Ueber endlichgleiche Polyeder.

Von

K. Th. VAHLEN in Königsberg.

Die von Herrn Hilbert*) in Erinnerung gebrachte Gauss'sche Frage nach der Zurückführbarkeit der Theorie des Polyeder-Inhalts auf die Theorie der Congruenz, ist jüngst von Herrn Dehn**) in negativem Sinne beantwortet worden. Die hierfür entscheidende Relation hatte ich zur Zeit des Erscheinens der ersten Arbeit des Herrn Dehn bereits mit den elementarsten Mitteln folgendermassen hergeleitet.

Es seien Π und Π' zwei „zerlegungsgleiche“ Polyeder, die also in Aggregate $\Pi = \sum_i P_i$, $\Pi' = \sum_i P'_i$ einer endlichen Anzahl congruenter Polyeder $P_i \cong P'_i$ zerfallen. Auf der Oberfläche jedes Theilpolyeders P_i bilden die auf ihr liegenden Kanten der im Aggregat Π sowohl, wie in Π' an P_i anstossenden Polyeder ein Netz: man zerlege jedes P_i derartig in Theilpolyeder $P_i = \sum p_i$, dass die an der Oberfläche des P_i liegenden Kanten der p_i jenes selbe Netz bilden, und betrachte die Zerlegungen $\Pi = \sum \sum p_i$, $\Pi' = \sum \sum p'_i$, $p_i \cong p'_i$. Die Summe aller Flächenwinkel der p_i ist gleich der Summe aller Flächenwinkel der p'_i . In dieser Identität lassen wir zunächst beiderseits diejenigen Flächenwinkel fort, deren Scheitелkante im Innern eines Polyeders P_i liegt. Von den übrigen ergänzen sich diejenigen Flächenwinkel, die an einer Scheitелkante im Innern von Π oder Π' liegen, zu 2π ; diejenigen an einer Scheitелkante auf der Oberfläche von Π oder Π' , die aber nicht in einer Kante von Π oder Π' liegt, zu π ; endlich diejenigen, deren Scheitелkante in der Kante des Flächenwinkels α (resp. α') von Π (resp. Π') liegt, zu α (resp. α'). Liegen also μ (resp. μ') Kanten der Theilpolyeder $p(p')$ auf dieser Kante, so reducirt sich obige Identität auf die Congruenz

$$\sum_{\alpha} \mu \alpha \equiv \sum_{\alpha'} \mu' \alpha' \pmod{\pi},$$

die Summen resp. bezogen auf alle Flächenwinkel α von Π , und α' von Π' .

Diese Herleitung bezieht sich auf beliebige, auch nicht-convexe Polyeder Π, Π', P_i . Doch kann man auch zunächst jedes nicht-convexe P_i durch Verlängerung seiner Flächen in convexe zerlegen. Die Zerlegung

*) Mathematische Probleme, Göttinger Nachr. 1901.

**) Göttinger Nachr. 1901 und Math. Ann. Bd. 55, S. 465.

eines convexen P_i in Σp_i erfolgt dann am einfachsten, indem man einen beliebigen innern Punkt des P_i mit allen Punkten des bezeichneten Netzes durch Grade verbindet.

Aber in der obigen allgemeineren Fassung ist die Herleitung unmittelbar auf den allgemeinsten Fall der Endlichgleichheit übertragbar.

Unter einem „allgemeinen“ Polyeder ist ein Aggregat von Polyedern zu verstehen, bei deren jedem auch mehrfache Raumbedeckungen, positive wie negative, vorkommen. Ein allgemeines Polyeder Π besteht demnach aus „gewöhnlichen“ d. h. einen Raumtheil nur einfach und positiv bedeckenden Polyedern ϖ , deren jedes in bestimmter Vielfachheit, positiv oder negativ, auftritt.

Zwei allgemeine Polyeder Π und Π' heissen „endlichgleich“, wenn für zwei ungleiche ganze Zahlen κ und κ' zwei Aggregate $\kappa\Pi + \kappa'\Pi'$ und $\kappa'\Pi + \kappa\Pi'$ existiren, welche sich in Aggregate $\Sigma k_i P_i$, $\Sigma k'_i P'_i$ congruenter gewöhnlicher Theilpolyeder $P_i \cong P'_i$ zerlegen lassen, deren jedes in bestimmter Vielfachheit k_i , positiv oder negativ, zu zählen ist. Das Netz auf der Oberfläche jedes P_i aus den auf ihr liegenden Kanten der andern Theilpolyeder P ist trotz des eventuellen gegenseitigen Durchdringens derselben unzweideutig bestimmt. Die Zerlegung jedes P_i in Σp_i wird wie oben vollzogen. In den Aggregaten $\kappa\Pi + \kappa'\Pi' = \Sigma k_i p_i$, $\kappa'\Pi + \kappa\Pi' = \Sigma k'_i p'_i$ kommt jedes Theilpolyeder p_i in derselben Vielfachheit, wie sein Stammpolyeder P_i vor. Behandelt man wie oben die Summe aller Flächenwinkel p_i , deren jeder resp. k_i -fach zu zählen ist, so erhält man die Relation $\Sigma m\alpha + \Sigma m'\alpha' \equiv \Sigma n\alpha + \Sigma n'\alpha' \pmod{\pi}$, also $\Sigma_\alpha \mu\alpha \equiv \Sigma_\alpha \mu'\alpha' \pmod{\pi}$, wo z. B. m das Aggregat der Anzahlen von Kanten der p_i ist, in welche die in mehreren Theilpolyedern ϖ von $\kappa\Pi + \kappa'\Pi'$ vorkommende Scheitellkante von α zerfällt.

Die einfachsten Beispiele für das Nichterfülltsein der Relation liefern die regulären Körper. Da nämlich die Gleichungen

$$x^n - nx^{n-2} - \frac{n(n-3)}{2}x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{6}x^{n-6} - \dots - 2 = 0 \quad (n=3,4,5,\dots)$$

keine andern rationalen Wurzeln $x = 2 \cos \frac{k\pi}{n}$ als ganzzahlige, also nur ± 1 , ± 2 , haben können, so sind die Winkel der regulären Körper: $\arccos \pm \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{9}$, $\frac{1}{2} \arccos \frac{-3}{5}$ keine rationalen Theile von π , also kein regulärer Körper ausser dem Würfel einem rechtwinkligen Parallelepiped endlichgleich. Ähnliches gilt für die Aggregate mehrerer regulärer Körper.

Königsberg i. Pr., 4. Febr. 1902.