Ueber quadratische Transformationen und rationale Flächen mit Kegelschnittschaaren,

Vo

TH. REYE in Strassburg i. E.

Die einfachsten und wichtigsten algebraischen Transformationen homogener Punktcoordinaten sind nächst den linearen die allgemeinen quadratischen. Auf sie möchte ich die Aufmerksamkeit der Fachgenossen, insbesondere der Analytiker und Algebraiker zu lenken mir erlauben. Sie wurden bisher auffällig vernachlässigt, obwohl sie zu mannigfaltigen geometrischen Gebilden führen und deren merkwürdige Eigenschaften leicht erkennen lassen.

Im innigsten Zusammenhange mit ihnen stehen das F^2 -Gebüsch oder das dreifach unendliche lineare System von Flächen zweiter Ordnung und dessen projective Beziehung auf den Ebenenraum. Aus dieser projectiven Beziehung ergiebt sich, wie ich schon 1868 nachgewiesen habe*), ohne Weiteres die berühmte Steiner'sche Fläche vierter Ordnung, zugleich mit ihrer Abbildung auf der Ebene. Gehen die Flächen des Gebüsches alle durch einen Knotenpunkt, so führt uns dieselbe projective Beziehung zu der geradlinigen Fläche dritter Ordnung und ihrer Abbildung auf der Ebene, ausserdem aber zu fast allen durch Kummer bekannten Strahlensystemen zweiter Classe mit Brennflächen**), ihrer eindeutigen Beziehung auf einen Strahlenbündel und ihren wichtigeren Eigenschaften. Auch zu den Brennflächen dieser Strahlensysteme, insbesondere zu der Kummer'schen Fläche vierter Ordnung mit 16 Doppelpunkten und 16 singulären Berührungsebenen gelangen wir so mittelst quadratischer Substitutionen.

Wir wollen in Kürze nochmals nachweisen***), dass eine quadratische Transformation homogener Punktcoordinaten sich geometrisch

*) In meiner „Geometrie der Lage“ 1. Aufl.; vgl. die 3. Aufl. (1892) III, S. 140 und 206.

**) Diesen Strahlensystemen ist meine Abhandlung von 1878 in Crelle's Journal Bd. 86, S. 84 gewidmet.

***) Vgl. Crelle's Journal Bd. 94, S. 312.

durch die projective Beziehung eines F^2 -Gebüsches auf den Ebenenraum darstellen und ersetzen lässt. Wie zu der Steiner'schen Fläche und der cubischen Regelfläche durch Transformation der Ebene, so gelangen wir sodann zu anderen rationalen Flächen mit Kegelschnittschaaren durch Transformation von Flächen zweiter und höherer Ordnung. Alle so abgeleiteten Flächen sind eindeutig auf die Flächen bezogen, aus denen sie transformirt werden, und lassen sich zugleich mit ihnen leicht auf der Ebene abbilden. Zu ihnen gehören als Flächen niedrigster Ordnung die allgemeine cubische Fläche, die Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiter Ordnung und diejenige mit einer Doppelgeraden. Die bekannten von Clebsch angegebenen Abbildungen dieser drei Flächen auf der Ebene ergeben sich sehr einfach auf dem angedeuteten Wege.

Die erwähnten früheren Untersuchungen stellen wir, soweit sie hier in Betracht kommen, mit einigen Zusätzen in § 1 kurz zusammen.

§ 1.

Die quadratische Substitution und die projective Beziehung des F^2 -Gebüsches auf den Raum Σ_1 .

1. Wir transformiren zwei Räume Σ , Σ_1 in einander durch die quadratische Substitution:

$$(a) \quad \varrho y_1 = f_1, \quad \varrho y_2 = f_2, \quad \varrho y_3 = f_3, \quad \varrho y_4 = f_4.$$

Hierin bezeichnen f_1, f_2, f_3, f_4 quaternäre quadratische Formen, deren Variable x_1, x_2, x_3, x_4 die homogenen Coordinaten eines Punktes P von Σ sind; y_1, y_2, y_3, y_4 sind die Coordinaten eines Punktes P_1 von Σ_1 , und ϱ ist ein unbestimmter Factor. Durch die Substitution wird jedem Punkte P von Σ ein bestimmter Punkt P_1 von Σ_1 als entsprechender zugewiesen; dagegen entsprechen einem beliebigen Punkte $P_1 \equiv (y_1, y_2, y_3, y_4)$ von Σ_1 i. A. acht „associirte“ Punkte in Σ , nämlich die reellen oder imaginären Schnittpunkte der drei Flächen zweiter Ordnung, die bei gegebenen y_i durch die Gleichungen:

$$y_1 f_2 = y_2 f_1, \quad y_1 f_3 = y_3 f_1, \quad y_1 f_4 = y_4 f_1$$

dargestellt werden.

2. Wenn der Punkt P in Σ eine Curve k oder Fläche F beschreibt, so beschreibt jeder seiner associirten Punkte eine associirte Curve k' resp. Fläche F' ; zugleich aber beschreibt sein homologer Punkt P_1 in Σ_1 eine entsprechende Curve k_1 resp. Fläche F_1 , die i. A. eindeutig auf k resp. F bezogen ist. Nur dann entsprechen jedem Punkte von k_1 resp. F_1 zwei oder mehr Punkte von k resp. F , wenn diese Curve oder Fläche von Σ sich selbst associirt ist. Jeder nicht sich selbst associirten algebraischen Curve von Σ entspricht in

Σ_1 eine algebraische Curve gleichen Geschlechtes, weil die beiden Curven eindeutig auf einander bezogen sind. Ist die eine dieser homologen Curven rational, d. h. vom Geschlecht Null, so ist es auch die andere. Jeder nicht sich selbst associirten Fläche von Σ entspricht in Σ_1 eine eindeutig auf sie bezogene Fläche; beide Flächen aber sind rational, wenn die eine und damit auch die andere eindeutig auf einer Ebene abgebildet werden kann.

3. Durch die Substitution (a) geht die Gleichung:

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 + \lambda_4 y_4 = 0$$

einer beliebigen Ebene φ_1 von Σ_1 über in die Gleichung:

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

einer Fläche zweiter Ordnung F^2 von Σ , die der Ebene φ_1 entspricht. Aendern sich die Ebenencoordinaten λ_i , so beschreibt φ_1 den Ebenenraum Σ_1 ; zugleich aber beschreibt die Fläche F^2 im Raume Σ ein F^2 -Gebüsch, wenn die vier Flächen $f_i = 0$, wie wir voraussetzen, keinem F^2 -Bündel angehören. Jeder Ebene φ_1 von Σ_1 entspricht also eine Fläche F^2 dieses Gebüsches, und umgekehrt. Das Gebüsch ist durch die vier Flächen $f_i = 0$ bestimmt und durch die Substitution (a) projectiv auf den Ebenenraum Σ_1 bezogen. Wenn der Punkt P auf einer seiner Flächen liegt, so liegt der entsprechende Punkt P_1 auf der entsprechenden Ebene von Σ_1 ; und umgekehrt.

4. Den Ebenen eines Punktes P_1 von Σ_1 entsprechen daher ∞^2 Flächen des F^2 -Gebüsches, die sich i. A. in acht associirten, dem P_1 entsprechenden Punkten P schneiden (1.) und einen F^2 -Bündel bilden. Einem Ebenenbüschel von Σ_1 und seiner Axe g_1 entsprechen in Σ ein zu ihm projectiver F^2 -Büschel und dessen biquadratische Grundcurve $C^{2.2}$. Zwei resp. drei Gruppen associirter Punkte von Σ können allemal durch eine Raumcurve $C^{2.2}$ resp. Fläche F^2 des Gebüsches verbunden werden; denn die entsprechenden zwei resp. drei Punkte von Σ_1 liegen in einer Geraden g_1 resp. Ebene φ_1 . Durch die projective Beziehung des F^2 -Gebüsches auf den Raum Σ_1 wird jedem Punkte P von Σ derselbe Punkt P_1 in Σ_1 zugewiesen, wie durch die quadratische Substitution (a).

Die vollständigen Beweise der folgenden Sätze dieses § 1 finden sich in den vorhin citirten Druckschriften.

5. Unendlich kleine homologe Raum- oder Flächenelemente von Σ und Σ_1 sind collinear, falls das Element von Σ keinen sich selbst associirten Punkt enthält; die quadratische Transformation (a) ist nach Herrn Lie's Bezeichnung eine Berührungstransformation. Jeder sich selbst associirte Punkt P von Σ ist Doppelpunkt eines Kegels des F^2 -Gebüsches, und umgekehrt. Die Ebene τ_1 , die in Σ_1 diesem Kegel entspricht, berührt in dem zu P homologen Punkte P_1 alle

Flächen von Σ_1 , denen durch P gehende Flächen in Σ entsprechen. Der Ort der sich selbst associirten Punkte ist eine Fläche vierter Ordnung K^4 , die Jacobi'sche oder *Kernfläche* des Gebüsches. Dieser Fläche K^4 von Σ entspricht in Σ_1 eine Fläche Φ_1^4 vierter Classe und i. A. 16^{ter} Ordnung, und zwar entsprechen deren Berührungsebenen τ_1 und Punkte P_1 den Kegeln des Gebüsches und deren Doppelpunkten. Aus den vier Gleichungen:

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_i} + \lambda_4 \frac{\partial f_4}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ergibt sich die Gleichung von K^4 , wenn $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, und die Gleichung von Φ_1^4 in Ebenencoordinaten λ_i , wenn x_1, x_2, x_3, x_4 eliminirt werden. Ich nenne Φ_1^4 die „*Brennfläche*“ des Raumes Σ_1 .

Einer nicht sich selbst associirten Fläche oder Curve von Σ , die mit der Kernfläche K^4 beliebige Punkte gemein hat, entspricht in Σ_1 eine Fläche oder Curve, die in den entsprechenden Punkten die Brennfläche Φ_1^4 berührt.

6. Einer beliebigen Geraden l von Σ entspricht in Σ_1 ein zu l projectiver Kegelschnitt l_1 . Die entsprechende Linie l_1 liegt nämlich in der Ebene, welche irgend drei ihrer Punkte verbindet, weil dieser Ebene eine durch l gehende Fläche zweiter Ordnung entspricht (3.); mit jeder anderen Ebene aber hat l_1 höchstens zwei Punkte gemein. Analytisch beweist man den Satz, indem man $x_i = p_i + \lambda q_i$ in (a) einsetzt und sodann ρ und λ aus (a) eliminirt. Der Kegelschnitt l_1 berührt die Brennfläche Φ_1^4 in vier Punkten, denen die Schnittpunkte von l mit der Kernfläche K^4 entsprechen (5.).

7. Eine Gerade von Σ heisst ein „*Hauptstrahl*“, wenn mehr als eine Fläche des F^2 -Gebüsches durch sie geht. Jedem Hauptstrahle s des Gebüsches entspricht demnach in Σ_1 eine Gerade s_1 ; ihm ist in Σ eine cubische Raumcurve associirt, die mit s zusammen eine Raumcurve $C^{2.2}$ des Gebüsches bildet (vgl. 4.) und mit s zwei Punkte der Kernfläche gemein hat. Die Gerade s_1 berührt in den entsprechenden beiden Punkten die Brennfläche Φ_1^4 , ist also eine Doppeltangente von Φ_1^4 . Die Hauptstrahlen von Σ sind i. A. Träger von Involutionen associirter Punkte; sie schneiden die Flächen des F^2 -Gebüsches in den Punktepaaren dieser Involutionen. Die beiden Doppelpunkte einer solchen Involution sind sich selbst associirt, liegen auf der Kernfläche K^4 (5.) und sind conjugirt bezüglich aller Flächen des Gebüsches. Jede Verbindungslinie associirter Punkte ist ein Hauptstrahl von Σ .

8. Einer beliebigen Ebene φ von Σ entspricht in Σ_1 eine Steiner'sche Fläche F^4 vierter Ordnung dritter Classe; den Schnittpunkten von F^4 mit einer Geraden von Σ_1 entsprechen die vier Schnittpunkte von φ mit der homologen Raumcurve $C^{2.2}$ des Gebüsches. Die Fläche F^4

ist eindeutig so auf der Ebene φ abgebildet, dass den Geraden von φ je ein Kegelschnitt auf F^4 entspricht (6.). Jedem Kegelschnitt in φ entspricht auf F^4 eine Curve vierter Ordnung vom Geschlecht Null (2.); diese ist eben oder gewunden, jenachdem der Kegelschnitt auf einer Fläche des Gebüsches liegt oder nicht. Die ebenen Schnittcurven von F^4 sind demnach vom Geschlechte Null (oder rational), haben also je drei Doppelpunkte. Mit ihren Berührungsebenen hat die Steiner'sche Fläche je zwei Kegelschnitte gemein, die sich in dem Berührungspunkte und in drei Doppelpunkten der Fläche schneiden; denn die Ebene φ hat mit den sie berührenden Flächen des F^2 -Gebüsches je zwei Gerade gemein. Jedem Doppelpunkte von F^4 entsprechen in φ zwei associirte Punkte, und φ enthält daher (7.) drei Hauptstrahlen s von Σ , die sich in drei associirten Punkten schneiden. Die Steiner'sche Fläche enthält demnach drei Doppelpunktsgerade s_1 , die durch einen dreifachen Punkt von F^4 gehen.

9. Einen Punkt A von Σ , durch welchen alle Flächen des F^2 -Gebüsches gehen, nenne ich einen „Knotenpunkt“ des Gebüsches und der quadratischen Transformation (a). Jede durch ihn gehende Gerade s ist ein Hauptstrahl von Σ (7.) und zu der entsprechenden Geraden s_1 von Σ_1 projectiv. Auf s_1 giebt es demnach einen Punkt A_1 , dessen homologer Punkt auf s mit A zusammenfällt; und den durch A_1 gehenden Ebenen von Σ_1 entsprechen in Σ Flächen des Gebüsches, die in A die Gerade s berühren. Wenn die Gerade s um A sich dreht und eine Ebene φ oder den Strahlenbündel A beschreibt, so beschreibt A_1 eine Gerade α_1 resp. Ebene α_1 . Den Ebenen durch α_1 entsprechen in Σ Flächen zweiter Ordnung, die in A von φ berührt werden, und der Ebene α_1 entspricht der Punkt A und zugleich ein Kegel A^2 des Gebüsches mit dem Doppelpunkte A . Auf den Bündel A ist die Ebene α_1 collinear bezogen; jeder Fläche von Σ , die im Punkte A irgend eine Ebene φ berührt, entspricht in Σ_1 eine Fläche, die mit α_1 die entsprechende Gerade α_1 gemein hat.

Die Strahlen des Kegels A^2 tangiren in A die Kernfläche K^4 , und A ist ein conischer Knotenpunkt von K^4 . Die Ebene α_1 aber ist eine singuläre Berührungsebene der Brennfläche Φ_1^4 ; sie berührt Φ_1^4 längs des Kegelschnittes, der in α_1 jenem Tangentialkegel entspricht. Die Ordnung von Φ_1^4 wird durch die singuläre Ebene α_1 um zwei Einheiten erniedrigt und ist i. A. vierzehn.

10. Auch den durch den Knotenpunkt A gehenden Hauptstrahlen von Σ entsprechen in Σ_1 Doppeltangenten von Φ_1^4 (vgl. 7.). Die Congruenz dieser Doppeltangenten ist von der zweiten Classe; sie hat Φ_1^4 zur Brennfläche und α_1 zur singulären Ebene, sie ist eindeutig auf den Strahlenbündel A bezogen, und ihr Schnitt mit α_1 ist zu dem Bündel collinear (9.). Wenn die Transformation noch $r - 1$ andere

Knotenpunkte hat, so ist die Congruenz von der Ordnung $8 - r$, und ihre Brennfläche Φ_1^4 von der Ordnung $16 - 2r$.

Einer Ebene φ des Knotenpunktes A entspricht in Σ_1 eine geradlinige Fläche F^3 dritter Ordnung. Diese ist eindeutig auf φ abgebildet und kann zusammen mit α_1 als eine Steiner'sche Fläche aufgefasst werden (8.); ihre geraden Erzeugenden s_1 entsprechen den Geraden s in φ durch A . Einer beliebigen Geraden l von φ entspricht auf F^3 ein Kegelschnitt l_1 (6.); wenn aber l durch A geht, so zerfällt l_1 in eine Erzeugende s_1 und eine dem Punkte A von φ entsprechende Gerade a_1 von α_1 (9.). Die Erzeugenden s_1 liegen paarweise mit a_1 in Ebenen, welche die Fläche F^3 doppelt berühren; sie schneiden sich auf einer Doppelpunktgeraden von F^3 , der in φ ein i. A. nicht durch A gehender Hauptstrahl von Σ entspricht. Die ebenen Schnitte von F^3 sind vom Geschlecht Null (vgl. 8.).

11. Hat das F^2 -Gebüsch zwei Knotenpunkte A, B , so entspricht den Punkten der Geraden AB ein gewisser Punkt C_1 in Σ_1 , und den Ebenen durch C_1 entsprechen in Σ Flächen des Gebüsches, die durch AB gehen. Die Punkte der Geraden AB sind demnach mit einander und sich selbst associirt, liegen also auf der Kernfläche K^4 (5.) und sind Doppelpunkte von Kegeln des Gebüsches. Diesen Kegeln aber entsprechen in Σ_1 Ebenen, welche die Brennfläche Φ_1^4 in C_1 berühren (5.), und C_1 ist demnach ein Knotenpunkt von Φ_1^4 .

Einer beliebig durch AB gelegten Ebene φ von Σ entspricht in Σ_1 eine eindeutig auf φ bezogene Regelfläche zweiter Ordnung F^2 . Die beiden Regelschaaren von F^2 entsprechen den Strahlenbüscheln A und B von φ und sind zu ihnen projectiv; sie bestehen aus Doppeltangenten der Brennfläche Φ_1^4 (10.). Einer beliebigen Geraden l von φ entspricht auf F^2 ein durch C_1 gehender Kegelschnitt; der Geraden AB und zugleich den Punkten A, B entsprechen zwei durch C_1 gehende Gerade a_1, b_1 auf F^2 . Die durch A und B gehenden Kegelschnitte in φ entsprechen den ebenen Schnitten der Fläche F^2 , weil sie auf je einer Fläche des Gebüsches liegen. Ueberhaupt entspricht jedem durch A und B gelegten Kegelschnitte von Σ ein zu ihm projectiver Kegelschnitt in Σ_1 , der viermal die Brennfläche Φ_1^4 berührt. Die Flächen F^2 und Φ_1^4 berühren einander längs einer biquadratischen Raumcurve.

§ 2.

Homologe Curven und Flächen der Räume Σ und Σ_1 .

12. Einer Fläche n^{ter} Ordnung F_1^n von Σ_1 entspricht in Σ eine Fläche $2n^{\text{ter}}$ Ordnung F^{2n} ; man erhält deren Gleichung, wenn man in der von F_1^n die Punktecoordinaten y_i durch die quadratischen

Functionen f_i ersetzt (vgl. 1.). Jeder Knotenpunkt A der Transformation ist ein n -facher Punkt von F^{2n} ; ihm und seinem Tangentialkegel n^{ter} Ordnung entspricht die Schnittlinie von F_1^n mit seiner homologen Ebene α_1 (9.). Die Fläche F^{2n} ist sich selbst associirt und kann in associirte Flächen zerfallen (vgl. 2.).

Einer Curve m^{ter} Ordnung C_1^m von Σ_1 entspricht in Σ eine Curve $4m^{\text{ter}}$ Ordnung C^{4m} ; diese hat nämlich mit einer Ebene φ von Σ ebenso viele Punkte gemein, wie C_1^m mit der entsprechenden Steiner'schen Fläche vierter Ordnung von Σ_1 , also $4m$ Punkte. Jeder Knotenpunkt A der Transformation ist ein m -facher Punkt von C^{4m} ; er entspricht den m Schnittpunkten von C_1^m mit seiner homologen Ebene α_1 . Die Curve C^{4m} ist sich selbst associirt und kann in associirte Curven zerfallen.

13. Einer nicht sich selbst associirten Fläche n^{ter} Ordnung F^n von Σ entspricht in Σ_1 eine eindeutig auf sie bezogene Fläche F_1^{4n} , die i. A. von der $4n^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Diese entsprechende Fläche hat nämlich mit einer Geraden g_1 von Σ_1 ebenso viele Punkte gemein, wie F^n mit der entsprechenden Raumcurve $C^{2,2}$ von Σ , also $4n$ Punkte. Da der F_1^{4n} eine Fläche $8n^{\text{ter}}$ Ordnung in Σ entspricht (12.), so ist der F^n i. A. eine Fläche $7n^{\text{ter}}$ Ordnung associirt. Diese schneidet die F^n in einer Curve von der Ordnung $7n^2$; die Schnittcurve aber zerfällt in die Durchdringungcurve von F^n mit K^4 , deren Punkte sich selbst associirt sind (5.), und in eine Curve von der Ordnung $(7n - 4)n$, deren Punkte paarweise mit einander associirt sind. Dieser letzteren Curve entspricht eine Doppelpunktscurve der Fläche F_1^{4n} , und zwar eine Curve von derselben Ordnung $(7n - 4)n$ (vgl. 14.). Die Fläche F_1^{4n} hat i. A. auch dreifache Punkte, durch welche die Doppelcurve je dreimal geht, z. B. einen für $n = 1$ (vgl. 8.).

14. Wenn die Fläche F^n von Σ durch r Knotenpunkte $A, B, \dots$ der Transformation geht, so entspricht ihr in Σ_1 ausser den r homologen Ebenen $\alpha_1, \beta_1, \dots$ (9.) eine Fläche $(4n - r)^{\text{ter}}$ Ordnung F_1^{4n-r} . Ihr ist deshalb in Σ eine Fläche $(7n - 2r)^{\text{ter}}$ Ordnung associirt, die $A, B, \dots$ zu $(4n - r - 1)$ -fachen Punkten hat (12.). Auch die Schnittlinie von F^n mit der associirten Fläche hat $A, B, \dots$ zu $(4n - r - 1)$ -fachen Punkten. Sie ist von der Ordnung $(7n - 2r)n$ und zerfällt in die Schnittcurve $4n^{\text{ter}}$ Ordnung von F^n mit K^4 , die $A, B, \dots$ zu zweifachen Punkten hat, und in eine Curve von der Ordnung $(7n - 2r - 4)n$, die $A, B, \dots$ zu $(4n - r - 3)$ -fachen Punkten hat, und deren Punkte paarweise associirt sind. Die letztere Curve hat mit einer beliebigen Fläche des F^2 -Gebüsches ausser den r Knotenpunkten $A, B, \dots$ nur:

$(7n - 2r - 4)2n - (4n - r - 3)r = (7n - 4)2n - (8n - r - 3)r$
 Punkte gemein, die paarweise associirt sind. Ihr entspricht auf

der Fläche F_1^{4n-r} eine Doppelpunktscurve, die mit einer beliebigen Ebene von Σ_1 :

$$(7n - 4)n - \frac{1}{2}(8n - r - 3)r$$

Punkte gemein hat, also von dieser Ordnung ist.

Hat die Fläche F^n einen Knotenpunkt des Gebüsches zum k -fachen Punkte und $r - k$ andere Knotenpunkte zu einfachen Punkten, so entspricht ihr in Σ_1 eine Fläche $(4n - r)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer Doppelcurve von der Ordnung:

$$(7n - 4)n - \frac{1}{2}(8n - r - 3)r + \frac{1}{2}(k - 1)k,$$

wie analog sich ergibt.

15. Einer nicht sich selbst associirten Curve m^{ter} Ordnung C^m von Σ entspricht i. A. eine eindeutig auf sie bezogene Curve $2m^{\text{ter}}$ Ordnung C_1^{2m} in Σ_1 , und ihr ist daher i. A. eine C^{7m} in Σ associirt (12.). Ihre homologe Curve C_1^{2m} hat nämlich mit einer Ebene von Σ_1 ebenso viele Punkte gemein, wie C^m mit der entsprechenden Fläche F^2 des Gebüsches, also $2m$ Punkte. Die Curve C_1^{2m} berührt die Brennfläche Φ_1^4 in $4m$ Punkten, denen die Schnittpunkte von C^m mit K^4 entsprechen (5.).

Wenn aber die Curve C^m von Σ durch r Knotenpunkte des Gebüsches je einmal oder durch einen Knotenpunkt r -mal geht, so entspricht ihr in Σ_1 eine Curve $(2m - r)^{\text{ter}}$ Ordnung C_1^{2m-r} , und ihr ist in Σ eine Curve $(7m - 4r)^{\text{ter}}$ Ordnung associirt, wie analog sich ergibt. Die Curve C_1^{2m-r} berührt die Brennfläche Φ_1^4 in $4m - 2r$ Punkten, denen die von den Knotenpunkten verschiedenen Schnittpunkte von C^m mit K^4 entsprechen.

16. Die Schnittlinie einer Fläche F^n von Σ mit der Kernfläche K^4 ist von der $4n^{\text{ten}}$ Ordnung; ihr entspricht also i. A. eine Curve $8n^{\text{ter}}$ Ordnung in Σ_1 . Längs dieser Curve ist der Brennfläche Φ_1^4 die Fläche F_1^{4n} von Σ_1 eingeschrieben, die der F^n entspricht (5.). Wenn aber die Fläche F^n durch r Knotenpunkte $A, B, \dots$ des Gebüsches geht und einer F_1^{4n-r} entspricht (14.), so geht ihre Schnittlinie mit K^4 je zweimal durch $A, B, \dots$, und die entsprechende Berührungscurve von F_1^{4n-r} und Φ_1^4 ist von der Ordnung $8n - 2r$.

17. Von besonderem Interesse sind die Curven niedriger Ordnung, die in den Räumen Σ, Σ_1 eindeutig einander entsprechen. Wir wissen bereits (6., 8.), dass i. A. den Geraden von Σ Kegelschnitte in Σ_1 entsprechen, und den Kegelschnitten von Σ rationale Curven vierter Ordnung. Den Kegelschnitten von Σ , die durch zwei Knotenpunkte gehen, entsprechen in Σ_1 Kegelschnitte (11.). Wenn ein Kegelschnitt durch drei Knotenpunkte geht, so entspricht ihm in Σ_1 eine Gerade; enthält er nur einen Knotenpunkt, so entspricht ihm (15.) eine rationale

Curve dritter Ordnung in Σ , und zwar eine ebene oder gewundene, je nachdem er auf einer F^2 des Gebüsches liegt oder nicht.

Einer cubischen Raumcurve von Σ , die durch 5, 4, 3 oder 2 Knotenpunkte geht, entspricht in Σ_1 eine Gerade, ein Kegelschnitt, eine rationale Curve dritter resp. eine solche vierter Ordnung (15.). Wenn eine rationale biquadratische Raumcurve in Σ durch 6, 5 oder 4 Knotenpunkte geht, so entspricht ihr in Σ_1 ein Kegelschnitt, eine rationale Curve dritter resp. eine solche vierter Ordnung (15.); geht sie durch 5 oder 4 Knotenpunkte und hat sie einen von ihnen zum Doppelpunkt, so entspricht ihr in Σ_1 ein Kegelschnitt bzw. eine rationale Curve dritter Ordnung. Diese homologen Curven der beiden Räume sind projectiv auf einander bezogen. Ist die Curve in Σ_1 ein Kegelschnitt, so berührt dieser die Brennfläche Φ_1^4 viermal (15.).

Mehr als sechs Knotenpunkte, und zwar unendlich viele, hat das F^2 -Gebüsch nur dann, wenn seine Flächen eine Gerade oder einen Kegelschnitt mit einander gemein haben.

§ 3.

Rationale Flächen dritter bis achter Ordnung mit Kegelschnittschaaren und ebenen Schnitteurven vom Geschlecht eins*).

18. Einer Regelfläche zweiter Ordnung F^2 von Σ , die durch $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ Knotenpunkte $A, B, \dots$ des F^2 -Gebüsches geht, entspricht in Σ_1 eine rationale Fläche $(8-r)^{\text{ter}}$ Ordnung F_1^{8-r} . Diese ist eindeutig auf F^2 bezogen und der Brennfläche Φ_1^4 längs einer Curve $(16-2r)^{\text{ter}}$ Ordnung eingeschrieben (16.). Ihre ebenen Schnitte sind i. A. vom Geschlecht eins, wie die ihnen entsprechenden biquadratischen Raumcurven erster Art, in denen F^2 von den Flächen des Gebüsches geschnitten wird (vgl. 2.). Diese ebenen Schnitteurven $(8-r)^{\text{ter}}$ Ordnung haben demnach je:

$$\frac{1}{2}(7-r)(6-r) - 1 = 20 - \frac{1}{2}(13-r)r$$

Doppelpunkte. Die Doppelcurve der Fläche F_1^{8-r} ist also von der Ordnung $20 - \frac{1}{2}(13-r)r$; ihr entspricht auf F^2 eine sich selbst associirte Curve $(20-4r)^{\text{ter}}$ Ordnung, die $A, B, \dots$ zu $(5-r)$ -fachen Punkten hat (14.).

*) Zu diesen Flächen und ihrer Abbildung auf einer Ebene und einer Fläche zweiter Ordnung gelangte Herr *del Pezzo* schon 1887 (in den Rendic. del Circolo mat. di Palermo I, p. 241–271), indem er Flächen achter Ordnung im Raume von 8 Dimensionen aus 5 Centren auf unseren dreidimensionalen Raum projecirte. Er bestimmte ihre Geraden und Doppelcurven und wies zwei Kegelschnittschaaren auf ihnen nach. Herrn Noether verdanke ich diese Litteraturangabe.

Die Fläche F_1^{8-r} ist i. A. von der 12^{ten} Classe. Durch eine Gerade g_1 nämlich gehen i. A. zwölf Berührungsebenen der Fläche, weil in der entsprechenden Raumcurve $C^{2 \cdot 2}$ des Gebüsches i. A. zwölf Flächen zweiter Ordnung sich schneiden, welche die Regelfläche F^2 berühren. Ausser der Doppelcurve kann F_1^{8-r} noch vereinzelte Doppelpunkte haben, und diese erniedrigen die Classe der Fläche um je zwei Einheiten.

19. Den beiden Geraden a, a' von F^2 , die in einem Knotenpunkte A sich schneiden, entsprechen auf F_1^{8-r} zwei windschiefe Gerade a_1, a_1' ; diese aber treffen eine dritte Gerade a_1'' von F_1^{8-r} , welche dem Punkte A von F^2 und seiner Berührungsebene entspricht (9.). Mit je drei Geraden b_1, b_1', b_1'' , die ebenso einem anderen Knotenpunkte B auf F^2 zugehören, bilden jene drei ein windschiefes Sechseit $a_1 a_1'' a_1' b_1 b_1'' b_1'$ auf F_1^{8-r} , dem auf F^2 das Vierseit $aa'bb'$ mit den gegenüberliegenden Eckpunkten A, B entspricht. Einem Kegelschnitte auf F^2 durch drei Knotenpunkte A, B, C entspricht (17.) auf F_1^{8-r} eine Gerade d_1''' , während den Punkten A, B, C je drei Gerade auf F_1^{8-r} zugehören. Jede dieser zehn Geraden der Fläche F_1^{8-r} schneidet drei andere, und die übrigen sechs bilden ein windschiefes Sechseit, wie aus ihrer Abbildung auf F^2 sofort einleuchtet. So schneidet a_1'' die Geraden a_1, a_1', d_1''' , und $b_1 b_1'' b_1' c_1 c_1'' c_1'$ bilden ein Sechseit; b_1 schneidet b_1'', a_1', c_1' , und $a_1 b_1' c_1 c_1'' d_1''' a_1''$ bilden ein Sechseit; d_1''' schneidet a_1'', b_1'' und c_1'' , während $a_1 b_1' c_1 a_1' b_1 c_1'$ ein Sechseit bilden.

Geht die Regelfläche F^2 durch vier Knotenpunkte A, B, C, D der Transformation, so enthält die Fläche F_1^{8-r} sechzehn Gerade, die wir bezeichnen mit

$$a_1 a_1' a_1'' a_1''', \quad b_1 b_1' b_1'' b_1''', \quad c_1 c_1' c_1'' c_1''', \quad d_1 d_1' d_1'' d_1'''.$$

Die Geraden $a_1''', b_1''', c_1''', d_1'''$ entsprechen den Kegelschnitten von F^2 , die in den resp. Ebenen BCD, CDA, DAB, ABC liegen; von den übrigen zwölf gehören je drei zu den Knotenpunkten A, B, C, D . Jede der 16 Geraden schneidet, wie aus ihrer Abbildung auf F^2 sich ergibt, fünf und nur fünf andere, zu einander windschiefe; z. B.

$$\begin{aligned} a_1 & \text{ schneidet } a_1'' a_1''' b_1' c_1' d_1'; & a_1' & \text{ schneidet } a_1'' a_1''' b_1 c_1 d_1; \\ a_1'' & \text{ schneidet } a_1 a_1' b_1''' c_1''' d_1''; & a_1''' & \text{ schneidet } a_1 a_1' b_1'' c_1'' d_1''. \end{aligned}$$

20. Die Fläche F_1^{8-r} enthält $3r + \frac{1}{6}r(r-1)(r-2)$ Gerade g_1 , von denen r den Knotenpunkten auf F^2 entsprechen, $2r$ andere den $2r$ Geraden von F_1^2 , die sich paarweise in den r Knotenpunkten schneiden, und die übrigen $\frac{1}{6}r(r-1)(r-2)$ den Kegelschnitten auf F^2 , die durch je drei der Knotenpunkte gehen (17., 19.). Ist $r = 5$,

so enthält F_1^{8-r} noch zwei weitere Gerade g_1 ; diese entsprechen den cubischen Raumcurven, die auf F^2 durch die 5 Knotenpunkte gehen.

Die Ebenen der Geraden g_1 berühren die Fläche F_1^{8-r} doppelt. Ihnen entsprechen nämlich Flächen des F^2 -Gebüsches, welche die Regelfläche F^2 entweder doppelt berühren oder sie je in einer bi-quadratischen Raumcurve schneiden, die zweimal durch einen Knotenpunkt geht. Jede Ebene durch zwei der Geraden g_1 berührt die Fläche F_1^{8-r} dreimal.

21. Die Fläche F_1^{8-r} enthält:

$$2 + \frac{1}{2} r(r-1) + \frac{1}{12} r(r-1)(r-2)(r-3)$$

Kegelschnittschaaren, von denen je ein Kegelschnitt durch einen beliebigen Punkt der Fläche geht. Zwei dieser Schaaren werden auf der Regelfläche F^2 dargestellt durch die beiden Schaaren von Geraden, $\frac{1}{2} r(r-1)$ andere durch die Schaaren von Kegelschnitten, welche je zwei der r Knotenpunkte enthalten; die übrigen $\frac{1}{12} r(r-1)(r-2)(r-3)$ Schaaren entsprechen den Schaaren cubischer Raumcurven auf F^2 , welche durch je vier Knotenpunkte gehen und je eine der beiden Geradenschaaren zu Sehnen haben. Ist $r=5$, so kommen noch fünf Kegelschnittschaaren auf F_1^{8-r} hinzu; ihnen entsprechen auf F^2 Schaaren bi-quadratischer Raumcurven, die alle fünf Knotenpunkte und zwar je einen doppelt enthalten.

Die Ebenen der ∞^1 Kegelschnitte auf F_1^{8-r} berühren die Fläche doppelt; denn die entsprechenden Flächen des Gebüsches berühren die Regelfläche F^2 theils doppelt theils in einem Knotenpunkte. Zwei Kegelschnitte von einer und derselben Schaar treffen sich i. A. nicht, haben also mit der Schnittlinie ihrer Ebenen zwei verschiedene Punktepaare gemein. Wenn aber diese Ebenen und damit die beiden Kegelschnitte einander unendlich nahe rücken, so fallen auch die beiden Punktepaare zusammen, und die Schnittlinie der beiden Ebenen geht über in eine Doppeltangente von F_1^{8-r} . Die Ebenen jeder Kegelschnittschaar von F_1^{8-r} umhüllen demnach eine abwickelbare Fläche, die eine Schaar von Doppeltangenten der Fläche F_1^{8-r} enthält und ihr umschrieben ist.

22. Von jeder Kegelschnittschaar auf F_1^{8-r} zerfallen r Kegelschnitte in je zwei der Geraden g_1 (20., 21.); ihre übrigen Kegelschnitte sind zu den entsprechenden Linien auf F^2 projectiv. Zwei Kegelschnitte verschiedener Schaaren treffen sich, wie aus ihrer Abbildung auf F^2 einleuchtet, einmal, wenn $r < 4$, ein- oder zweimal, wenn $r=4$ oder 5 ist. Jede Schaar schneidet im Falle $r < 4$ die Curven und die Hälfte der Geraden g_1 einer beliebigen anderen Schaar in projectiven Punktreihen; denn das Gleiche gilt von der entsprechenden

Schaar und den entsprechenden Linien auf F^2 . Die Kegelschnitte einer jeden Schaar liegen folglich in den Ebenen eines Ebenenbüschels $(6-r)^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher erzeugt wird durch r Gerade g_1 und $3-r$ Kegelschnitte, die projectiv sind.

Im Falle $r=4$ enthält F_1^{8-r} zehn Kegelschnittschaaren (21.), die paarweise conjugirt sind (Clebsch); und zwar schneiden die Curven einer beliebigen Schaar jeden Kegelschnitt der conjugirten Schaar in Punktepaaren einer Involution, die Kegelschnitte und Geraden g_1 der übrigen Schaaren aber in projectiven Punktreihen, wie die Abbildung auf F^2 lehrt. Die fünf paar conjugirten Schaaren der Fläche vierter Ordnung F_1^4 liegen folglich in den Ebenen von fünf Büscheln zweiter Ordnung, und diese umhüllen die fünf von Kummer*) entdeckten Kegel zweiter Ordnung, deren Strahlen die Fläche doppelt berühren (21.). Für $r=5$ erhalten wir die allgemeine cubische Fläche F_1^3 mit 27 Kegelschnittschaaren, deren Ebenen durch je eine der 27 Geraden g_1 der Fläche gehen. Wir schliessen den Fall $r=5$ von jetzt an vorläufig aus.

23. Die Fläche F_1^{8-r} enthält $r + \frac{1}{3}r(r-1)(r-2)$ Netze von je ∞^2 cubischen Raumcurven, und zwar entsprechen r dieser Netze den Kegelschnitten auf F^2 , die durch je einen der r Knotenpunkte gehen, und die übrigen den cubischen Raumcurven durch je drei Knotenpunkte, die je eine Geradenschaar von F^2 zu Sehnen haben (17.). Dazu kommen für $r=4$ noch vier Netze cubischer Raumcurven auf F_1^{8-r} ; diesen entsprechen auf F^2 biquadratische Raumcurven, die alle vier Knotenpunkte und zwar je einen doppelt enthalten. Durch zwei beliebige Punkte der Fläche geht von jedem der Netze eine Curve. Zwei Curven desselben Netzes treffen sich einmal, Curven verschiedener Netze treffen sich theils zwei- theils dreimal.

Die Fläche F_1^{8-r} enthält $1 + r(r-1) + \frac{1}{2}r(r-1)(r-2)$ Systeme von je ∞^3 rationalen biquadratischen Raumcurven. Diesen Raumcurven entsprechen auf F^2 theils die Kegelschnitte (17.), theils cubische Raumcurven durch je zwei der r Knotenpunkte, theils biquadratische Raumcurven durch je drei Knotenpunkte, die je einen von diesen zum Doppelpunkt haben. Dazu kommen für $r=4$ noch 15 Systeme rationaler biquadratischer Raumcurven; ihnen entsprechen auf F^2 rationale Raumcurven vierter, fünfter und sechster Ordnung, die durch alle vier Knotenpunkte gehen und zwar durch resp. 0, 2, 4 Knotenpunkte zweimal.

24. Die Regelfläche F^2 trifft unendlich viele Flächen des F^2 .

*) Monatsbericht der Berliner Akad. vom 16. Juli 1863 und Crelle's Journal Bd. 64, S. 66–76.

Gebüsches in je zwei Kegelschnitten und berührt sie zweimal in deren Schnittpunkten; die Fläche F_1^{8-r} aber berührt die entsprechenden Ebenen des Raumes Σ doppelt und schneidet sie in je zwei rationalen Curven. Nun enthält aber ein F^2 -Bündel des Gebüsches i. A. zehn Flächen, die mit der Regelfläche je zwei Kegelschnitte gemein haben; denn er liegt mit ihr in einem F^2 -Gebüsch, dieses enthält i. A. zehn Ebenenpaare*), und in deren Ebenen liegen die zehn Kegelschnittpaare. Durch einen beliebigen Punkt von Σ gehen demnach i. A. zehn von jenen, die Fläche F_1^{8-r} doppelt berührenden Ebenen. Diese Ebenen schneiden die Fläche, falls $r = 0$ oder 1 ist, in je zwei rationalen Curven vierter bzw. vierter und dritter Ordnung. Ihr Büschel 10^{ter} Ordnung zerfällt, wenn $r = 2$ ist, in zwei Büschel 6^{ter} und 4^{ter} Ordnung, deren Ebenen die Fläche in je zwei Curven dritter bzw. einer Curve zweiter und einer vierter Ordnung schneiden. Wenn $r > 2$ ist, so zerfällt der Büschel zehnter Ordnung in mehrere der früher (20., 22.) besprochenen Büschel doppelt berührender Ebenen.

25. Zu einer Abbildung der Fläche F_1^{8-r} auf einer Ebene η gelangen wir, indem wir die Regelfläche F^2 aus einem in ihr gelegenen Punkte S auf die Ebene projiciren. Die ebenen Schnitte von F_1^{8-r} werden dann in η dargestellt durch die Projectionen der biquadratischen Raumcurven, in denen F^2 von den Flächen des Gebüsches geschnitten wird (vgl. 18.). Diese Raumcurven gehen durch die r Knotenpunkte des Gebüsches auf F^2 und schneiden die beiden durch S gehenden Geraden von F^2 zweimal; ihre Projectionen in η gehen deshalb durch die Spuren der beiden Geraden je zweimal und durch die Projectionen der r Knotenpunkte je einmal. Die ebenen Schnitte von F_1^{8-r} werden also in der Ebene η abgebildet durch Curven vierter Ordnung, welche 2 Doppelpunkte und r einfache Punkte gemein haben.

26. Die Abbildung von F_1^{8-r} auf der Ebene η wird, falls $r > 0$ ist, noch einfacher, wenn das Projectionscentrum S in einem der r Knotenpunkte angenommen wird. Die ebenen Schnitte der Fläche werden dann in η dargestellt durch cubische Curven mit $r + 1$ gemeinsamen Punkten; und zwar sind $r - 1$ dieser „Hauptpunkte“ die Projectionen der übrigen $r - 1$ Knotenpunkte, und zwei sind die Spuren der beiden durch S gehenden Geraden von F^2 . Die Geraden g_1 von F_1^{8-r} werden (nach 20.) in η dargestellt durch die $r + 1$ Hauptpunkte, ihre Verbindungslinien und die Kegelschnitte, die von ihnen je fünf enthalten. Die Kegelschnittschaaren auf F_1^{8-r} werden in η abgebildet durch die $r + 1$ Strahlenbüschel der Hauptpunkte und durch die Kegelschnittbüschel, die durch je vier Hauptpunkte gehen (21.); hierzu kommen für $r = 5$ noch sechs Büschel von cubischen Curven, die alle

*) Vgl. Crelle's Journal Bd. 82, S. 76.

sechs Hauptpunkte und zwar einen doppelt enthalten (21.). Den Punkten der Doppelcurve von F_1^{8-r} entsprechen in η Punktepaare einer Curve $(15-3r)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die $r+1$ Hauptpunkte zu $(5-r)$ -fachen Punkten hat (14., 18.).

27. In den Fällen $r=5$ und $r=4$ stimmt diese Abbildung mit den bekannten Abbildungen überein, die Clebsch *) von der allgemeinen cubischen Fläche F_1^3 und von der biquadratischen Fläche F_1^4 mit einer Doppelcurve zweiter Ordnung zuerst angegeben hat. Die reichhaltige Litteratur über die Fläche F_1^4 findet man in zwei Abhandlungen der Herren Segre**) und Berzolari***) zusammengestellt. Die Fläche F_1^5 hat Caporali†) mittelst der obigen Abbildung eingehend untersucht, nachdem Clebsch††) zuerst auf sie hingewiesen und Herr R. Sturm†††) ihre wichtigeren Eigenschaften ohne Abbildung begründet hatte. In einer anderen Abhandlung gelangt Caporali*†) u. a. auch zu der Fläche F_1^6 , von dem System der Bildcurven ihrer ebenen Schnitte ausgehend. Zu der eindeutigen Abbildung der cubischen Fläche F_1^3 auf einer Regelfläche zweiter Ordnung gelangte Herr Cremona**†) schon 1871 mittelst einer rationalen Raumtransformation zweiten Grades.

28. Von den rationalen Flächen $(8-r)^{\text{ter}}$ Ordnung 12^{ter} Classe F_1^{8-r} stellen wir einige bemerkenswerthe Eigenschaften aus den Nrn 18., 20., 22., 23 übersichtlich zusammen.

Es ergeben sich für	$r=0$	1	2	3	4	5
die rationalen Flächen:	F_1^8	F_1^7	F_1^6	F_1^5	F_1^4	F_1^3 .
Ordnung ihrer Doppelcurven:	20	14	9	5	2	0;
Anzahl ihrer Geraden:	0	3	6	10	16	27;
„ ihrer Kegelschnittschaaren:	2	2	3	5	10	27;
Ordnung von deren Ebenenbüscheln:	6	5	4	3	2	1;
Zahl ihrer Netze cub. Raumcurven:	0	1	2	5	16	72.

Die ebenen Schnitte aller dieser Flächen sind vom Geschlecht eins.

29. Von den zahlreichen Specialfällen der Fläche F_1^{8-r} heben wir folgende hervor: Wenn die Regelfläche F^2 durch $i=3, 4, 5, 6$ associirte Punkte geht, so hat die Fläche F_1^{8-r} einen i -fachen Punkt, und dieser ist ein $\frac{1}{2} i(i-1)$ -facher Punkt ihrer Doppelcurve. Liegen auf

*) Crelle's Journal Bd. 65 und 69.

**) Diese Annalen Bd. 24 (1884).

***) Annali di Matem., Ser. II, t. 13 (1885).

†) Annali di Matem., Ser. II, t. 7.

††) Diese Annalen Bd. 3, S. 75.

†††) Diese Annalen Bd. 4, S. 278.

*†) Collectanea mathematica, 1881, S. 169.

**†) Annali di Matem., Ser. II, t. 5, p. 147.

F^2 Hauptstrahlen von Σ , die durch keinen Knotenpunkt gehen, so enthält F_1^{8-r} ebenso viele Doppelpunktgerade; diese entsprechen den Hauptstrahlen (vgl. 8.), und auf jede von ihnen reducirt sich ein Kegelschnitt der Fläche (6., 21.); die Doppelcurve dieser speciellen F_1^{8-r} zerfällt. Verbindet eine Gerade von F^2 zwei der r Knotenpunkte, so entspricht ihr auf F_1^{8-r} ein ausgezeichneteter Doppelpunkt; durch diesen gehen die Kegelschnitte von mindestens einer Schaar der Fläche.

Liegen auf F^2 in den Fällen $r = 4$ oder 5 zwei windschiefe Verbindungslinien a, b von Knotenpunkten, so hat die entsprechende Fläche F_1^4 resp. F_1^3 zwei Doppelpunkte A_1, B_1 . Den mit a und b incidenten Geraden von F^2 entsprechen auf F_1^4 resp. F_1^3 Kegelschnitte, die durch A_1 und B_1 gehen (11.); vier dieser Kegelschnitte aber zerfallen in je zwei durch resp. A_1 und B_1 gehende Gerade, und wenn $r = 5$ ist, so zerfällt ein fünfter in $A_1 B_1$ und eine andere Gerade.

30. Wenn die Regelfläche F^2 in einen Kegel zweiter Ordnung übergeht, so fallen gewisse Gerade und Kegelschnittschaaren von F_1^{8-r} paarweise zusammen, und dem Doppelpunkte des Kegels entspricht auf F_1^{8-r} ein Doppelpunkt, der auf den Kegelschnitten von mindestens einer Schaar, aber i. A. nicht auf der Doppelcurve der Fläche liegt. Hat der Kegel einen der r Knotenpunkte, des F^2 -Gebüsches, die auf ihm liegen, zum Doppelpunkte, so entspricht ihm in Σ_1 eine geradlinige Fläche $(7-r)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren ebene Schnitte vom Geschlecht Null sind; z. B. für $r=3$ eine biquadratische Regelfläche mit cubischer Doppelcurve und einer Kegelschnittschaar.

Beiläufig sei noch erwähnt, dass mindestens $2r$ Gerade g_1 und zwei Kegelschnittschaaren auf F_1^{8-r} imaginär werden, wenn F^2 in ein zweitheiliges Hyperboloid, ein elliptisches Paraboloid oder Ellipsoid übergeht (vgl. 20., 21.).

§ 4.

Rationale Flächen vierter bis achter Ordnung mit je einer Kegelschnittschaar und ebenen Schnittcurven vom Geschlecht zwei.

31. Nachdem schon Herr Noether*) gewisse rationale Flächen fünfter und sechster Ordnung auf solche dritter Ordnung zurückgeführt hatte, leitete Herr Cremona**) aus den cubischen Flächen andere rationale Flächen vierter bis achter Ordnung ab, darunter solche mit Kegelschnittschaaren. Die von den beiden Autoren benutzten Raumtransformationen sind aber rational (d. h. eindeutig umkehrbar) und vom dritten Grade. Wir wollen durch quadratische, nicht eindeutig

*) Diese Annalen Bd. 3, S. 568 und 573.

**) Diese Annalen Bd. 4, S. 213—230.

umkehrbare Transformationen eine specielle cubische Fläche F^3 in rationale Flächen höherer Ordnung mit je einer Kegelschnittschaar umwandeln. Zunächst aber stellen wir die in Betracht kommenden Eigenschaften der Fläche F^3 in Kürze zusammen.

Wenn eine cubische Fläche F^3 einen Doppelpunkt A hat, so fallen bekanntlich zwölf ihrer 27 Geraden paarweise mit sechs durch A gehenden reellen oder imaginären Geraden zusammen, und F^3 enthält nur noch 15 andere Gerade. Jene 6 Geraden liegen auf dem Tangentialkegel von A , der von der zweiten Ordnung ist und die erste Polare von A nach F^3 darstellt. Ihre 15 Verbindungsebenen schneiden F^3 noch in je einer der übrigen 15 Geraden.

32. Hat die cubische Fläche F^3 zwei Doppelpunkte A, B , so enthält sie die Gerade AB und hat mit deren Ebenen noch je einen durch A und B gehenden Kegelschnitt gemein (vgl. 29.). Der Kegelschnitt zerfällt in AB und eine andere Gerade s , wenn seine Ebene die Fläche in einem Punkte C von AB berührt. Die Ebene hat aber dann mit F^3 zwei in AB zusammenfallende Gerade gemein und berührt F^3 in allen Punkten von AB . Auch die Tangentialkegel der Doppelpunkte A, B enthalten diese beiden zusammenfallenden Geraden (31.); sie berühren sich und die cubische Fläche längs AB und haben mit F^3 nur noch je vier andere Gerade a resp. b gemein.

33. Die vier Geraden a durch A schneiden je eine der vier Geraden b durch B und bilden mit ihnen vier Kegelschnitte der Schaar (32., 29.); die vier Schnittpunkte ab liegen auf dem Kegelschnitt, den die Tangentialkegel von A und B ausser ihrem Berührungsstrahle mit einander gemein haben, und welcher die cubische Fläche in einem Punkte von AB berührt.

Die Verbindungsebene von zwei der vier Geraden a schneidet die Fläche F^3 noch in einer Geraden k , und diese trifft die Gerade s (vgl. 32.) und die beiden zu den $2a$ windschiefen Geraden b . Auf F^3 liegen demnach sechs Gerade k , die mit s , mit je $2a$ und je $2b$ incident sind und paarweise mit s in drei Ebenen liegen. Damit sind alle 27 Geraden der cubischen Fläche nachgewiesen, denn mit AB fallen vier, mit den $4a$ und $4b$ aber je zwei von ihnen zusammen. Eine Ebene hat mit F^3 nur dann einen Kegelschnitt gemein, wenn sie durch eine der 16 Geraden $AB, s, 4a, 4b$ und $6k$ geht.

34. Fünf Kegelschnitte der cubischen Fläche verbinden einen beliebigen Punkt P von F^3 mit dem Doppelpunkte A ; einer von ihnen geht zugleich durch B , die Ebenen der vier übrigen l gehen durch je eine der vier Geraden a . Verbindet man vier Punkte P der Fläche mit einem ihrer Kegelschnitte durch eine Fläche zweiter Ordnung, so hat diese mit F^3 noch eine die $4P$ enthaltende biquadratische Raumcurve erster Art gemein. Mit den Kegelschnitten von F^3 , deren Ebenen

durch eine bestimmte von den 16 Geraden gehen, kann diese Raumcurve durch Flächen zweiter Ordnung verbunden werden.

Die Fläche F^3 enthält sechs Netze von je ∞^2 cubischen Raumcurven, die durch beide Doppelpunkte gehen; sie schneidet die ∞^2 Flächen zweiter Ordnung, welche je eine der sechs Geraden k mit s und AB verbinden, in den Curven dieser paarweise conjugirten Netze. Zwei Raumcurven aus conjugirten Netzen liegen allemal auf einer Fläche zweiter Ordnung. Zwei beliebige Punkte der Fläche können mit A und B durch sechs cubische Raumcurven m verbunden werden, die je einem dieser Netze angehören. Jede dieser sechs Curven m trifft eine der 6 Geraden k zweimal, die mit dieser incidente gar nicht, die übrigen $4k$ aber und die Gerade s einmal; sie trifft nur die zwei Geraden a und die $2b$, welche jene erste k nicht schneiden, in je einem von A und B verschiedenen Punkte.

35. Wir wählen nun die beiden Doppelpunkte A, B und $r = 0, 1, 2, 3, 4$ beliebige einfache Punkte P der cubischen Fläche F^3 zu Knotenpunkten des F^2 -Gebüsches in Σ . Dann entspricht (11.) jedem durch A und B gehenden Kegelschnitt von F^3 ein zu ihm projectiver Kegelschnitt in Σ_1 ; der Fläche F^3 aber entspricht in Σ_1 eine eindeutig auf sie bezogene rationale Fläche F_2^{8-r} , die eine Schaar von Kegelschnitten enthält. Die Fläche F_2^{8-r} ist von der $(8-r)^{\text{ten}}$ Ordnung und i. A. von der 24^{sten} Classe; denn eine beliebige Gerade von Σ_1 trifft sie in $8-r$ Punkten, und durch die Gerade gehen an sie i. A. 24 Berührungsebenen, weil F^3 mit der entsprechenden biquadratischen Raumcurve $C^{2.2}$ des Gebüsches ausser den Doppelpunkten A, B und den r Punkten P noch $8-r$ Punkte gemein hat, und weil durch $C^{2.2}$ i. A. 24 Flächen des F^2 -Gebüsches gehen, welche F^3 berühren. Die Schnittcurven von F_2^{8-r} mit beliebigen Ebenen sind vom Geschlecht zwei wie die entsprechenden Raumcurven sechster Ordnung, in denen F^3 von den Flächen des Gebüsches geschnitten wird, und die aus dem Doppelpunkt A durch biquadratische Kegel mit dem Doppelstrahl AB und $4+r$ einfachen gemeinsamen Strahlen a und AP projectirt werden. Die ebenen Schnittcurven von F_2^{8-r} haben demnach je

$$\frac{1}{2}(7-r)(6-r) - 2 = 19 - \frac{1}{2}(13-r)r$$

Doppelpunkte, und die Doppelcurve von F_2^{8-r} ist von der Ordnung $19 - \frac{1}{2}(13-r)r$. Ihr entspricht, beiläufig bemerkt, auf F^3 eine sich selbst associirte Curve $(28-2r)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche A und B zu $(9-2r)$ -fachen und die r Knotenpunkte P zu $(5-r)$ -fachen Punkten hat.

36. Die Fläche F_2^{8-r} enthält $8+2r$ Gerade g_1 , die paarweise sich schneiden. Acht dieser Geraden, $4a_1$ und $4b_1$, entsprechen den acht Geraden $4a$ und $4b$ auf F^3 , die paarweise mit AB in vier Ebenen

liegen und durch resp. A und B gehen (33., 10.); die $2r$ übrigen entsprechen den r Knotenpunkten P und den r Kegelschnitten auf F^3 , die je einen der Punkte P mit A und B verbinden (9., 17.). Die Kegelschnittschaar auf F_2^{8-r} enthält demnach $4 + r$ Kegelschnitte, die in je zwei der $8 + 2r$ Geraden g_1 zerfallen. Die Ebenen der Geraden g_1 sowohl wie die der Kegelschnittschaar berühren die Fläche F_2^{8-r} doppelt (vgl. 20., 21.). Die $8 + 2r$ Geraden treffen, wie hieraus folgt, die Doppelcurve von F_2^{8-r} je $(5-r)$ mal; die Kegelschnitte der Schaar treffen die Doppelcurve je $(10-2r)$ mal. Die Ebenen der Schaar umhüllen eine abwickelbare Fläche, die eine Schaar von Doppeltangenten der F_2^{8-r} enthält (21.). Der Geraden s entspricht ein Kegelschnitt der Schaar, der Geraden AB entspricht (11.) ein Punkt C_1 dieses Kegelschnitts auf F_2^{8-r} .

Bei besonderen Lagen der Knotenpunkte P kann die Fläche F_2^{8-r} mehr als $8 + 2r$ Gerade enthalten. Wenn nämlich eine der 6 Geraden k auf F^3 durch einen Knotenpunkt P geht, so entspricht ihr eine Gerade auf F_2^{8-r} ; dasselbe gilt von einem Kegelschnitt der F^3 , welcher durch A oder B und zwei Knotenpunkte P oder durch drei P geht. Bei passender Annahme der r Punkte P kann die Fläche F_2^{8-r} bis zu $8+4r$ einfache Gerade enthalten, von denen aber nur $8+2r$ der Kegelschnittschaar angehören. Wir sehen von diesen besonderen Fällen der Fläche hier ab.

37. Ausser der Kegelschnittschaar enthält die Fläche F_2^{8-r} noch 2^{3+r} einzelne Kegelschnitte k_1, l_1, m_1, n_1, p_1 . Und zwar entsprechen auf der cubischen Fläche F^3 :

- 1) den 8 Kegelschnitten k_1 von F_2^{8-r} die 6 Geraden k und die beiden Doppelpunkte A, B oder vielmehr deren Tangentialkegel zweiter Ordnung (9.);
- 2) den $8r$ Kegelschnitten l_1 die Kegelschnitte l , die zu achten je einen Punkt P mit A oder B verbinden (34.);
- 3) den $8 \frac{r(r-1)}{1.2}$ Kegelschnitten m_1 die cubischen Raumcurven m durch A, B und je zwei Punkte P (34.) und die ebenen Curven dritter Ordnung durch A oder B und je $2P$;
- 4) den $8 \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}$ Kegelschnitten n_1 die biquadratischen Raumcurven durch A, B und je $3P$, die A oder B zum Doppelpunkt haben;
- 5) den $8 \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.3.4}$ Kegelschnitten p_1 die Raumcurven fünfter Ordnung durch A, B und $4P$, die entweder A oder B zum dreifachen Punkte oder A und B zu Doppelpunkten haben.

Da $r \leq 4$ ist, so wird

$$1 + r + \frac{r(r-1)}{2} + \dots + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = (1+1)^r = 2^r,$$

und 2^{3+r} ist die Anzahl der vereinzelter Kegelschnitte auf F_2^{8-r} .

Diese 2^{3+r} Kegelschnitte werden durch die Kegelschnittschaar der Fläche F_2^{8-r} projectiv so auf einander bezogen, dass sie ihre Schnittpunkte entsprechend gemein haben; denn ihre homologen Geraden, Tangentialkegel und Curven auf F^3 sind zu ihnen projectiv und werden durch den Ebenenbüschel AB und die entsprechende Kegelschnittschaar der cubischen Fläche auf einander projectiv bezogen. Jeder der 2^{3+r} Kegelschnitte trifft also alle Kegelschnitte der Schaar und insbesondere (36.) die Hälfte der $8 + 2r$ Geraden von F_2^{8-r} .

38. Aus der Abbildung der 2^{3+r} Kegelschnitte k_1, l_1, m_1, n_1, p_1 von F_2^{8-r} auf der cubischen Fläche F^3 ergibt sich u. a. Folgendes (vgl. 33., 34.). Jeder der 8 Kegelschnitte k_1 wird gar nicht getroffen von 6 der übrigen k_1 , von $4r$ der Kegelschnitte l_1 und von $\frac{1}{2}r(r-1)$ der m_1 ; er wird einmal getroffen von einem der übrigen k_1 , von $4r$ der l_1 , von $3r(r-1)$ der m_1 , von $\frac{2}{3}r(r-1)(r-2)$ der n_1 und, wenn $r=4$ ist, von einem der p_1 ; zweimal von $\frac{1}{2}r(r-1)$ der m_1 , von $\frac{2}{3}r(r-1)(r-2)$ der n_1 und, wenn $r=4$, von sechs der p_1 ; er trifft, wenn $r=4$ ist, dreimal einen der Kegelschnitte p_1 .

39. Beliebige drei der 2^{3+r} projectiven Kegelschnitte von F_2^{8-r} erzeugen durch ihre homologen Punkte die Ebenen der Kegelschnittschaar dieser Fläche (37.). Die drei Kegelschnitte aber lassen sich so auswählen, dass sie zu zweien $r+1$ Punkte entsprechend gemein haben. Man wähle zwei sich treffende k_1 und füge für $r=0, 1$ oder 2 einen Kegelschnitt k_1, l_1 resp. m_1 hinzu, der einen der beiden k_1 gar nicht, einmal resp. zweimal trifft; für $r=3$ oder 4 aber wähle man einen Kegelschnitt k_1 , einen ihn zweimal treffenden m_1 und einen ihn zwei- resp. dreimal treffenden n_1 resp. p_1 .

Die Ebenen der Kegelschnittschaar auf F_2^{8-r} bilden demnach einen rationalen Ebenenbüschel $(5-r)^{\text{ter}}$ Ordnung; dieser wird erzeugt durch drei projective Kegelschnitte, die zu zweien $r+1$ Punkte entsprechend gemein haben*).

*) Drei projective rationale Curven von den Ordnungen n, p, q erzeugen i. A. einen rationalen Ebenenbüschel $(n+p+q)^{\text{ter}}$ Ordnung. Denn die homogenen Coordinaten ihrer homologen Punkte lassen sich durch ganze Functionen n^{ten} , p^{ten} resp. q^{ten} Grades eines Parameters λ darstellen, die Gleichung der Verbindungsebene homologer Punkte wird also für λ vom Grade $n+p+q$, und hieraus folgt der Satz. Wenn aber drei homologe Curvenpunkte in einer Geraden u

40. Die Fläche F_2^{8-r} enthält 2^{3+r} Schaaren cubischer und 2^{3+r} Netze rationaler biquadratischer Raumcurven. Den Netzen biquadratischer Raumcurven entsprechen auf F^3 die sechs Netze cubischer Raumcurven durch A und B (34.), zwei Netze ebener cubischer Curven durch A oder B , $8r$ Netze biquadratischer Raumcurven durch A , B und je einen der r Knotenpunkte P mit einem Doppelpunkt in A oder B , $8 \frac{r(r-1)}{2}$ Netze von Raumcurven 5^{ter} Ordnung durch A , B und je $2P$, die entweder A oder B zum dreifachen Punkte oder A und B zu Doppelpunkten haben; u. s. w. Den cubischen Raumcurven der 2^{3+r} Schaaren entsprechen auf F^3 die Kegelschnitte durch A oder B , deren Ebenen durch je eine der 8 Geraden a, b gehen, die cubischen Raumcurven durch A , B und je einen Knotenpunkt P , die ebenen Curven 3^{ter} Ordnung durch A oder B und je einen P , die biquadratischen Raumcurven durch A , B und je $2P$ mit einem Doppelpunkt in A oder B ; u. s. w. Den Kegelschnittschaaren auf F^3 , deren Ebenen durch je eine der sechs Geraden k gehen, entsprechen 6 Schaaren rationaler biquadratischer Raumcurven, ihren durch je einen Punkt P gehenden Kegelschnitten entsprechen $6r$ cubische Raumcurven auf F_2^{8-r} . Alle diese cubischen und biquadratischen Raumcurven der Fläche F_2^{8-r} werden durch deren Kegelschnittschaar projectiv auf einander bezogen (vgl. 37.); jede von ihnen trifft die Kegelschnitte der Schaar und $4 + r$ Gerade der Fläche einmal.

41. Wird die cubische Fläche F^3 aus ihrem Doppelpunkte A auf eine Ebene η' projicirt, so wird zugleich mit ihr die Fläche F_2^{8-r} eindeutig auf η' abgebildet. Den ebenen Schnittcurven von F_2^{8-r} entsprechen in η' biquadratische Curven vom Geschlecht zwei, die einen Punkt B' zum Doppelpunkt haben und noch durch $4 + r$ andere Punkte P' gehen. Vier dieser „Hauptpunkte“ P' sind (35.) die Spuren der 4 Geraden a , die r übrigen aber und B' sind die Projectionen der r Punkte P und des Doppelpunktes B . Die Kegelschnitte der Schaar auf F_2^{8-r} werden in η' dargestellt durch die Geraden des Hauptpunktes B' , die $4 + r$ Geradenpaare aber durch je einen der $4 + r$ Hauptpunkte P' und seine Verbindungslinie mit B' . Den 2^{3+r} einzelnen Kegelschnitten auf F_2^{8-r} entsprechen in η' der Punkt B' , die Verbindungslinien der r Punkte P' , die Kegelschnitte durch B' und je $4P'$, die Curven dritter Ordnung durch je $6P'$ mit einem

liegen, und insbesondere wenn zwei der Curven einen Punkt entsprechend gemein haben, so zerfällt der Ebenenbüschel in einen Büschel u erster und einen Büschel $(n + p + q - 1)$ ^{ter} Ordnung, und nur der letztere gilt als das Erzeugniss der projectiven Curven. In dem vorliegenden Fall vermindert sich die Ordnung $2 + 2 + 2$ des erzeugten Ebenenbüschels um $3 + r$ Einheiten.

Doppelpunkt in B' und im Falle $r=4$ die Curve vierter Ordnung durch alle $8P'$ mit einem dreifachen Punkte in B' (vgl. 37.).

Für die Flächen vierter und fünfter Ordnung F_2^4 und F_2^5 wurde diese bezw. die reciproke Abbildung schon von Clebsch*) entdeckt und zu ihrer eingehenden Untersuchung benutzt. Auf F_2^4 ist Herr Sturm**), und auf F_2^5 sind die Herren Noether, Cremona und Sturm***) gelegentlich zurückgekommen. Auch Caporali†) erwähnt die Flächen F_2^4 und F_2^5 , sowie F_2^6 . Alle Flächen dieses und des folgenden Paragraphen sind implicite unter den von Castelnuovo††) untersuchten Flächen m^{ter} Ordnung enthalten, welche das „Flächengeschlecht“ Null und ebene hyperelliptische Schnittcurven vom Geschlecht $\pi > 1$ haben. Herr Castelnuovo beweist u. a., dass diese Flächen m^{ter} Ordnung alle rational sind und je eine Kegelschnittschaar enthalten, von welcher i. A. $4\pi + 4 - m$ Kegelschnitte in Gerade zerfallen. Er fasst sie auf als Projectionen von Flächen in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

42. Wir erhalten (nach Nr. 35., 36., 37., 39.)

wenn gesetzt wird:	$r = 0$	1	2	3	4 ,
die rationalen Flächen* $(8-r)^{\text{ter}}$ Ordnung:	F_2^8	F_2^7	F_2^6	F_2^5	F_2^4
mit Doppelcurven von der resp. Ordnung:	19	13	8	4	1.
Anzahl ihrer einfachen Geraden:	8	10	12	14	16;
Anzahl ihrer einzelnen Kegelschnitte:	8	16	32	64	128;
Ordnung des Ebenenbüschels ihrer K -Schaar:	5	4	3	2	1.

In F_2^{8-r} bezeichnet der untere Index 2 das Geschlecht der ebenen Schnittcurven, der obere $8-r$ die Ordnung der Fläche.

43. Wenn die cubische Fläche F^3 durch i associirte Punkte geht, so hat die Fläche F_2^{8-r} einen i -fachen Punkt, und dieser ist ein $\frac{i(i-1)}{2}$ -facher Punkt ihrer Doppelcurve. Enthält eine der 6 Geraden k von F^2 zwei Knotenpunkte P , so entspricht ihr auf F_2^{8-r} ein dreifacher Punkt, durch welchen die Kegelschnittschaar der Fläche geht; enthält sie associirte Punkte, so entspricht ihr eine Doppelgerade auf F_2^{8-r} . Einem von A und B verschiedenen Doppelpunkte von F^3 entspricht auf F_2^{8-r} ein Doppelpunkt, der i. A. nicht auf der Doppelcurve liegt. Ist F^3 eine cubische Regelfläche und AB ihre Doppelgerade,

*) Diese Annalen Bd. 1, S. 264 und Bd. 3, S. 71–75; Abhandlungen der Gött. Soc. 1870, Bd. 15.

**) Diese Annalen Bd. 4, S. 263.

***) Noether ebenda Bd. 3, S. 199–203 und 568; Cremona ebenda Bd. 4, S. 115 und 118; R. Sturm ebenda Bd. 4, S. 275–278.

†) Collectanea matem., 1881, S. 169.

††) Rendic. di Palermo IV, p. 73–88. Diese und die vorhergehende Litteraturangabe verdanke ich Herrn Noether.

so entspricht ihrer Geradenschaar die Schaar von Kegelschnitten auf F_2^{8-r} , der Geraden AB aber entspricht ein dreifacher Punkt dieser Fläche, in welchem alle Kegelschnitte der Schaar sich treffen.

44. In einem beachtenswerthen Specialfalle hat die Fläche F_2^{8-r} eine $(6-r)$ -fache Gerade d_1 und eine Schaar von Kegelschnitten, deren Ebenen durch d_1 gehen. Sie entspricht einer cubischen Fläche F^3 , die eine (durch A, B und die r Punkte P gehende) biquadratische Raumcurve d des F^2 -Gebüsches enthält. Den Punkten der Geraden d_1 entsprechen je $6-r$ associirte Punkte der Raumcurve d , und den Ebenen von d_1 entsprechen Flächen zweiter Ordnung, die mit F^3 je einen durch A und B gehenden Kegelschnitt gemein haben. Die Gerade d_1 trifft die $8+2r$ einfachen Geraden und die 2^{3+r} einzelnen Kegelschnitte der Fläche F_2^{8-r} je einmal, die Kegelschnitte der Schaar aber je zweimal. Die Doppelcurve der Fläche zerfällt in die $(6-r)$ -fache Gerade d_1 und $4-r$ Doppelgerade*), welche d_1 schneiden, und denen je ein sich selbst associirter Kegelschnitt auf F^3 entspricht.

45. Eine specielle Fläche fünfter Ordnung F_2^5 ergibt sich, wenn für $r=3$ die drei Knotenpunkte P auf einem Kegelschnitt h von F^3 liegen, dessen Ebene durch die mit AB incidente Gerade s geht (vgl. 32.). Dem Kegelschnitt h entspricht nämlich auf F_2^5 eine zu ihm projective Gerade h_1 ; diese aber trifft die Kegelschnitte der Schaar auf F_2^5 in je einem Punktepaare einer Involution, weil h die Ebenen der Geraden AB und die entsprechenden Kegelschnitte auf F^3 in Punktepaaren einer Involution schneidet. Auf dieser speciellen Fläche F_2^5 liegen also die Kegelschnitte der Schaar in den Ebenen der ausgezeichneten Geraden h_1 , und zwar paarweise; ihre Ebenen berühren die Fläche in je vier Punkten von h_1 . Die Gerade h_1 schneidet die übrigen 14 Geraden g_1 der Fläche, denn in diese $14g_1$ zerfallen je 7 Kegelschnitte der Schaar.

46. Das F^2 -Gebüsch besteht, wenn $r=4$ ist, aus den durch A, B und die 4 Punkte P gehenden Flächen zweiter Ordnung; es enthält also auch die Flächen 2. O., welche die $4P$ mit einem durch A und B gehenden Kegelschnitt der cubischen Fläche F^3 verbinden. Diese Flächen aber haben mit F^3 eine biquadratische Raumcurve des Gebüsches gemein (34.); der Raumcurve aber entspricht auf der biquadratischen Fläche F_2^4 eine Doppelgerade d_1 , durch welche alle Ebenen der Kegelschnittschaar gehen (44.).

Die Fläche vierter Ordnung F_2^4 hat auf ihrer Doppelgeraden d_1 zwei dreifache Punkte K_1 , in denen alle Kegelschnitte ihrer Schaar sich treffen, falls zwei der sechs Geraden k von F^3 durch je zwei der 4 Punkte P gehen (43.). Diese specielle F_2^4 enthält nur 14 einfache

*) Diese Bemerkung verdanke ich Herrn Noether.

Gerade; denn sie wird längs der Geraden d_1 von zwei Ebenen berührt (vgl. 32.), und zwei Kegelschnitte ihrer Schaar bestehen aus d_1 und je einer mit d_1 incidenten Geraden. Sechs andere Kegelschnitte zerfallen in die 12 übrigen Geraden g_1 von F_2^4 , die zu sechsen durch die beiden dreifachen Punkte K_1 gehen. Von den acht Hauptpunkten P' der Bildebene η' liegen in diesem Specialfalle sieben auf zwei Geraden k' , den Projectionen der beiden Geraden k , die je $2P$ enthalten (vgl. 41.), und diese $2k'$ entsprechen den dreifachen Punkten K_1 . Durch jeden der beiden Punkte K_1 gehen 15 Kegelschnitte von F_2^4 , die nicht der Schaar angehören; ihre Ebenen verbinden je zwei der sechs Geraden g_1 des Punktes. Ausser diesen 30 enthält die Fläche noch 40 einzelne Kegelschnitte, die paarweise in 20 dreifach berührenden Ebenen liegen, sowie 20 paarweise conjugirte Schaaren cubischer Raumcurven durch beide Punkte K_1 , wie aus der Abbildung auf η' leicht sich ergibt. Die Ebenen der 12 Geraden g_1 schneiden die Fläche F_2^4 in 12 Schaaren von Curven dritter Ordnung, die je einen der Punkte K_1 zum Doppelpunkte haben.

§ 5.

Rationale Flächen fünfter und höherer Ordnung mit je einer Kegelschnittschaar und ebenen Schnittecurven vom Geschlecht 3, 4, ..., n .

47. Bevor wir noch andere Reihen rationaler Flächen ableiten, besprechen wir kurz die quadratischen Transformationen, welche eine gerade Basis- oder Knotenlinie b haben*). Durch diese Gerade b gehen alle Flächen des F^2 -Gebüsches in Σ , jeder Punkt von b ist ein Knotenpunkt der Transformation, und die mit b incidenten Geraden s sind Hauptstrahlen von Σ und zu den entsprechenden Geraden s_1 von Σ_1 projectiv (9.). Den Ebenen von Σ entsprechen (10.) i. A. cubische Regelflächen in Σ_1 . Die biquadratischen Raumcurven des Gebüsches zerfallen in die Knotenlinie b und je eine cubische Raumcurve, die b zur Sehne hat; diese Raumcurve kann ihrerseits zerfallen in eine Gerade s und einen mit s associirten Kegelschnitt, welche b treffen. Einem beliebigen Punkte von Σ sind ausser den Punkten von b nur drei andere Punkte associirt; das Gebüsch enthält alle Flächen zweiter Ordnung, welche die vier associirten Punkte mit b verbinden, unter ihnen aber vier Ebenenpaare.

48. Jeder Ebene φ durch b ist demnach eine Ebene φ' associirt, die mit φ eine Fläche des Gebüsches bildet. Dem Ebenenpaare $\varphi\varphi'$ entspricht im Raume Σ_1 eine Ebene φ_1 , die zu φ collinear ist; denn den Geraden s in φ , die durch irgend einen Punkt Q gehen, entsprechen in φ_1 die Geraden s_1 des homologen Punktes Q_1 (47.). Ein beliebiger zu b

*) Vgl. R. Krause, über ein specielles Gebüsch von Flächen 2. O., Inaug.-Diss., Strassburg 1879; Beyer, Geom. d. Lage, 3. Aufl., III, S. 168.

windschiefer Hauptstrahl von Σ schneidet die Flächen F^2 und Ebenenpaare $\varphi\varphi'$ des Gebüsches in Punktepaaren einer Involution (7.). Folglich beschreibt die Ebene φ' , wenn φ um b sich dreht, einen cubischen Ebenenbüschel, der zu dem Büschel b projectiv ist, und dessen Axen die zu b windschiefen Hauptstrahlen sind. Zugleich beschreibt die Schnittlinie der associirten Ebenen φ, φ' die Kernfläche K^4 des Gebüsches, die entsprechende Ebene φ_1 aber beschreibt einen rationalen biquadratischen Ebenenbüschel. Die zu b windschiefen Geraden l von Σ schneiden den Büschel b in projectiven Punktreihen; die ihnen entsprechenden Kegelschnitte l_1 von Σ_1 werden folglich durch den biquadratischen Büschel der Ebenen φ_1 projectiv auf einander bezogen. Dieser Büschel wird erzeugt durch drei projective Kegelschnitte l_1 , die zu zweien zwei Punkte entsprechend gemein haben.

49. Hat das F^2 -Gebüsch ausser den Punkten von b noch einen Knotenpunkt P , so ist die Ebene bP allen Ebenen einer Geraden q von Σ associirt, und ihren durch P gehenden Geraden entspricht in Σ_1 je ein Punkt einer Geraden q_1 (vgl. 11.). Der cubische Büschel der Ebenen φ' zerfällt dann in den Büschel q erster und einen Büschel zweiter Ordnung mit dem Mittelpunkt P ; der biquadratische Büschel der Ebenen φ_1 aber besteht aus dem Büschel q_1 erster und einem Büschel dritter Ordnung. Die Geraden des Punktes P in Σ werden durch den Ebenenbüschel b , die ihnen entsprechenden Geraden von Σ_1 werden durch den cubischen Büschel der Ebenen φ_1 projectiv auf einander bezogen.

Kommt zu P noch ein Knotenpunkt Q , so ist einer beliebigen Ebene φ der Knotenlinie b eine Ebene φ' der Geraden PQ associirt. Die entsprechende Ebene φ_1 von Σ_1 aber geht durch den Punkt, welcher der Geraden PQ entspricht (11.); sie beschreibt, wenn φ um b sich dreht, einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung.

Hat das F^2 -Gebüsch ausser den Punkten von b noch drei Knotenpunkte P, Q, R , so ist deren Ebene φ' allen Ebenen φ der Knotenlinie b associirt. Den Kegelschnitten in φ' durch P, Q und R , welche b treffen, entspricht in Σ_1 je ein Punkt einer Geraden b_1 , den Ebenen φ der Knotenlinie b aber entsprechen in Σ_1 die Ebenen φ_1 dieser Geraden b_1 in projectiver Weise. Die quadratische Transformation ist in diesem Falle eindeutig umkehrbar, weil einem beliebigen Punkte von Σ oder Σ_1 nur ein Punkt in Σ_1 resp. Σ entspricht. Sie wird dargestellt durch:

$$\varphi y_1 = x_1 x_4, \quad \varphi y_2 = x_2 x_4, \quad \varphi y_3 = x_1(x_3 - x_2), \quad \varphi y_4 = x_2(x_3 - x_1),$$

und zwar sind

$$(x_1 = x_3 = x_4 = 0), \quad (x_2 = x_3 = x_4 = 0) \text{ und } (x_1 = x_2 = x_3, x_4 = 0)$$

die drei Knotenpunkte und $(x_1 = x_2 = 0)$, $(y_1 = y_2 = 0)$ die Geraden b , b_1 . Die Umkehrung dieser Substitution ist vom dritten Grade, nämlich:

$$\tau x_1 = y_1(y_2 y_3 - y_4 y_1), \quad \tau x_2 = y_2(y_2 y_3 - y_4 y_1), \quad \tau y_3 = y_1 y_2 (y_3 - y_4), \\ \tau y_4 = y_1 y_2 (y_1 - y_2).$$

Diese Formeln hat schon Cayley angegeben*).

50. Die quadratischen Transformationen mit gerader Knotenlinie b nun wenden wir an auf die biquadratische Fläche F_2^4 , indem wir b mit deren Doppelgeraden zusammenfallen lassen und noch $r=0, 1, 2, 3$ Knotenpunkte P auf F_2^4 annehmen. Die Fläche F_2^4 wird durch sie in eine rationale Fläche F_3^{8-r} verwandelt so, dass jedem Kegelschnitt ihrer Schaar ein zu ihm collinearer Kegelschnitt auf F_3^{8-r} entspricht (48.). Die Ebenen der Kegelschnitte auf F_3^{8-r} bilden einen rationalen Ebenenbüschel $(4-r)^{\text{ter}}$ Ordnung (48., 49.). Die Fläche F_3^{8-r} ist von der $(8-r)^{\text{ten}}$ Ordnung; sie hat nämlich $8-r$ Punkte mit einer Geraden von Σ_1 gemein, weil F_2^4 mit der entsprechenden cubischen Raumcurve von Σ (vgl. 47.) ausser zwei Doppelpunkten auf b und den r Punkten P nur $12 - 4 - r = 8 - r$ Punkte gemein hat.

51. Die ebenen Schnittlinien der Flächen F_3^{8-r} sind i. A. vom Geschlecht drei. Ihnen entsprechen nämlich die Schnittlinien von F_2^4 mit den Flächen des F^2 -Gebüsches, also Raumcurven sechster Ordnung, abgesehen von der Doppelgeraden b ; diese Raumcurven aber haben je eine Schaar von viermal sie treffenden Geraden, werden also aus ihren Punkten durch Kegel fünfter Ordnung vom Geschlechte drei projicirt, die je eine dreifache Gerade haben. Die Doppelcurve von F_3^{8-r} ist von der Ordnung $18 - \frac{1}{2}r(13-r)$. Sie reducirt sich im Falle $r=3$ auf eine dreifache Gerade b_1 , durch welche die Ebenen der Kegelschnittschaar von F_3^5 gehen (49.). Zugleich mit F_2^4 wird die Fläche F_3^{8-r} auf der Ebene η' abgebildet (vgl. 41.); ihren ebenen Schnitten entsprechen in η' Curven fünfter Ordnung, die einen dreifachen Punkt B' und $8+r$ einfache Punkte P' gemein haben.**)

52. Die Fläche F_3^{8-r} enthält $16 + 2r$ einfache Gerade, in welche $8+r$ Kegelschnitte der Schaar zerfallen. Von diesen Geraden entsprechen 16 den einfachen Geraden von F_2^4 , und die $2r$ übrigen den r Punkten P und den r Kegelschnitten von F_2^4 durch je einen Punkt P . Vereinzelte Kegelschnitte giebt es i. A. nicht auf F_3^{8-r} , wohl aber 2^{7+r} cubische Raumcurven, die jeden Kegelschnitt der Schaar

*) Proceedings of the London Math. Society, vol 3, p. 171. Vgl. Cremona in den Annali di Matem., Serie II, t. 5, p. 148.

**) Eine der Flächen F_3^{8-r} , nämlich F_3^5 mit einer Doppelcurve 7. O., erwähnt Caporali mit dieser ihrer Abbildung in Collectanea mat. p. 170.

und $8 + r$ einfache Gerade der Fläche treffen und durch die Schaar projectiv auf einander bezogen werden. Von diesen cubischen Raumcurven werden $2^7 = 128$ auf F_2^4 dargestellt durch die 128 einzelnen Kegelschnitte (42.), welche b treffen; andere $128r$ durch cubische Raumcurven, die je einen der r Punkte P enthalten und b zweimal treffen (vgl. 40.); noch $128 \frac{r(r-1)}{2}$ andere durch biquadratische Raumcurven, die je $2P$ enthalten und b dreimal treffen; endlich, wenn $r = 3$ ist, die übrigen 128 durch Raumcurven fünfter Ordnung, die alle $3P$ enthalten und b viermal treffen. Auf F_3^{8-r} liegen 2^{7+r} Schaaren rationaler biquadratischer Raumcurven und 2^{7+r} Netze von rationalen Raumcurven fünfter Ordnung, wie gleichfalls aus der Abbildung auf F_2^4 sich ergibt, und auch diese Raumcurven werden durch die Kegelschnittschaar projectiv auf einander bezogen.

53. Die Fläche fünfter Ordnung F_3^5 insbesondere enthält eine dreifache Gerade b_1 , eine K.-Schaar, deren Ebenen durch b_1 gehen, und 22 mit b_1 incidente einfache Gerade, die paarweise elf Kegelschnitte der Schaar bilden. Auf ihr liegen $2^{10} = 1024$ cubische Raumcurven, welche jeden Kegelschnitt der Schaar und je 11 der 22 Geraden einmal, die Gerade b_1 aber zweimal treffen; ferner 2^{10} Schaaren biquadratischer Raumcurven und 2^{10} Netze von Raumcurven fünfter Ordnung, die jeden Kegelschnitt der Schaar und je 11 der 22 Geraden einmal und die Gerade b_1 drei- resp. viermal treffen. Die Fläche F_3^5 ist i. A. von der 36^{sten} Classe, und ebenso F_3^{8-r} (vgl. 35.).

54. Die Flächen F_2^4 und F_3^5 sind besondere Fälle der rationalen Fläche $(n+2)^{\text{ter}}$ Ordnung F_n^{n+2} mit einer n -fachen Geraden b und einer Kegelschnittschaar, deren Ebenen durch b gehen, und welche $3n+2$ paar einfache Gerade enthält. Auf diese Fläche wenden wir jetzt eine quadratische Transformation an, welche b zur Knotenlinie und $r = 0, 1, 2, 3$ Punkte P der Fläche zu Knotenpunkten hat. Dann verwandelt sich F_n^{n+2} in eine rationale Fläche F_{n+1}^{n+6-r} , die mit einer beliebigen Geraden $n+6-r$ Punkte gemein hat. Denn der Geraden entspricht (47.) eine cubische Raumcurve, die mit F_n^{n+2} ausser den r Punkten P und zwei n -fachen Punkten auf b nur

$$3(n+2) - r - 2n = n + 6 - r$$

Punkte gemein hat. Die ebenen Schnitte von F_{n+1}^{n+6-r} sind i. A. vom Geschlecht $n+1$. Ihnen entsprechen nämlich die Schnittlinien von F_n^{n+2} mit den Flächen des F^2 -Gebüsches, also Raumcurven $(n+4)^{\text{ter}}$ Ordnung, da von der n -fachen Geraden b abzusehen ist; jede dieser Raumcurven aber hat eine Schaar von $(n+2)$ -mal sie schneidenden Geraden, wird also aus ihren Punkten durch Kegel $(n+3)^{\text{ter}}$ Ordnung projectirt, die je eine $(n+1)$ -fache Gerade enthalten, und ist wie diese

Kegel vom Geschlecht $n + 1$. Die Fläche F_{n+1}^{n+6-r} enthält eine Kegelschnittschaar mit $3n + 2 + r$ paar Geraden (vgl. 52.); die Ebenen der Schaar bilden einen rationalen Büschel $(4 - r)^{\text{ter}}$ Ordnung (48., 49.). Die Fläche F_{n+1}^{n+3} insbesondere hat eine $(n + 1)$ -fache Gerade b_1 , eine K.-Schaar, deren Ebenen durch b_1 gehen, und in der Schaar $3(n + 1) + 2$ paar Gerade.

Jede der Flächen $F_1^3, F_2^4, F_3^5, \dots, F_n^{n+2}, F_{n+1}^{n+3}, \dots$ lässt sich also durch quadratische Transformation aus der vorhergehenden ableiten, und sie alle sind rational*). Ausser ihnen aber erhalten wir für $r = 0, 1, 2$ die rationalen Flächen F_n^{n+5-r} , die keine n -fache Gerade, sondern eine Doppelcurve von der Ordnung $\frac{1}{2}(n + 4 - r)(n + 3 - r) - n$ haben.

55. Noch andere rationale Flächen mit je einer Kegelschnittschaar ergeben sich durch quadratische Transformation von Flächen n^{ter} Ordnung mit zwei $(n - 1)$ -fachen Punkten. Von der hierher gehörigen speciellen Fläche F_2^4 vierter Ordnung (46.) wählen wir die beiden dreifachen Punkte K_1 , die wir jetzt mit A und B bezeichnen, und $s = 0, 1, 2, 3, 4$ einfache Punkte P zu Knotenpunkten der Transformation. Dann geht F_2^4 über in eine rationale Fläche F_3^{10-s} von der Ordnung $16 - 2 \cdot 3 - s = 10 - s$ (vgl. 50.), die eine K.-Schaar und darin $6 + s$ paar Gerade enthält. Jedem Kegelschnitte der Schaar entspricht auf F_2^4 ein durch A und B gehender Kegelschnitt, den $6 + s$ paar Geraden aber entsprechen auf F_2^4 die 6 paar Geraden durch A und B (46.) und die s Punkte P nebst den Kegelschnitten, die sie mit A und B verbinden. Die ebenen Schnitte von F_3^{10-s} sind i. A. vom Geschlecht drei; denn ihnen entsprechen die Schnittcurven 8^{ter} Ordnung von F_2^4 mit den Flächen des F_2^4 -Gebüsches, diese Curven aber gehen je dreimal durch A und B , und werden aus A durch Kegel fünfter Ordnung projicirt, welche AB zur dreifachen Geraden haben, also vom Geschlecht drei sind. Die Fläche F_3^{10-s} hat demnach (vgl. 35.) eine Doppellinie von der Ordnung:

$$\frac{1}{2}(9-s)(8-s) - 3 = 33 - \frac{1}{2}(17-s)s.$$

56. Der Doppelgeraden AB von F_2^4 entspricht ein ausgezeichnete Doppelpunkt C_1 der Fläche F_3^{10-s} ; den cubischen Tangentialkegeln ihrer dreifachen Punkte A, B entsprechen auf F_3^{10-s} zwei ebene Curven dritter Ordnung mit dem Doppelpunkt C_1 (vgl. 9.). Die Fläche F_3^{10-s} enthält ausser diesen zwei ebenen noch $32 \cdot 2^s - 2 = 2^{5+s} - 2$ Raum-

*) Dass die Fläche n^{ter} Ordnung mit einer $n - 2$ -fachen Geraden eindeutig auf der Ebene abgebildet werden kann, hat schon Herr Noether (in diesen Annalen Bd. 3, S. 175) bewiesen.

curven dritter Ordnung. Und zwar entsprechen 30 dieser Raumcurven den 30 einzelnen Kegelschnitten auf F_2^4 durch A und B (46.), andere 32s den 20s cubischen Raumcurven durch A, B und je einen Punkt P und den 12s ebenen Curven dritter Ordnung durch A oder B und je einen P (46.); noch anderen $32 \cdot \frac{1}{2}s(s-1)$ entsprechen auf F_2^4 bi-quadratische Raumcurven durch A, B und je $2P$, die A oder B zum Doppelpunkte haben; u. s. w. Alle diese 2^{5+s} rationalen cubischen Curven auf F_3^{10-s} werden durch die K.-Schaar der Fläche projectiv so auf einander bezogen, dass sie ihre Schnittpunkte entsprechend gemein haben (vgl. 37.). Jede von ihnen trifft alle Kegelschnitte und die Hälfte der $12 + 2s$ Geraden der Fläche. Die Ebenen der K.-Schaar aber bilden einen Büschel $(6-s)^{\text{ter}}$ Ordnung; denn sie werden erzeugt durch drei der projectiven cubischen Curven, die zu zweien $3 + s$ Punkte gemein haben (vgl. 39.).

57. Wir erhalten demnach, wenn	$s = 0$	1	2	3	4 ,
die rationalen Flächen $(10-s)^{\text{ter}}$ Ordnung:	F_3^{10}	F_3^9	F_3^8	F_3^7	F_3^6
mit Doppelcurven von der resp. Ordnung:	33	25	18	12	7;
Anzahl ihrer einfachen Geraden:	12	14	16	18	20;
Anzahl ihrer rationalen cubischen Curven:	32	64	128	256	512;
Ordnung des Ebenenbüschels ihrer K.-Schaar:	6	5	4	3	2.

Die Zahlen der letzten drei Spalten gelten zugleich für die früher (50.) abgeleiteten Flächen F_3^{8-r} in den Fällen $r = 0, 1, 2$. Diese drei Flächen F_3^{8-r} sind etwas allgemeiner als die Flächen F_3^{10-s} für $s = 2, 3, 4$; denn unter ihren 2^{7+r} rationalen cubischen Curven kommen i. A. keine ebenen vor, wie bei F_3^{10-s} . Für $r = 3$ kommt hinzu die Fläche fünfter Ordnung F_3^5 mit einer dreifachen und 22 einfachen Geraden (53.).

Projiciren wir die Fläche F_2^4 aus ihrem dreifachen Punkte A auf eine Ebene η' , so wird zugleich mit ihr die Fläche F_3^{10-s} auf η' abgebildet. Den ebenen Schnitten von F_3^{10-s} entsprechen in η' Curven fünfter Ordnung, die einen dreifachen Punkt B' und $6 + s$ einfache Punkte P' gemein haben (55.); und zwar sind B' und s der Punkte P' die Projectionen von B und den s Knotenpunkten P , und die übrigen $6P'$ sind die Spuren der 6 einfachen Geraden von F_2^4 , die durch A gehen (46.).

58. Wie aus der speciellen F_2^4 die Fläche F_3^{10-s} , so kann aus einer Fläche n^{ter} Ordnung F_{n-2}^n mit zwei $(n-1)$ -fachen Punkten A, B eine rationale Fläche $(2n + 2 - s)^{\text{ter}}$ Ordnung abgeleitet werden ($s = 0, 1, 2, 3, 4$), die eine Kegelschnittschaar und darin $2(n-1) + s$ paar Gerade enthält, und deren ebene Schnitte i. A. vom Geschlecht $n-1$ sind. Diese Fläche lässt sich durch Projection von F_{n-2}^n aus dem Punkte A so auf der Ebene η' abbilden, dass ihre ebenen Schnitte

dargestellt werden durch Curven $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die einen $(n-1)$ -fachen Punkt B' und $2(n-1) + s$ einfache Punkte P' gemein haben. Die Fläche hat einen $n-2$ -fachen Punkt C_1 , welcher der Geraden AB entspricht, und enthält 2^{2n-3+s} rationale Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, darunter zwei ebene Curven, die C_1 zum $(n-2)$ -fachen Punkte haben. Durch die K.-Schaar der Fläche werden diese rationalen Curven projectiv auf einander bezogen. Die Ebenen der Schaar bilden einen Büschel $(n+2-s)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Mit dem F^2 -Gebüsch sind auch alle von uns abgeleiteten rationalen Flächen der synthetischen Geometrie zugänglich, da die projective Beziehung des Gebüsches auf den Ebenenraum und damit die quadratische Transformation rein geometrisch hergestellt werden kann.

Strassburg, den 4. Mai 1896.