,h}) = A_j(p_{i,h}), \quad (3)$$

dove i, j sono numeri disuguali qualunque della serie $1, 2, \dots, n$ e h è un numero qualunque della stessa serie. Se queste condizioni sono soddisfatte, il sistema (2) ammette $n + 1$ soluzioni :

$$f_s(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = c_s,$$

dove le c_s sono costanti arbitrarie e donde per eliminazione si ottiene :

$$\chi = \chi(x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_{n+1}),$$

che sarà la soluzione più generale delle (1).

Se le (3) non sono tutte identicamente soddisfatte, è evidente che dovranno essere nondimeno verificate qualunque sieno $x_1, \dots, x_n$,

dopochè siasi sostituita in esse una soluzione comune delle (1), posto che tale soluzione esista, perchè, se $z(x_1, \dots, x_n)$ è questa soluzione, le (3), dopo questa sostituzione, rappresentano le identità:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_b} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_b}.$$

In questo secondo caso quelle delle (3) che non sono identicamente soddisfatte qualunque sieno $x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n$, costituiscono, se contengono qualcuna delle $p_1, \dots, p_n$, equazioni di 1° ordine, è, quando le (1) ammettano una soluzione comune, questa dovrà essere comune altresì a quest'ultime equazioni di 1° ordine.

Se le (1) sono date nella forma:

$$F_{r,s}(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n, p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{n,n}) = 0,$$

le condizioni (3) si trasformano facilmente, osservando che le $\frac{n(n+1)}{2}$ espressioni $A_i(p_{i,b})$, nelle quali i è un numero dato della serie 1, 2, ... n e j, b sono due numeri qualunque, eguali o diseguali, della stessa serie, si ottengono risolvendo il sistema delle $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni lineari che si ricavano dalla seguente:

$$A_i(F_{r,s}) + \sum_{j,b} \frac{\partial F_{r,s}}{\partial p_{j,b}} A_i(p_{j,b}) = 0,$$

dando ad r, s due valori qualunque, eguali o diseguali, della serie 1, 2, ... n .

2. Siano tre le variabili indipendenti e sia data un'equazione di second'ordine e una di primo:

$$\left. \begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3, p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{3,3}) &= 0, \\ p_3 &= p_3(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

delle quali la prima non sia conseguenza della seconda.

Si possono facilmente ricavare dalle (1) quattro equazioni della forma :

$$\left. \begin{aligned} p_{1,3} &= \varphi_{1,3}(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_{1,1}, p_{1,2}), \\ p_{2,3} &= \varphi_{2,3}, p_{3,3} = \varphi_{3,3}, p_{2,2} = \varphi_{2,2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

nelle quali i secondi membri sono funzioni determinate e conosciute di $x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_{1,1}, p_{1,2}$.

Poniamo per brevità :

$$\begin{aligned} \lambda_i(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial z} p_i + \frac{\partial f}{\partial p_1} p_{1,i} + \frac{\partial f}{\partial p_2} p_{2,i}, \\ A_i(f) &= \lambda_i(f) + \frac{\partial f}{\partial p_{1,1}} p_{1,1,i} + \frac{\partial f}{\partial p_{1,2}} p_{1,2,i}. \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Dalle equazioni (2) si possono dedurre, mediante derivazione, sette equazioni lineari tra le cinque derivate prime distinte di $p_{1,1}, p_{1,2}$ ossia tra le derivate terze $p_{1,1,1}, p_{1,1,2}, p_{1,2,2}, p_{1,1,3}, p_{1,2,3}$. Queste equazioni sono :

$$\left. \begin{aligned} p_{1,1,3} &= A_1(p_{1,3}), p_{1,2,3} = A_2(p_{1,3}) = A_1(p_{2,3}), p_{1,2,2} = A_1(p_{2,2}), \\ A_3(p_{1,3}) &= A_1(p_{3,3}), A_2(p_{2,3}) = A_3(p_{2,2}), A_3(p_{2,3}) = A_2(p_{3,3}). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Affinchè le (3) sieno compatibili, dovranno essere soddisfatte due equazioni di condizione. Ma in ciò bisogna distinguere due casi, secondochè le due equazioni di condizione sono o no identicamente soddisfatte qualunque sieno le variabili $x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_{1,1}, p_{1,2}$ considerate come indipendenti tra loro. Nel secondo caso occorrerà esaminare se nondimeno esse ammettano soluzioni comuni colle (1). Nel primo caso, supponendo che particolari relazioni tra i coefficienti non impediscano di determinare in modo unico le cinque incognite $p_{1,1,1}, p_{1,1,2}, p_{1,2,2}, p_{1,1,3}, p_{1,2,3}$ in funzione di $x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_{1,1}, p_{1,2}$, si costruirà il sistema :

$$A_i(f) = 0. \quad (i = 1, 2, 3)$$

Tenendo conto delle (3), si verifica che questo sistema è Jacobiano, se sono soddisfatte identicamente le equazioni:

$$A_i(p_{r,s,i}) = A_j(p_{r,s,i}), \quad (4)$$

dove (r, s) è l'una o l'altra delle due combinazioni $(1, 1)$, $(1, 2)$ e i, j sono due numeri disuguali qualunque della serie 1, 2, 3.

Quando le equazioni (4) sono identicamente soddisfatte, le (1) ammettono una soluzione comune contenente sei costanti arbitrarie; altrimenti bisognerà verificare, se quelle tra le (4), che non sono identicamente soddisfatte, ammettano una soluzione comune colle equazioni date.

3. — Siano quattro le variabili indipendenti e sia data ancora un'equazione del 2° ordine e una del 1°:

$$\left. \begin{aligned} F(x_1, \dots x_4, z, p_1, p_2, p_3, p_4, p_{1,1}, p_{1,2}, \dots p_{4,4}) &= 0, \\ p_4 &= p_4(x_1, \dots x_4, z, p_1, p_2, p_3), \end{aligned} \right\} (1)$$

delle quali la prima non sia, bene inteso, conseguenza della seconda.

Da queste si dedurranno le equazioni:

$$\left. \begin{aligned} p_{1,4} &= \varphi_{1,4}(x_1, \dots x_4, z, p_1, p_2, p_3, p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{2,2}, p_{2,3}), \\ p_{2,4} &= \varphi_{2,4}, \quad p_{3,4} = \varphi_{3,4}, \quad p_{4,4} = \varphi_{4,4}, \quad p_{3,3} = \varphi_{3,3}, \end{aligned} \right\} (2)$$

sicchè i secondi membri saranno funzioni note di $x_1, \dots x_4, p_1, p_2, p_3, p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{2,2}, p_{2,3}$.

Le derivate prime distinte di $p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{2,2}, p_{2,3}$ sono in numero di 14, ed altrettante sono le equazioni, lineari rispetto a queste derivate, che si possono ricavare dalle (2) mediante una prima derivazione e colla successiva eliminazione delle rimanenti derivate terze di z .

Ponendo per brevità:

$$\begin{aligned}
A_i(f) = & \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} p_i + \frac{\partial f}{\partial p_1} p_{1,i} + \frac{\partial f}{\partial p_2} p_{2,i} + \\
& + \frac{\partial f}{\partial p_3} p_{3,i} + \frac{\partial f}{\partial p_{1,1,i}} p_{1,1,i} + \frac{\partial f}{\partial p_{1,2,i}} p_{1,2,i} + \frac{\partial f}{\partial p_{1,3,i}} p_{1,3,i} + \\
& + \frac{\partial f}{\partial p_{2,2,i}} p_{2,2,i} + \frac{\partial f}{\partial p_{2,3,i}} p_{2,3,i}, \quad (i = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}$$

le 14 equazioni sono :

$$\left. \begin{aligned}
p_{1,1,4} &= A_1(p_{1,4}), & p_{1,2,4} &= A_2(p_{1,4}) = A_1(p_{2,4}), \\
p_{1,3,4} &= A_3(p_{1,4}) = A_1(p_{3,4}), \\
A_4(p_{1,4}) &= A_1(p_{4,4}), & p_{2,2,4} &= A_2(p_{2,4}), \\
p_{2,3,4} &= A_3(p_{2,4}) = A_2(p_{3,4}), & A_4(p_{2,4}) &= A_2(p_{4,4}), \\
A_3(p_{3,4}) &= A_4(p_{3,3}), & A_4(p_{3,4}) &= A_3(p_{4,4}), \\
p_{1,3,3} &= A_1(p_{3,3}), & p_{2,3,3} &= A_2(p_{3,3}).
\end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Supponendo che tutte queste equazioni sieno distinte e costruendo quindi il sistema :

$$A_i(f) = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (4)$$

si trova che, a causa delle (3), esso è Jacobiano, quando sieno soddisfatte identicamente le condizioni :

$$A_i(p_{r,s,i}) = A_j(p_{r,s,i}), \quad (5)$$

dove (r, s) è una qualunque delle combinazioni $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$; i, j sono due numeri disuguali qualunque della serie $1, 2, 3, 4$ e le quantità $p_{r,s,i}$, $p_{r,s,i}$ sono determinate dalle equazioni lineari (3) in funzione di $x_1, \dots, x_4, \zeta, p_1, p_2, p_3, p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{2,2}, p_{2,3}$.

Se le (5) sono identicamente soddisfatte, si concluderà che le (4) ammettono 9 soluzioni distinte e le (1) una soluzione comune contenente 9 costanti arbitrarie.

Quando le (5), tutte o alcune di'esse, non sieno identicamente soddisfatte, bisognerà esaminare se sono possibili soluzioni comuni a quelle tra queste equazioni, le quali non sieno identicamente soddisfatte, e alle equazioni proposte.

Catania, 8 agosto 1893.

G. PENNACCHIETTI.