Über die Lösungen der Differentialgleichungen der Physik.

I. Mitteilung.

Von

R. Courant in Göttingen.

Einleitung.

Die Differentialgleichungen der Physik entspringen aus Variationsproblemen, und nichts erscheint hiernach natürlicher als der Versuch, die Existenz und die Eigenschaften ihrer Lösungen von dem Ansatz des Variationsproblems her zu untersuchen: Gauß, Riemann, Dirichlet, W. Thomson, H. Weber u. a. haben diesen Weg eingeschlagen. Aber nach der scheinbar vernichtenden Kritik, welche Weierstraß an der Schlußweise des Dirichletschen Prinzipes übte, hat man den Variationsansatz verlassen; wenn auch seitdem durch die Arbeiten von Hilbert und anderen daran anschließenden Autoren über die Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ des Potentials bei dieser Differentialgleichung die ursprüngliche Idee des Dirichletschen Prinzipes als Ausgangspunkt für den Existenzbeweis wieder zur Geltung gebracht wurde, und wenn auch Walther Ritz¹⁾ den Variationsansatz höchst erfolgreich zur numerischen Berechnung der Lösungen handhabte, so ist heute doch in der Hauptsache die Theorie der Integralgleichungen das Mittel der strengen Behandlung; insbesondere gilt dies für das zentrale Problem der *Eigenwerte* und *Eigenfunktionen*, oder physikalisch gesprochen, der *Eigenschwingungen*, welches z. B. in dem typischen Falle der gewöhnlichen Schwingungsgleichung lautet: Es sollen für ein gegebenes Gebiet G diejenigen „Eigenwerte“ λ und zugehörigen in G nicht identisch verschwindenden „Eigenfunktionen“ u gefunden werden, für welche in G die Differentialgleichung

$$(1) \quad \Delta u + \lambda u = 0$$

¹⁾ W. Ritz, Oeuvres Nr. XV, XVI, XVII, insbesondere Crelles Journal 185 (1908), S. 1–61, Ann. der Phys. 28 (1909), S. 737–786.

und am Rande beispielsweise die Randbedingung

$$(2) \quad u = 0$$

besteht. Dabei ist in der üblichen Bezeichnung Δu der Differentialausdruck

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \dots,$$

je nachdem das Gebiet G in einem zwei- oder mehrdimensionalen Raume mit den rechtwinkligen Koordinaten $x, y, \dots$ gelegen ist. Trotz der großen Erfolge, welche man mit der Integralgleichungsmethode bei der Behandlung der Existenzfragen dieses und der analogen Probleme gehabt hat, scheint es mir doch der Natur des Gegenstandes angemessen, wenn man konsequent zum Variationsansatz zurückkehrt; man darf in den Schwierigkeiten, die sich hier darzubieten scheinen, weniger einen Einwurf gegen die Gemäßheit des Ansatzes erblicken als vielmehr eine Aufforderung, die methodischen Hilfsmittel der Analysis so zu ergänzen, daß der Durchführung des so einfachen und überzeugenden klassischen Grundgedankens keine Hindernisse mehr im Wege stehen. In diesem Sinne habe ich in einer früheren Arbeit²⁾ die *Eigenwerte* bei den Eigenwertproblemen behandelt mit dem Ergebnis, daß in der Tat der Variationsansatz eine weit vollständigere und dabei einfachere und durchsichtigere Beherrschung der auftretenden Fragen gestattet als die Integralgleichungsmethode. In der vorliegenden Arbeit möchte ich mich der tiefer greifenden Aufgabe zuwenden, dasselbe auch für die *Eigenfunktionen* zu leisten. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, setzen wir uns hier folgendes Ziel: *Für einen ganz im Endlichen gelegenen endlich vielfach zusammenhängenden Bereich G der xy -Ebene ohne isolierte Grenzpunkte mit rektifizierbaren Randkurven³⁾ ist die Existenz eines vollständigen orthogonalen Systems $u_1, u_2, \dots$ von Eigenfunktionen und der zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ der Differentialgleichung (1) bei der Randbedingung (2) nachzuweisen.* Wir werden diesen Existenzbeweis so erbringen, daß damit auch zugleich das Verfahren zur numerischen Berechnung der Eigenfunktionen im Sinne von W. Ritz legitimiert und in einem wesentlichen Punkte ergänzt wird. Dabei sollen die Entwicklungen so gehalten sein, daß ihre direkte Übertragung auf andere sich selbst adjungierte Differentialgleichungen zweiter

²⁾ Courant, Math. Zeitschr. 7 (1920), S. 1–57. „Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der math. Physik“.

³⁾ Die Voraussetzung der Rektifizierbarkeit ist wesentlich weiter als die Voraussetzungen, unter denen bisher die Frage in der Literatur explizite ihre Erledigung gefunden hat; der Leser wird übrigens bemerken, daß selbst diese Voraussetzung außer in § 6 für alle Schlüsse in dieser Arbeit bedeutungslos bleibt.

und höherer Ordnung sowie auf den Fall von mehr als zwei unabhängigen Variablen keine Schwierigkeit mehr macht. In einer folgenden Abhandlung sollen die Eigenschaften der Lösungen, insbesondere ihre Abhängigkeit vom Gebiet, untersucht werden.

Das erste Kapitel beschäftigt sich, nach einigen Vorbemerkungen über lineare Abhängigkeit, mit der Formulierung und vorläufigen Diskussion des Variationsproblems und führt bis zu einem gewissen Abschluß. Im zweiten Kapitel werden eine Reihe methodischer Hilfsbetrachtungen entwickelt, welche zum Teil wegen ihrer sonstigen Anwendbarkeit auch ein selbständiges Interesse verdienen dürften. Im dritten Kapitel wird der Existenzbeweis zu Ende geführt, und im vierten die Frage der numerischen Berechnung untersucht.

Kapitel I.

Das Variationsproblem und seine Minimalfolgen.

§ 1.

Vorbemerkungen und Bezeichnungen.

Es sei Γ eine Randkurve unseres Bereiches G ; wenn wir in Γ ein geradliniges Polygon Γ_N von N gleichen Seiten der Länge h einbeschreiben, so wird das Produkt Nh unterhalb einer festen, d. h. von N unabhängigen Schranke bleiben, da es mit zunehmendem N gegen die Länge von Γ konvergiert. Wir denken uns um die Ecken von Γ_N mit dem Radius h die Kreise geschlagen; alle Punkte von G , welche in das Innere eines dieser Kreise fallen, bilden bei hinreichend kleinem h einen Randstreifen S_h , welcher bei abnehmendem h unendlich schmal wird und der andererseits bei fest gegebenem h alle diejenigen Punkte von G in sich enthält, welche von einem Randpunkt des Gebietes G einen Abstand kleiner als eine hinreichend kleine nur von h abhängige Zahl δ haben.

Wir führen, falls die betreffenden Integrale für die Funktionen φ, ψ einen Sinn haben, die folgenden Bezeichnungen ein:

$$(3) \quad H_G[\varphi, \psi] = \int_{(G)} \varphi \cdot \psi \, dx \, dy, \quad H_G[\varphi] = H_G[\varphi, \varphi].$$

$$(4) \quad D_G[\varphi, \psi] = \int_{(G)} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} dx \, dy, \quad D_G[\varphi] = D_G[\varphi, \varphi]$$

und kürzen analog ab, wenn andere Integrationsbereiche zugrunde liegen. Wo Mißverständnisse ausgeschlossen sind, schreiben wir gelegentlich statt

$$H_G, D_G \quad \text{einfach} \quad H, D.$$

Es gelten die Beziehungen

$$(5) \quad (H[\varphi, \psi])^2 \leq H[\varphi] \cdot H[\psi]$$

$$(6) \quad (D[\varphi, \psi])^2 \leq D[\varphi] D[\psi]$$

auf Grund der Schwarzschen Ungleichheit, sowie bei konstanten $c_1, c_2, \dots, c_p$ die Gleichungen

$$(7) \quad H\left[\sum_{i=1}^p c_i \varphi_i\right] = \sum_{i,j} c_i c_j H[\varphi_i, \varphi_j]$$

$$(8) \quad D\left[\sum_{i=1}^p c_i \varphi_i\right] = \sum_{i,j} c_i c_j D[\varphi_i, \varphi_j].$$

Aus (5), (6), (7), (8) folgt unmittelbar

$$(9) \quad H[\varphi - \varphi^*] \geq (|\sqrt{H[\varphi]}| - |\sqrt{H[\varphi^*]}|)^2$$

$$(10) \quad D[\varphi - \varphi^*] \geq (|\sqrt{D[\varphi]}| - |\sqrt{D[\varphi^*]}|)^2.$$

Aus der Kleinheit der Integrale $H[\varphi - \varphi^*]$ bzw. $D[\varphi - \varphi^*]$ kann man also unmittelbar auf die Kleinheit der Differenzen $H[\varphi] - H[\varphi^*]$ bzw. $D[\varphi] - D[\varphi^*]$ schließen, wenn man von vornherein die Beschränktheit der Integrale H bzw. D voraussetzt.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich: Ersetzt man in einem Ausdruck der Form (3) oder (4) eine Funktion φ oder beide Funktionen φ, ψ durch Funktionen φ^*, ψ^* , für welche $H[\varphi - \varphi^*]$, $H[\psi - \psi^*]$ bzw. $D[\varphi - \varphi^*]$, $D[\psi - \psi^*]$ hinreichend klein ist, so ändern sich diese Ausdrücke um beliebig wenig, falls H und D beschränkt sind.

§ 2.

Unabhängigkeitsmaß von Funktionen.

Es seien $f_1, f_2, \dots, f_n$ stetige Funktionen im Gebiete G , es seien ferner $c_1, c_2, \dots, c_n$ Konstanten, welche der Relation

$$(11) \quad c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 = 1$$

genügen. Der kleinste Wert m , welchen unter dieser Nebenbedingung der Ausdruck

$$(12) \quad H\left[\sum_{i=1}^n c_i f_i\right] = \sum_{i,j} c_i c_j H[f_i, f_j]$$

bei Variation der c_i annehmen kann, heißt das *Unabhängigkeitsmaß* der Funktionen f_i für G . Seine Existenz folgt unmittelbar aus der Definition als Minimum einer definiten quadratischen Form der c_i bei der Nebenbedingung (11). Offenbar ist die Bedingung $m = 0$ notwendig und hin-

reichend für die lineare Abhängigkeit der Funktionen und gleichbedeutend mit dem Verschwinden der sogenannten „Gramschen Determinante“:

$$\Delta_G \{f_1, \dots, f_n\} = \begin{vmatrix} g_{11}, \dots, g_{1n} \\ g_{21}, \dots, g_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ g_{n1}, \dots, g_{nn} \end{vmatrix},$$

wobei

$$g_{ij} = H[f_i, f_j]$$

ist. Zwischen der Determinante Δ und dem Unabhängigkeitsmaß m besteht folgende wichtige Ungleichheit

$$(13) \quad \Delta \geq m^n.$$

Zum Beweise bedenken wir, daß m gemäß seiner Definition die kleinste der — durchweg nicht negativen — Wurzeln der Gleichung

$$(14) \quad \begin{vmatrix} g_{11} - \lambda, & g_{12} & , \dots, & g_{1n} \\ g_{21} & , & g_{22} - \lambda, & \dots, & g_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ g_{n1} & , & g_{n2} & , \dots, & g_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

für λ ist. Da das Produkt der n Wurzeln dieser Gleichung aber gleich Δ ist, so ergibt sich unmittelbar die Behauptung⁴⁾.

Aus der Definition des Unabhängigkeitsmaßes folgt sofort der Satz: *Ist G ein Gebiet, welches das Gebiet G' als Teilgebiet enthält, so ist das Unabhängigkeitsmaß irgendwelcher Funktionen für G nicht kleiner als das Unabhängigkeitsmaß derselben Funktionen für G' .* In der Tat:

für jedes Wertsystem der c_i ist $H_G \left[\sum_{i=1}^n c_i f_i \right] \geq H_{G'} \left[\sum_{i=1}^n c_i f_i \right]$, also besteht dieselbe Relation auch für die Minima der beiden Seiten.

Für die Gramschen Determinanten gilt übrigens der entsprechende Satz: *Es ist unter den obigen Voraussetzungen über G und G'*

$$\Delta_G \{f_1, \dots, f_n\} \geq \Delta_{G'} \{f_1, \dots, f_n\}.$$

⁴⁾ Ebenso können wir aus der Kenntnis von m eine obere Schranke für Δ entnehmen; indem wir nämlich beachten, daß sämtliche Wurzeln der Gleichung (14) Werte der quadratischen Form (12) sind, ergibt sich

$$(15a) \quad \Delta \leq m \cdot M^{n-1},$$

wenn M eine leicht angebbare obere Schranke der Werte von (12) unter der Bedingung (11) bedeutet; wir erkennen also explizite, daß die Gleichungen $m = 0$ und $\Delta = 0$ einander bedingen.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar, wenn man aus den Maximum-Minimum-eigenschaften⁵⁾ der Wurzeln der Gleichung (14) und der Beziehung

$$H_G \left[\sum_{i=1}^n c_i f_i \right] \geq H_{G'} \left[\sum_{i=1}^n c_i f_i \right]$$

entnimmt, daß jede der Wurzeln von (14), also auch ihr Produkt sich bei Übergang von G zu G' nicht vergrößert.

§ 3.

Das Variationsproblem.

Es seien $v_1, v_2, \dots, v_l$ gegebene, in G einschließlich des Randes stetige, im Inneren analytische⁶⁾ Funktionen. Unter allen Funktionen φ , welche in G stetig und mit stückweise stetigen Ableitungen⁷⁾ bis zur zweiten Ordnung versehen sind, welche ferner den Bedingungen

$$(15) \quad H[\varphi] = 1$$

$$(16) \quad H[\varphi, v_i] = 0 \quad (i = 1, \dots, l),$$

sowie der Randbedingung

$$(17) \quad \varphi = 0$$

genügen, soll diejenige gesucht werden, für welche $D[\varphi]$ einen möglichst kleinen Wert erhält.

Wir wollen, was keinerlei Beschränkung der Aufgabe bedeutet, im folgenden voraussetzen, daß die Funktionen v_i den Orthogonalitätsrelationen

$$(18) \quad H[v_i] = 1, \quad H[v_i, v_j] = 0 \quad (i \neq j)$$

genügen.

Es wird das Hauptziel der vorliegenden Arbeit sein, die Existenz der Lösung dieses Variationsproblem, welches wir als *Problem I* bezeichnen wollen, nachzuweisen. Von vornherein wissen wir nur, daß unter

⁵⁾ Die h -te der nach wachsender Größe geordneten Wurzeln von (14) ist gleich dem größten Werte, welchen das Minimum von (12) annehmen kann, wenn für die v_i außer (11) noch $h-1$ lineare homogene Nebenbedingungen gestellt werden. Vgl. E. Fischer, Monatshefte für Math. und Phys. 16, S. 245; Courant, loc. cit. ²⁾, S. 19.

⁶⁾ Die Voraussetzung der Analytizität ist nicht wesentlich; sie wird nur aus Bequemlichkeitsgründen gemacht.

⁷⁾ Stückweise stetig soll eine Funktion in G heißen, wenn ihre Stetigkeit im Inneren von G nur an endlich vielen analytischen Linienstücken Unterbrechungen erleiden darf. Es würde übrigens an den Betrachtungen der Arbeit nichts ändern, wenn wir durchweg Stetigkeit der Ableitungen von den Funktionen φ verlangten, da man ohne Schwierigkeit Funktionen mit nur stückweise stetigen Ableitungen derart durch solche mit durchweg stetigen approximieren kann, daß dabei die Bedingungen des Variationsproblem unverletzt bleiben und auch der Charakter einer Funktionsfolge als Minimalfolge erhalten wird. Vgl. loc. cit. ²⁾, S. 52 ff.

den gestellten Bedingungen das Integral $D[\varphi]$ eine *untere Grenze* d besitzen muß; ist d diese Grenze, so gilt für jede konkurrenzfähige Funktion

$$(19) \quad D[\varphi] \geq d,$$

während es andererseits Folgen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ solcher Funktionen gibt, für welche

$$(20) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} D[\varphi_h] = d$$

ist. Eine solche Funktionsfolge heißt gemäß der üblichen Terminologie eine *Minimalfolge*; wie man sich zum Zwecke der numerischen Rechnung Minimalfolgen praktisch verschaffen kann, soll später im IV. Kapitel erörtert werden, während hier nur die von vornherein feststehende Existenz von Minimalfolgen in Betracht kommt.

Für die Funktionen einer Minimalfolge gilt folgende grundlegende Relation:

$$(21) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \{D[\varphi_n, \varphi_m] - dH[\varphi_n, \varphi_m]\} = 0.$$

Zum Beweise beachten wir, daß bei beliebigem m und n die Funktionen

$$\varphi = a\varphi_n + b\varphi_m,$$

unter a und b willkürliche Konstante verstanden, den sämtlichen Konkurrenzbedingungen des Variationsproblems außer (15) genügen, daß daher

$$D[\varphi] \geq dH[\varphi]$$

gilt. Dies aber bedeutet wegen der Beziehungen (7), (8), (15)

$$a^2 D[\varphi_n] + b^2 D[\varphi_m] + 2ab D[\varphi_n, \varphi_m] \geq d\{a^2 + b^2 + 2ab H[\varphi_n, \varphi_m]\}$$

oder

$$2ab\{D[\varphi_n, \varphi_m] - dH[\varphi_n, \varphi_m]\} \geq a^2(d - D[\varphi_n]) + b^2(d - D[\varphi_m]).$$

Wählen wir hier $a = b = 1$ bzw. $a = -b = 1$, so erkennen wir unmittelbar wegen (20) die Richtigkeit der in (21) ausgesprochenen Behauptung.

Für eine spätere Anwendung (in Kap. IV) merken wir eine Erweiterung des Begriffes der Minimalfolge an: Wir wollen nämlich eine Funktionsfolge $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ eine Minimalfolge (im erweiterten Sinne) nennen, wenn ~~bei den obigen Stetigkeitsvoraussetzungen~~ neben der Gleichung (20) und den Randbedingungen (17) für $\varphi = \varphi_n$ die Relationen

$$(15a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H[\varphi_n] = 1$$

$$(16a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H[\varphi_n, v_i] = 0$$

gelten. Auch für eine solche Funktionsfolge bleibt die Gleichung (21) richtig. Man kann nämlich ohne Schwierigkeit die Funktion φ_n durch eine konkurrenzfähige Funktion $\bar{\varphi}_n$ approximieren, so daß

$$\lim_{n=\infty} H[\varphi_n - \bar{\varphi}_n] = 0$$

und ferner für $\varphi = \bar{\varphi}_n$ (15), (16), (19) sowie

$$\lim_{n=\infty} D[\bar{\varphi}_n] = d$$

gilt^{*)}.

Aus der Relation (21) ergibt sich folgender Satz über Minimalfolgen: *Jede durch lineare Kombination einer festen Anzahl k von Funktionen der gegebenen Minimalfolge gebildete Funktionenfolge*

$$\varphi_n^* = c_{n_1} \varphi_{n_1} + c_{n_2} \varphi_{n_2} + \dots + c_{n_k} \varphi_{n_k},$$

für welche $H[\varphi_n^] = 1$ gilt, ist eine neue Minimalfolge, wenn die Koeffizienten c_{n_j} absolut beschränkt bleiben und die Indizes n_j mit n über alle Grenzen wachsen.*

In der Tat folgt aus (21) unmittelbar $\lim_{n=\infty} D[\varphi_n^*] = d$, während andererseits die Funktionen φ_n^* allen Konkurrenzbedingungen des Variationsproblems genügen.

§ 4.

Hilfssatz.

Zur weiteren Untersuchung der Minimalfolgen bedienen wir uns der Tatsache, daß uns für ein Quadrat Q der Seitenlänge l die Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ durch die Ausdrücke

$$\frac{1}{4l^2} \sin \frac{\pi x n}{l} \sin \frac{\pi y m}{l} \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

gegeben sind; die zugehörigen Eigenwerte sind die Zahlen

$$\frac{\pi^2}{l^2} (m^2 + n^2).$$

Der Größe nach geordnet wollen wir die Eigenwerte mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, die entsprechenden Eigenfunktionen mit $u_1, u_2, u_3, \dots$ bezeichnen.

Ist s eine auf dem Rande des Quadrates verschwindende Funktion, welche in dem Quadrate stetig ist, stückweise stetige Ableitungen besitzt und für welche das Dirichletsche Integral $D_Q[s]$ über das Quadrat existiert,

*) Die Möglichkeit einer solchen Approximation ergibt sich durch ganz analoge Betrachtungen wie die in Anm. *) zitierten. Vgl. auch die Betrachtungen in Kap. IV, S. 323, wo die Überlegung durchgeführt wird.

so drückt sich dieses Integral durch die Fourierschen Entwicklungskoeffizienten

$$s_h = \int_{(Q)} s \cdot u_h \, dx \, dy = H_Q[s, u_h]$$

der Funktion s folgendermaßen aus:

$$(22) \quad D_Q[s] = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h s_h^2.$$

Der Beweis dieser bekannten Tatsache folgt am einfachsten, indem man auf die partiellen Ableitungen s_x und s_y die Vollständigkeitsrelation in bezug auf das vollständige orthogonale Funktionensystem der u_h anwendet.

Wir stellen jetzt folgendes Variationsproblem auf: Es seien $o', o'', \dots, o^{(p)}$ p normierte⁹⁾ orthogonale Funktionen im Quadrat Q , welche sämtlich am Rande verschwinden, in Q stetig sind und stückweise stetige erste Ableitungen besitzen; unter allen solchen Funktionensystemen ist eines gesucht, für welches die Summe der Integrale

$$D[o'] + D[o''] + \dots + D[o^{(p)}] = D[o]$$

möglichst klein wird.

Es gilt nun der folgende Hilfssatz 1: *Das Minimum in dem eben gestellten Variationsprobleme wird angenommen, wenn für die Funktionen $o^{(i)}$ die ersten p Eigenfunktionen von Q oder ein aus ihnen durch eine beliebige orthogonale Substitution hervorgehendes Funktionensystem gewählt wird; der Wert des Minimums ist gleich der Summe der ersten p Eigenwerte, d. h. gleich $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p$.*

Wir bezeichnen die Fourierschen Entwicklungskoeffizienten der Funktionen $o^{(i)}$ mit o_{ij} , ($j = 1, 2, \dots$; $i = 1, 2, \dots, p$), merken die Relationen

$$(23) \quad \sum_{j=1}^{\infty} o_{ij}^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

an und bemerken ferner, daß der Wert der Größe $D[o]$ sich nicht ändert, wenn wir die Funktionen $o^{(i)}$ irgend einer orthogonalen Substitution unterwerfen; ist nämlich

$$o^{(i)} = \sum_{j=1}^p t_{ij} \omega^{(j)} \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

eine solche Substitution, welche die Funktionen $o^{(i)}$ in die orthogonalen Funktionen $\omega^{(i)}$ überführt, so wird wegen (8) und der Orthogonalitätsrelationen zwischen den Koeffizienten t_{ij} offenbar $D[o] = D[\omega]$.

⁹⁾ Normiert soll eine Funktion ψ heißen, wenn $H[\psi] = 1$ ist.

Nun können wir die Funktionen $o^{(i)}$ stets einer solchen orthogonalen Transformation unterworfen denken, daß in dem Koeffizientenschema

$$\begin{pmatrix} o_{11} & o_{12} & \dots & o_{1p} \\ o_{21} & o_{22} & \dots & o_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ o_{p1} & o_{p2} & \dots & o_{pp} \end{pmatrix}$$

alle Größen oberhalb der Diagonale verschwinden¹⁰⁾; es wird also dann wegen (22)

$$D[o] = (\lambda_1 o_{11}^2 + \lambda_2 o_{21}^2 + \lambda_3 o_{31}^2 + \dots) + (\lambda_2 o_{22}^2 + \lambda_3 o_{32}^2 + \dots) \\ + (\lambda_3 o_{33}^2 + \lambda_4 o_{43}^2 + \dots) + \dots$$

Auf Grund der Relation $\lambda_{h+1} \geq \lambda_h$ und der Beziehungen (23) ergibt dies unmittelbar

$$D[o] \geq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p.$$

Setzen wir andererseits $o^{(i)} = u_i$, so wird offenbar der Wert

$$D[o] = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p$$

gerade erreicht, womit die Behauptung des Hilfssatzes erwiesen ist.

Wir merken noch an, daß die Summe $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p$ den asymptotischen Wert $\frac{2\pi}{l^2} p^2$ besitzt, d. h. daß

$$\lim_{p=\infty} \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p}{p^2} = \frac{2\pi}{l^2}$$

gilt, wie aus elementaren Betrachtungen bekannt ist¹¹⁾; es gibt also gewiß eine positive Konstante A derart, daß für alle p

$$(24) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p \geq A \cdot p^2$$

gilt.

¹⁰⁾ Wir denken uns etwa zunächst o' durch eine lineare Kombination $\omega' = t_{11} o' + t_{12} o'' + \dots + t_{1p} o^{(p)}$ ersetzt, so daß ω' auf $u_1, u_3, \dots, u_p$ orthogonal steht; hiermit sind für die p Koeffizienten t_{1i} $p-1$ homogene Gleichungen gegeben, denen stets genügt werden kann. Sodann wird $\omega'' = t_{21} o' + \dots + t_{2p} o^{(p)}$ so bestimmt, daß ω'' auf ω' und auf $u_3, \dots, u_p$ orthogonal steht, was wiederum durch die stets mögliche Auflösung von $p-1$ homogenen Gleichungen für die p Unbekannten t_{2i} geschieht, usw. Indem wir die Funktionen $\omega^{(i)}$ normiert denken, haben wir das behauptete Ergebnis.

¹¹⁾ Vgl. loc. cit. 2), S. 33.

§ 5.

Die Konvergenzeigenschaften der Minimalfolgen.

Von den Minimalfolgen unseres ursprünglichen Variationsproblems können wir keinerlei unmittelbare Konvergenzeigenschaften erwarten; hierin liegt die hauptsächliche Schwierigkeit der gestellten Aufgabe. Für die Überwindung dieser Schwierigkeit spielt nun folgender Satz die entscheidende Rolle:

Hauptsatz: *Es gibt zu jeder Minimalfolge $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ eine ganze positive Zahl p , so daß für $q > p$ das Unabhängigkeitsmaß von je q Funktionen $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \dots, \varphi_{n_q}$ der Folge mit wachsendem n gegen Null konvergiert, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} n_i = \infty$ ist¹²⁾.*

Die kleinste positive ganze Zahl p , für welche dieser Satz noch besteht, wollen wir die zur Funktionenfolge gehörige *asymptotische Dimensionszahl*¹³⁾ nennen. Wir können dann unseren Satz in der schärferen Form aussprechen: *Die asymptotische Dimensionszahl jeder Minimalfolge liegt unterhalb einer nur von dem Variationsproblem, nicht aber von der speziellen Wahl der Minimalfolge abhängigen Schranke.*

Diese Sätze drücken aus, daß eine hinreichend große Anzahl von Funktionen der Minimalfolge mit genügend großem Index „beinahe“ voneinander linear abhängig sind.

Zum Beweise dieser Behauptungen nehmen wir an, die asymptotische Dimensionszahl unserer Minimalfolge sei mindestens gleich der ganzen Zahl ν ; dann gibt es also Gruppen von je ν Funktionen $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \dots, \varphi_{n_\nu}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), deren Indizes mit n über alle Grenzen wachsen und deren Unabhängigkeitsmaß oberhalb einer festen positiven Schranke α bleibt. Die Funktionen jeder dieser Gruppen sind voneinander linear unabhängig, lassen sich also orthogonalisieren; d. h. es gibt ein System von ν^2 Konstanten t_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, \nu$), so daß die Funktionen

$$(25) \quad \varphi_{n_i}^* = \sum_{j=1}^{\nu} t_{ij} \varphi_{n_j} \quad (i = 1, 2, \dots, \nu)$$

zueinander in G orthogonal und normiert sind. Wir behaupten, daß die Koeffizienten t_{ij} , welche ja noch von n abhängen, bei wachsendem n sämtlich beschränkt bleiben. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so sei bei geeignet groß gewähltem n etwa der Koeffizient t_{11} absolut genommen

¹²⁾ Die Bezeichnung n_i ist in dieser Arbeit so zu verstehen, daß n_i irgendeine positive ganzzahlige Funktion von n ist.

¹³⁾ Die Bezeichnung Dimensionszahl soll auf die Analogie zu den Verhältnissen bei Folgen von Vektoren in einem endlich-viel-dimensionalen Raume hinweisen.

oberhalb einer beliebig groß gewählten Schranke, und es sei t_{11} absolut genommen nicht kleiner als einer der anderen Koeffizienten t_{ij} .

Indem wir die Gleichung

$$1 = H[\varphi_{n_1}^*] = H\left[\sum_{j=1}^r t_{1j} \varphi_{n_j}\right]$$

durch t_{11}^2 dividieren, erhalten wir eine Relation der Form

$$\varepsilon_n = H\left[\sum_{j=1}^r c_j \varphi_{n_j}\right],$$

wobei die linke Seite mit wachsendem n gegen Null konvergiert, während die Summe $c_1^2 + \dots + c_r^2$ mindestens gleich 1 ist; das aber heißt, die r Funktionen $\varphi_{n_1}, \dots, \varphi_{n_r}$ besitzen bei hinreichend großem n ein beliebig kleines Unabhängigkeitsmaß, entgegen der Voraussetzung, daß dieses stets oberhalb der festen positiven Schranke α liegen soll. Mithin bleiben die Koeffizienten t_{ij} in den Gleichungen (25) bei wachsendem n beschränkt, und somit folgt durch Anwendung des Satzes aus § 3, daß auch die Funktionen $\varphi_{n_j}^*$, nach wachsenden Indizes n geordnet, eine Minimalfolge des Variationsproblem es bilden, daß also

$$(26) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D[\varphi_{n_j}^*] = d.$$

Nunmehr betrachten wir folgendes Variationsproblem, das wir der Abkürzung halber mit *Problem II* bezeichnen wollen: Es soll ein System von r zueinander orthogonalen, im übrigen noch den Bedingungen des ursprünglichen Variationsproblem es genügenden Funktionen $\varphi_1^*, \dots, \varphi_r^*$ gefunden werden, für welches der Ausdruck

$$D[\varphi^*] = D[\varphi_1^*] + \dots + D[\varphi_r^*]$$

möglichst klein wird, wobei die Integrale natürlich über das Gebiet G zu erstrecken sind. Ob ein solches Minimum existiert, muß auch hier dahingestellt bleiben; jedenfalls aber wird der Ausdruck $D[\varphi^*]$ eine untere Grenze d_r besitzen, und es gilt jedenfalls für diese Grenze

$$(27) \quad d_r = r \cdot d.$$

Um dies letztere einzusehen, bedenken wir, daß die untere Grenze beim Problem II gewiß nicht kleiner sein kann, als die untere Grenze, welche sich ergeben würde, wenn wir im Problem II die Forderung der Orthogonalität der Funktionen φ_i^* aufgeben würden; die so definierte untere Grenze wäre aber offenbar $r \cdot d$, und es ist also $d_r \geq r \cdot d$; andererseits genügen die Funktionsgruppen $\varphi_{n_1}^*, \dots, \varphi_{n_r}^*$ den Bedingungen des Problem es II, und es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} D[\varphi_n^*] = r \cdot d$; somit folgt unmittelbar die Gleichung (27).

Um für die Zahl ν eine obere Schranke zu erhalten, denken wir das Gebiet G in ein Quadrat Q der Seitenlänge l eingebettet und betrachten für dieses Quadrat das Variationsproblem des § 4, indem wir die dort als p benannte Zahl mit ν identifizieren. Wir bezeichnen dieses Problem als *Problem III*. Das Problem II entsteht aus III, indem wir von den zur Konkurrenz zuzulassenden Funktionen über die Bedingungen des Problem III hinaus fordern, daß sie in demjenigen Teile von Q , welcher außerhalb G liegt, identisch verschwinden, und außerdem den Bedingungen (16) aus § 3 genügen. Mithin ist die untere Grenze d_ν beim Problem II nicht kleiner als die beim Problem III, d. h. es gilt infolge des Hilfssatzes von § 4

$$d_\nu = \nu \cdot d \geq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\nu,$$

wobei mit λ_n wie in § 4 die Eigenwerte des Quadrates Q bezeichnet werden. Nun ist die Summe $\lambda_1 + \dots + \lambda_\nu$ gemäß (24) größer als $A \nu^2$, wo A eine positive Konstante ist, also gilt

$$\nu \cdot d \geq A \cdot \nu^2$$

oder

$$(28) \quad \nu \leq \frac{d}{A}.$$

Wir haben also für die positive ganze Zahl ν eine obere Schranke, welche überdies nicht mehr von der speziellen Wahl der Minimalfolge des Problem I abhängt, wie an der Spitze dieses Paragraphen behauptet wurde.

Der hiermit vollständig bewiesene Satz führt uns nun leicht zu folgendem Theorem, auf welchem die weitere Durchführung des Existenzbeweises beruhen wird:

Aus einer Minimalfolge $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ von der Dimensionszahl p lassen sich p Minimalfolgen

$$(29) \quad \begin{array}{l} \psi_{1_1}, \psi_{2_1}, \psi_{3_1}, \dots \\ \psi_{1_2}, \psi_{2_2}, \psi_{3_2}, \dots \\ \dots \dots \dots \\ \psi_{1_p}, \psi_{2_p}, \psi_{3_p}, \dots \end{array}$$

herstellen, derart daß die Funktionen ψ_{n_i} ($i = 1, 2, \dots, p$) für jeden Wert von n ein orthogonales Funktionensystem bilden und die Gleichungen

$$(30) \quad \lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} H[\psi_{n_i} - \psi_{m_i}] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

$$(31) \quad \lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} D[\psi_{n_i} - \psi_{m_i}] = 0$$

befriedigen.

Mit anderen Worten leistet der Satz eine *Zerspaltung der Minimalfolge der φ_n* in p wesentlich verschiedene Minimalfolgen, deren jede die Dimensionszahl 1 besitzt^{13a)}.

Wir erhalten die Minimalfolgen (29), indem wir von solchen Gruppen

$$\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \dots, \varphi_{n_p} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

der ursprünglichen Minimalfolge ausgehen, von denen wir nach dem eben Ausgeführten voraussetzen dürfen, daß jede ein System von p normierten orthogonalen Funktionen bildet, d. h. daß die Gleichungen $H[\varphi_{n_i}] = 1$, $H[\varphi_{n_i}, \varphi_{n_j}] = 0$, ($i \neq j$; $i, j = 1, 2, \dots, p$) gelten. Ohne den Charakter der Minimalfolge zu verändern, dürfen wir die Funktionen jeder Gruppe einer beliebigen orthogonalen Substitution unterwerfen, die wir nunmehr für jedes n geeignet fixieren wollen. Es seien n und m zwei hinreichend große Indizes, $n < m$; dann ist das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $\varphi_{n_1}, \dots, \varphi_{n_p}, \varphi_{m_h}$ ($h = 1, \dots, p$) beliebig klein; es gibt also Konstanten $c_1, c_2, \dots, c_p, c_{p+1}$ derart, daß $H[c_1\varphi_{n_1} + \dots + c_p\varphi_{n_p} - c_{p+1}\varphi_{m_h}]$ beliebig klein wird und $c_1^2 + \dots + c_p^2 + c_{p+1}^2 = 1$ ist, dabei muß c_{p+1} absolut genommen oberhalb einer positiven von m und n unabhängigen Schranke bleiben, weil andernfalls das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $\varphi_{n_1}, \dots, \varphi_{n_p}$ beliebig klein werden würde, während es doch den Wert 1 hat. Dividieren wir also durch c_{p+1}^2 , so ergibt sich, daß der Ausdruck $H[\varphi_{m_h} - a_1\varphi_{n_1} - \dots - a_p\varphi_{n_p}]$ durch beschränkt bleibende Konstanten a_i bei hinreichend großem m und n beliebig klein gemacht werden kann; am kleinsten übrigens, wenn

$$a_i = H[\dot{\varphi}_{m_h}, \varphi_{n_i}]$$

genommen wird. Setzen wir

$$\varphi_{n_h}^* = a_1\varphi_{n_1} + a_2\varphi_{n_2} + \dots + a_p\varphi_{n_p},$$

so folgt also

$$(32) \quad \lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} H[\varphi_{n_h}^* - \varphi_{m_h}] = 0 \quad (h = 1, \dots, p).$$

Aus der Bemerkung am Schluß von § 1 entnehmen wir daher, daß die Funktionen $\varphi_{n_h}^*$ in den Ausdrücken $H[\varphi_{n_i}^*, \varphi_{n_j}^*]$ bei hinreichend großem

^{13a)} Den Sinn dieses Satzes und seines Beweises erfaßt man am besten an der folgenden analogen Tatsache: Sind im dreidimensionalen Raume $v_1, v'_1, v_2, v'_2, \dots$ unendlich viele Einheitsvektoren durch den Nullpunkt, so daß v_i und v'_i orthogonal stehen und daß je drei der Vektoren mit hinreichend großen Indizes ein Parallelepiped von beliebig kleinem Volumen definieren, dann lassen sich die Vektoren v_i, v'_i durch zwei andere orthogonale Vektoren u_i, u'_i in derselben Ebene ersetzen, welche gegen zwei Grenzlagen u, u' konvergieren.

m und n mit beliebig großer Genauigkeit durch die Funktionen $\varphi_{m_i}, \varphi_{m_j}$ ersetzt werden dürfen, daß mit anderen Worten wegen der Orthogonalität der p Funktionen φ_{m_h} ($h = 1, \dots, p$) auch die p Funktionen $\varphi_{n_h}^*$ wenigstens „angenähert“ ein orthogonales Funktionensystem bilden, d. h. daß die Gleichungen

$$\lim_{n=\infty} H[\varphi_{n_i}^*] = 1, \quad \lim_{n=\infty} H[\varphi_{n_i}^*, \varphi_{n_j}^*] = 0 \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, p)$$

gelten. Wenn wir also dieses Funktionensystem in der üblichen Weise vollends orthogonalisieren, indem wir ein orthogonales Funktionensystem $\bar{\varphi}_{n_1}, \bar{\varphi}_{n_2}, \dots, \bar{\varphi}_{n_p}$ einführen, dessen erste Funktion $\bar{\varphi}_{n_1}$ sich von $\varphi_{n_1}^*$ nur durch einen konstanten Faktor unterscheidet, dessen zweite $\bar{\varphi}_{n_2}$ eine lineare Kombination von $\varphi_{n_1}^*$ und $\varphi_{n_2}^*$ ist, usw., so wird die lineare Transformation der Funktionen $\varphi_{n_h}^*$ in die Funktionen $\bar{\varphi}_{n_h}$ sich von der identischen Transformation bei genügend großen m und n nur beliebig wenig unterscheiden; es gelten somit auch die Gleichungen

$$(33) \quad \lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} H[\bar{\varphi}_{n_h} - \varphi_{m_h}] = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, p).$$

Die orthogonale Transformation, welche die p Funktionen φ_{n_h} in die p Funktionen $\bar{\varphi}_{n_h}$ überführt, wollen wir mit $T_{m,n}$ bezeichnen; die Ausübung dieser Transformation, d. h. den Übergang von den φ_{n_h} zu den $\bar{\varphi}_{n_h}$ könnten wir das „Ausrichten“ der Funktionen φ_{n_h} nach den Funktionen φ_{m_h} nennen.

Aus einer unendlichen Folge von orthogonalen Transformationen in p Variablen kann man wegen der Beschränktheit der Koeffizienten nach dem Weierstraßschen Häufungssatz stets eine konvergente Teilfolge herausgreifen, d. h. eine Folge, bei der jede Größe des Koeffizientenschemas gegen eine entsprechende Größe im Koeffizientenschema einer „Grenztransformation“ konvergiert.

Wir betrachten nun das System folgender orthogonaler Transformationen:

$$\begin{array}{ccccccc} & T_{21} & & & & & \\ & T_{31} & T_{32} & & & & \\ & T_{41} & T_{42} & T_{43} & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & T_{m1} & \dots & T_{mn} & \dots & T_{m,m-1} & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Durch die Transformationen der h -ten Vertikalreihe werden die Funktionen $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \dots, \varphi_{n_p}$ hintereinander nach den Funktionen $\varphi_{m_1}, \varphi_{m_2}, \dots, \varphi_{m_p}$ ($m = h + 1, h + 2, \dots$) ausgerichtet. Wir können uns nun nach bekanntem Muster folgendermaßen eine Folge von wachsenden Indizes $s_1, s_2, s_3, \dots$ ausgewählt denken, so daß mit wachsendem h die Transformationen T_{s_h} jeder

Vertikalreihe bei festem l gegen eine Grenztransformation T_l konvergieren. Zunächst wählen wir aus den Zahlen 2, 3, 4, ... eine Teilfolge, welche wir mit $(1, 1), (2, 1), (3, 1), \dots$ bezeichnen wollen, so aus, daß für $\mu_h = (h, 1)$ die Transformationen $T_{\mu_h, 1}$ bei wachsendem h gegen eine Grenztransformation T_1 konvergieren; sodann wählen wir aus den Zahlen $(1, 1), (2, 1), (3, 1), \dots$ eine Teilfolge, die wir mit $(1, 2), (2, 2), \dots$ bezeichnen, so aus, daß auch die Transformationen $T_{\mu_h, 2}$ für $\mu_h = (h, 2)$ bei wachsendem h gegen eine Grenztransformation T_2 konvergieren, und fahren so fort. Setzen wir nun $s_h = (h, h)$, so konvergieren offenbar die Transformationen $T_{s_h, l}$ für jeden Wert von l gegen die betreffende Transformation T_l .

Indem wir nun die Funktionen $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \dots, \varphi_{n_p}$ unserer ursprünglichen Minimalfolge der orthogonalen Transformation T_n unterwerfen, gelangen wir zu Funktionen, die wir mit $\psi_{n_1}, \psi_{n_2}, \dots, \psi_{n_p}$ bezeichnen wollen und von denen wir behaupten, daß sie die in den Gleichungen (30), (31) ausgesprochenen Konvergenzeigenschaften besitzen. In der Tat folgt dies leicht aus Gleichung (33); denn die Funktionen $\bar{\varphi}_{n_h}$, welche noch von dem Index m abhängen, da sie aus den φ_{n_h} durch Anwendung der Transformation $T_{m n}$ entstehen, konvergieren offenbar gegen die Funktionen ψ_{n_h} , wenn m die Werte $s_1, s_2, \dots$ durchläuft; also gilt auch

$$(34) \quad \lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} H[\psi_{n_h} - \varphi_{m_h}] = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, p),$$

wobei wieder m auf die Werte s_j beschränkt bleibt, während für n außer der durchweg gemachten Bedingung $n < m$ keinerlei Beschränkung gefordert wird. Sind nun n und r zwei hinreichend große Indizes, $t = s_j$ ebenfalls ein hinreichend großer Index, $t > n$, $t > r$, so wird $H[\psi_{n_h} - \varphi_{t_h}]$ und $H[\psi_{r_h} - \varphi_{t_h}]$ beliebig klein, und hieraus folgt in der üblichen Weise nach § 1, daß auch $H[\psi_{r_h} - \psi_{n_h}]$ beliebig klein wird, womit die Gleichung (30) des behaupteten Theoremes bewiesen ist.

Um die Gleichung (31) zu beweisen, beachten wir, daß die Funktionen ψ_{n_h} eine Minimalfolge bilden, daß also nach dem Satze von § 3

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} D[\psi_{n_h} - \psi_{m_h}] &= \lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} \{ D[\psi_{n_h}] + D[\psi_{m_h}] - 2D[\psi_{m_h}, \psi_{n_h}] \} \\ &= d; \lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} H[\psi_{n_h} - \psi_{m_h}] = 0 \end{aligned}$$

wird.

Die Resultate der vorangehenden Betrachtungen, welche wohl schon an sich ein gewisses Interesse besitzen, setzen uns nun instand, den Existenzbeweis vollständig durchzuführen und darüber hinaus tiefer in die Eigenschaften der Eigenfunktionen einzudringen. Wir werden das Ziel des Existenzbeweises erreichen, indem wir an Stelle der bisher betrachteten

beliebigen Minimalfolgen besondere Minimalfolgen konstruieren, welche in G abschnittsweise Differentialgleichungen vom Typus (1) genügen und durch Benutzung dieses Umstandes gestatten, aus den Relationen (30), (31) die Konvergenz der Funktionen der Minimalfolge und ihrer Ableitungen selbst zu beweisen; von der Grenzfunktion wird sich dann herausstellen, daß sie die gesuchte Lösung unseres Variationsproblem es ist.

Um den Beweis ohne Unterbrechungen durchführen zu können, wollen wir im nächsten Abschnitt eine Reihe von Hilfsbetrachtungen voranschicken.

Kapitel II. Hilfsbetrachtungen.

§ 6.

Hilfssätze über die Integrale D und H .

Wir formulieren zunächst die Greensche Formel der gewöhnlichen Potentialtheorie in folgender, die üblichen Voraussetzungen erweiternder Fassung:

Hilfssatz 2. *Es seien φ , ψ zwei in G stetige und im Innern stückweise mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen versehene Funktionen, für welche $D[\varphi]$ und $D[\psi]$ existieren; es möge im Innern von G der Ausdruck $\Delta\varphi$ noch stetig sein, während ψ die Randwerte Null besitzt; dann gilt die Greensche Formel*

$$(35) \quad D[\varphi, \psi] = -H[\psi, \Delta\varphi].$$

Wir beweisen die Formel zunächst unter der Voraussetzung, daß G ein Kreis vom Radius R ist. Führen wir Polarkoordinaten r und ϑ um den Mittelpunkt ein, so wird

$$D[\psi] = \int_0^R \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right)^2 \right\} r dr d\vartheta.$$

Wegen der Schwarzschen Ungleichung und der Randbedingung $\psi = 0$ haben wir, wenn $R - r = h$ gesetzt wird und $R < 2r$ ist,

$$(\psi(r, \vartheta))^2 = \left(\int_r^R \frac{\partial \psi(r, \vartheta)}{\partial r} dr \right)^2 \leq h \int_r^R \left(\frac{\partial \psi(r, \vartheta)}{\partial r} \right)^2 dr \leq \frac{2h}{R} \int_r^R \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 r dr,$$

also bei Integration nach ϑ

$$(36) \quad \int_0^{2\pi} \psi(r, \vartheta)^2 d\vartheta \leq \frac{2h}{R} D_h[\psi] = \frac{h}{R} \epsilon_h,$$

wobei das Integral $D_h[\psi]$ über den Kreisring mit den Radien R und $R - h$

zu erstrecken ist und einen mit h gegen Null konvergierenden Wert $\frac{1}{2} \varepsilon_h$ besitzt. Es gibt ferner gewiß einen Zwischenwert r' zwischen R und $R - h$ derart, daß bei Integration über den Kreis vom Radius r'

$$37) \quad \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \varphi(r, \vartheta)}{\partial r} \right)^2 r d\vartheta \leq \frac{1}{2} \frac{\eta_h}{h} \quad (r=r')$$

wird, unter $\frac{1}{2} \eta_h$ ebenfalls eine mit h gegen Null konvergierende Größe, nämlich $D_h[\varphi]$, verstanden. Ersetzen wir in (36) r durch r' , so bleibt die Ungleichung erst recht bestehen. Wenden wir nun auf den Kreis $K_{r'}$ mit dem Radius r' die Greensche Formel an, was wegen der über den Rand hinaus reichenden Existenz der in betracht kommenden Ableitungen ohne weiteres legitim ist, so folgt durch Anwendung der Schwarzischen Ungleichung aus (37), (36)

$$(D_{K_{r'}}[\psi, \varphi] + H_{K_{r'}}[\psi, \Delta \varphi])^2 = \left(\int_0^{2\pi} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial r} r d\vartheta \right)^2 \leq \int_0^{2\pi} \psi^2 \cdot r d\vartheta \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 r d\vartheta \leq \frac{r'}{2R} \varepsilon_h \cdot \eta_h \quad (r=r') \quad (r=r')$$

Hierbei ist h beliebig; es konvergiert mit abnehmendem h der Ausdruck $D_{K_{r'}}[\psi, \varphi]$ gegen $D_K[\psi, \varphi]$ und die Größe $\varepsilon_h \cdot \eta_h$ gegen Null. Somit ist der Hilfssatz für einen kreisförmigen Bereich bewiesen.

Ganz analog würden wir zu schließen haben, wenn die Berandung von G aus mehreren Kreisen bestünde.

Ist G kein Kreisbereich, so verfährt man am kürzesten¹⁴⁾, indem man sich G auf einen Kreisbereich konform abgebildet denkt, was bekanntlich stets möglich ist. Da bei einer solchen Abbildung die Integrale $D[\varphi, \psi]$, $H[\psi, \Delta \varphi]$ in genau dieselben Integrale für den Kreisbereich übergehen und für diesen die Gleichung (35) bewiesen ist, so gilt sie ohne weiteres auch für G .

Die weiteren Hilfssätze dieses Paragraphen beziehen sich auf einen Vergleich der Integrale D und H .

Hilfssatz 3. *Es sei φ eine auf dem Rande von G verschwindende, in G stetige Funktion, für welche $D[\varphi]$ existiert und kleiner als eine Schranke M ist; es sei ferner Σ ein Teilgebiet von G , dessen sämtliche Punkte vom Rande einen kleineren Abstand als ε besitzen; dann ist das Integral $H_{\Sigma}[\varphi]$ kleiner als eine nur von ε und M abhängige, mit ε zugleich gegen Null konvergierende Größe.*

¹⁴⁾ Will man den Abbildungssatz aus der Theorie der konformen Abbildung nicht benutzen, so schließt man am besten und ohne jede Schwierigkeit mit ganz ähnlichen Überlegungen, wie sie beim Beweise von Hilfssatz 3 verwendet werden. Eine Übertragung auf mehr unabhängige Variable macht dann keine neuen Schwierigkeiten.

Zum Beweise betrachten wir zunächst einen Randpunkt von G und schlagen um diesen einen Kreis K mit dem — genügend klein zu nehmen — Radius h ; das dem Kreise und G gemeinsame Gebiet heiße K ; führen wir in dem Kreise konzentrische Polarkoordinaten r, ϑ ein und beachten, daß bei hinreichend kleinem h jeder Kreis $r \leq h$ den Rand von G trifft und daß φ in diesen Punkten $r, \vartheta_0(r)$ verschwindet, so folgt aus der Beziehung

$$\varphi(r, \vartheta) = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} d\vartheta$$

sofort

$$\varphi(r, \vartheta)^2 \leq 2\pi \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right)^2 d\vartheta$$

und durch Integration nach $r dr$

$$\int \varphi^2(r, \vartheta) r dr \leq 2\pi \int \int_{(K)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right)^2 r dr d\vartheta \leq 2\pi h^2 D_K[\varphi].$$

(Die Integrale sind hierbei stets so zu verstehen, daß sie über die in K liegenden Teile des betreffenden Weges erstreckt werden.)

Integrieren wir nun noch nach ϑ , so folgt die Relation

$$(38) \quad H_K[\varphi] \leq 2\pi \cdot 2\pi h^2 D_K[\varphi],$$

also sicher erst recht

$$(39) \quad H_K[\varphi] \leq 4\pi^2 \cdot h^2 M.$$

Nun bedenken wir, daß wir gemäß den Vorbemerkungen in § 1 sicher eine mit ε gegen Null konvergierende Größe h und eine Anzahl N von Randpunkten P_i des Gebietes G finden können, derart daß $N \cdot h$ kleiner als eine nur vom Gebiet abhängende Zahl C ist und daß das Gebiet Σ_ε Teilgebiet desjenigen Teilgebietes S_h von G wird, welches G mit einem oder mehreren der um die Punkte P_i mit dem Radius h geschlagenen Kreise K_i gemein hat. Nun ist

$$H_{\Sigma_\varepsilon}[\varphi] \leq H_{S_h}[\varphi] \leq \sum_{i=1}^N H_{K_i}[\varphi],$$

wobei die Summe über die N eben charakterisierten Kreise K_i bzw. die zugehörigen Gebiete K_i zu erstrecken ist. Aus (39) und $N \cdot h < C$ folgt nun sofort

$$H_{\Sigma_\varepsilon}[\varphi] < N h^2 \cdot 4\pi^2 M < h \cdot C 4\pi^2 M,$$

d. h. aber, der Hilfssatz ist bewiesen¹⁵⁾.

¹⁵⁾ Durch bessere Ausnutzung der Beziehung (38) ließe sich das Resultat noch verschärfen, bzw. von der Voraussetzung der Rektifizierbarkeit der Randkurve befreien; jedoch braucht hierauf nicht eingegangen zu werden.

Hilfssatz 4. Es mögen über φ die Voraussetzungen des Hilfssatzes 3 gelten; und es sei S ein in G gelegener rechteckiger Streifen von der Breite h , dann ist

$$(40) \quad H_S[\varphi] \leq h \cdot C,$$

wo C eine nur von M und dem Gebiet G abhängige Zahl bedeutet.

Beweis. Die Punkte des Streifens S mögen etwa durch die Beziehungen

$$-a < x < a, \quad 0 < y < h$$

charakterisiert sein. Es sei $P_0(x, y)$ ein Punkt von S , und P ein Schnittpunkt der durch P_0 gehenden Geraden $y = \text{konst.}$ mit dem Rande von G , so daß PP_0 ganz in G liegt. Dann ist

$$\varphi(x, y)^2 = \left(\int_{P_0}^P \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right)^2 \leq E \int_{P_0}^P \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 dy,$$

also

$$(41) \quad \int_{-a}^a \varphi(x, y)^2 dx < E \cdot M,$$

wo E die maximale Entfernung zweier Randpunkte von G bedeutet; somit ergibt sich

$$(40) \quad H_S \leq h \cdot E \cdot M \approx h \cdot C,$$

q. e. d.

§ 7.

Hilfssätze über die Differentialgleichung $\Delta \varphi + \lambda \varphi + f = 0$.

Es seien $f_1, f_2, \dots$ sowie $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ in einem Gebiete B stetige, bis zur zweiten Ordnung stetig differenzierbare Funktionen, und es gelte in B gleichmäßig

$$(42) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f.$$

Es seien ferner $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda$ Konstanten, für welche

$$(43) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \lambda$$

gilt; die Funktionen φ_i mögen der Differentialgleichung

$$(44) \quad \Delta \varphi_i + \lambda_i \varphi_i + f_i = 0$$

sowie den Bedingungen

$$(45) \quad \lim_{\substack{i \rightarrow \infty \\ j \rightarrow \infty}} H[\varphi_i - \varphi_j] = 0$$

$$(45a) \quad \lim_{\substack{i \rightarrow \infty \\ j \rightarrow \infty}} D[\varphi_i - \varphi_j] = 0^{10)}$$

¹⁰⁾ Die Bedingung (45) ist übrigens eine Folge der Bedingung (45a), wie sich leicht aus den vorangehenden Entwicklungen ergibt.

genügen. Dann konvergieren die Funktionen φ_i in jedem ganz im Inneren von B gelegenen Teilgebiet gleichmäßig nebst ihren Ableitungen gegen eine Grenzfunktion φ bzw. deren Ableitungen, und es gilt

$$(46) \quad \Delta \varphi + \lambda \varphi + f = 0.$$

Dem Beweise werde folgende Bemerkung vorausgeschickt: Bedeutet r den Abstand $\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ und ist $K(r)$ diejenige Lösung der Differentialgleichung $\Delta K + K = 0$, welche die Form hat

$$K = \frac{1}{2\pi} \log r + S(r),$$

unter $S(r)$ eine überall für endliches r mit ihrer ersten Ableitung stetige und für $r \neq 0$ reguläre analytische Funktion von r verstanden, so genügt die Funktion

$$\omega(x, y) = \iint_{(B)} K(\lambda r) f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

der Differentialgleichung

$$\Delta \omega + \lambda \omega + f = 0.$$

Wir beachten nämlich, daß $K(\lambda r)$ der Differentialgleichung

$$\Delta K(\lambda r) + \lambda K(\lambda r) = 0,$$

$S(x, y)$ also, wegen $\Delta \log r = 0$, der Differentialgleichung

$$(47) \quad \Delta S + \lambda \left(S + \frac{1}{2\pi} \log \lambda r \right) = 0$$

genügt. Wir setzen

$$\omega = \omega' + \omega'',$$

$$\omega' = \frac{1}{2\pi} \iint_{(B)} \log \lambda r f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad \omega'' = \iint_{(B)} S(\lambda r) f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Nach der klassischen Potentialtheorie ist

$$\Delta \omega' + f = 0.$$

Ferner wird

$$\Delta \omega'' = \iint_{(B)} \Delta S(\lambda r) f(\xi, \eta) d\xi d\eta = -\lambda \iint_{(B)} K(\lambda r) f(\xi, \eta) d\xi d\eta = -\lambda \omega.$$

Also ist wirklich

$$(48) \quad \Delta \omega + \lambda \omega + f = 0.$$

Nunmehr definieren wir

$$\omega_i = \iint_{(B)} K(\lambda_i r) f_i(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Dann folgt unmittelbar die in B gleichmäßige Konvergenz der Funk-

tionen ω_i sowie der ersten Ableitungen gegen eine Grenzfunktion ω und deren Ableitungen. Es ist also gewiß

$$\lim_{\substack{i=\infty \\ j=\infty}} H[\omega_i - \omega_j] = 0, \quad \lim_{\substack{i=\infty \\ j=\infty}} D[\omega_i - \omega_j] = 0.$$

Setzen wir $\varphi_i = \omega_i + \chi_i$, so wird daher wegen (44), (48)

$$(49) \quad \Delta \chi_i + \lambda_i \chi_i = 0,$$

$$(50) \quad \lim_{\substack{i=\infty \\ j=\infty}} H[\chi_i - \chi_j] = 0,$$

$$(51) \quad \lim_{\substack{i=\infty \\ j=\infty}} D[\chi_i - \chi_j] = 0.$$

Bekanntlich¹⁷⁾ gilt für jede Lösung ω der Differentialgleichung

$$\Delta \omega + \lambda \omega = 0$$

der sogenannte Mittelwertsatz

$$J(\lambda r) \omega(x, y) = \int_0^{2\pi} \omega d\vartheta,$$

wobei $J(t)$ die nullte Besselsche Funktion von t bedeutet, das Integral über eine Kreisperipherie vom Radius r um den Mittelpunkt (x, y) zu erstrecken ist, und mit ϑ wieder der Zentriwinkel nach dem Mittelpunkt bei beliebiger Anfangslage bezeichnet wird. Es wird also nach Multiplikation mit r und Integration zwischen den Grenzen 0 und R

$$(52) \quad \omega(x, y) \cdot \int_0^R J(\lambda r) r dr = \int_{(K_R)} \int \omega(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

wobei das Integral rechts über den Kreis K_R ($r \leq R$) zu erstrecken ist. Wegen der Konvergenz der λ_i können wir in der hieraus folgenden Gleichung

$$(53) \quad \chi_i(\xi, \eta) \int_0^R J(\lambda_i r) r dr = \int_{(K_R)} \int \chi_i(x, y) dx dy$$

R von i unabhängig so wählen, daß $\int_0^R J(\lambda_i r) r dr$ oberhalb einer festen, von i unabhängigen Schranke bleibt¹⁸⁾, und zugleich dürfen wir für alle Punkte eines ganz im Inneren von B liegenden Teilgebietes B' denselben Wert von R wählen. Nunmehr folgt aus (53), (50) unmittelbar

$$\lim_{\substack{i=\infty \\ j=\infty}} \left| \chi_i(\xi, \eta) \int_0^R J(\lambda_i r) r dr - \chi_j(\xi, \eta) \int_0^R J(\lambda_j r) r dr \right|^2 \leq \lim_{\substack{i=\infty \\ j=\infty}} R^2 \pi H[\chi_i - \chi_j] = 0.$$

¹⁷⁾ Vgl. etwa Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen der Physik, 2. Band, S. 282.

¹⁸⁾ Dies ergibt sich unmittelbar aus der Gleichung $J(0) = 1$.

und zwar gilt diese Relation gleichmäßig für alle Punkte von B' . Wegen der Konvergenz der Zahlen λ_i und damit der Ausdrücke $\int_0^R J(\lambda_i, r) r dr$ folgt hieraus die gleichmäßige Konvergenz der Funktionen χ_i in B' .

Genau ebenso ergibt sich unter Benutzung der Gleichung (51) die gleichmäßige Konvergenz der partiellen Ableitungen $\frac{\partial \chi_i}{\partial x}$ und $\frac{\partial \chi_i}{\partial y}$, welche ja ebenfalls der Differentialgleichung $\Delta \omega + \lambda \omega = 0$ genügen.

Nun gilt, wenn Γ irgendeine mit stetiger Tangente versehene geschlossene, ein im Inneren von B' liegendes Teilgebiet B'' abgrenzende Kurve bedeutet, wenn mit s die Bogenlänge auf dieser Kurve, mit $\frac{\partial}{\partial \nu}$ die Differentiation nach der inneren Normale bezeichnet wird, für jeden inneren Punkt von B''

$$(54) \quad -\frac{1}{4} \int_{\Gamma} \left[K(\lambda_i, r) \frac{\partial \chi_i}{\partial \nu} - \chi_i \frac{\partial K(\lambda_i, r)}{\partial \nu} \right] ds = \chi_i(\xi, \eta),$$

wobei das Integral über die Kurve Γ zu erstrecken ist¹⁹⁾. Da man in dieser Darstellung für jedes ganz im Inneren von B'' liegende Teilgebiet B''' nach ξ und η beliebig oft unter dem Integralzeichen differenzieren darf, so folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz von χ_i und $\frac{\partial \chi_i}{\partial x}$ sowie $\frac{\partial \chi_i}{\partial y}$ auf Γ für B''' die gleichmäßige Konvergenz sämtlicher partiellen Ableitungen von χ_i ; mithin gilt für die Grenzfunktion $\chi = \lim_{i \rightarrow \infty} \chi_i$ wieder die Differentialgleichung $\Delta \chi + \lambda \chi = 0$ und daher für $\varphi = \omega + \chi$ die Differentialgleichung $\Delta \varphi + \lambda \varphi + f = 0$, womit der behauptete Satz bewiesen ist.

Übrigens zeigt (54) unmittelbar, daß die Funktionen χ_i ebenso wie χ unbeschränkt differenzierbar sind, während für ω_i , ω dies nur gilt, wenn über f_i , f entsprechende Voraussetzungen zutreffen, etwa wenn diese Funktionen selbst unbeschränkt differenzierbar sind. Sind die f_i , f analytische Funktionen von x und y , so gilt dasselbe von den φ_i und von φ .

§ 8.

Lösung eines Variationsproblems für Rechtecke.

Um das dieser Arbeit zugrunde liegende Variationsproblem zu lösen, machen wir uns den Umstand zunutze, daß wir ein analoges Problem elementar beherrschen, wenn an Stelle des Bereiches G ein beliebiges Rechteck²⁰⁾ R tritt. Wir formulieren das betreffende Variationsproblem folgendermaßen:

¹⁹⁾ Vgl. etwa loc. cit. ¹⁷⁾, S. 280.

²⁰⁾ Man könnte statt der Rechtecke ebensogut etwa Kreise betrachten und in den späteren Überlegungen zugrunde legen.

Es seien R ein Rechteck der xy -Ebene, $v_1, v_2, \dots, v_l$ gegebene, voneinander linear unabhängige analytische Funktionen im Rechteck, f eine stetige Funktion des Ortes auf dem Rande von R ; es möge ferner die Funktion f so beschaffen sein, daß es eine in R stetige und mit stückweise stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung versehene Funktion φ_0 gibt, welche die Randwerte f besitzt und deren über R erstrecktes Integral $D[\varphi_0]$ einen endlichen Wert hat. Wir suchen nun eine Funktion φ , welche dieselben Randwerte besitzt, ebenfalls in R stetig und zweimal stückweise stetig differenzierbar ist, den Bedingungen

$$(55) \quad H[\varphi] = \alpha$$

$$(56) \quad H[\varphi, v_h] = \beta_h \quad (h = 1, \dots, l)$$

genügt und für welche $D[\varphi]$ möglichst klein wird; dabei bedeuten α und β_h solche gegebene Konstante, daß die Gramsche Determinante $\Delta\{\varphi, v_1, \dots, v_l\}$, deren Wert nach Vorgabe dieser Konstanten festliegt, von Null verschieden ist²¹⁾.

Um dieses Problem zu lösen, schicken wir voraus, daß wir die Eigenwerte und Eigenfunktionen $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ und $u_1, u_2, \dots$ des Rechtecks für die Differentialgleichung (1) bei der Randbedingung $u = 0$ explizite kennen (vgl. § 4), und zwar sind, wenn a und a' die Seitenlängen des Rechtecks bedeuten, die Eigenwerte durch die Ausdrücke $\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{a'^2} \right)$, die Eigenfunktionen durch die Ausdrücke $\frac{1}{4aa'} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a'}$ gegeben, und es gilt übrigens die asymptotische Gleichung

$$(57) \quad \lambda_n \simeq \frac{4\pi}{aa'} \cdot n,$$

wenn wieder $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ die Reihe der nach ansteigender Größe geordneten Eigenwerte bedeutet. Die Funktionen $u_n(x, y)$ bilden, wie aus der Theorie der Fourierschen Reihen bekannt ist, ein vollständiges normiertes orthogonales Funktionensystem für das Rechteck R .

Es sei nun $p(x, y)$ die in R reguläre Potentialfunktion, welche die Randwerte f besitzt; bekanntlich²²⁾ existiert $D[p]$ (und ist nicht größer als $D[\varphi_0]$). Setzen wir $\varphi = p + \psi$, so besitzt ψ nunmehr die Rand-

²¹⁾ Diese letzte Bedingung ist offenbar völlig naturgemäß; würden nämlich die Konstanten α und β_i so gegeben sein, daß das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $\varphi, v_1, \dots, v_l$ verschwinden muß, so würden von vornherein die Funktionen $\varphi, v_1, v_2, \dots, v_l$ linear abhängig voneinander sein müssen.

²²⁾ Vgl. etwa Hadamard, Bull. Soc. math. France 34 (1906), oder Courant, Journal f. Math. 144 (1914), S. 190 ff.

werte Null. Aus der Greenschen Formel des vorigen Paragraphen folgt $D[\psi, p] = 0$, es ist also

$$D[\varphi] = D[\psi] + D[p].$$

Wir können daher statt der Forderung, $D[\varphi]$ zum Minimum zu machen, auch die Forderung: $D[\psi] = \text{Min.}$ aufstellen.

Wir gehen von unserem Variationsproblem zunächst zu einem einfachen Minimumproblem für unendlich viele Variable über, um dann von dessen Lösung zurückzuschließen. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$\begin{aligned} H[\psi, u_k] &= \xi_k & (k = 1, 2, 3, \dots) \\ H[p, u_k] &= p_k & (i = 1, 2, \dots, l) \\ H[v_i, u_k] &= v_k^{(i)}, \end{aligned}$$

und haben dann zufolge der Vollständigkeitseigenschaft der Funktionen u_k

$$\begin{aligned} D[\psi] &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2 \\ H[\varphi] &= \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k + p_k)^2 \\ H[\varphi, v_i] &= \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k + p_k) v_k^{(i)}. \end{aligned}$$

Hierbei ist zu bemerken, daß die Summen $H[p] = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^2$ und $H[v_i] = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^{(i)2}$ konvergieren. Setzen wir noch $\eta_k = \sqrt{\lambda_k} \cdot \xi_k$, so entsteht das Minimumproblem

$$\begin{aligned} D(\eta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^2 = \text{Min.}, \\ (58) \quad F(\eta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\eta_k}{\sqrt{\lambda_k}} + p_k \right)^2 = \alpha, \\ (59) \quad G_i(\eta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\eta_k}{\sqrt{\lambda_k}} + p_k \right) v_k^{(i)} = \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, l). \end{aligned}$$

Dieses läßt die Existenz eines Lösungssystems $\eta_1, \eta_2, \dots$ leicht erkennen. Ist nämlich d die untere Grenze der Werte, welche $D(\eta)$ bei Variation der Werte unter Berücksichtigung von (58), (59) annehmen kann, so gibt es Stellen $\eta_1^{(t)}, \eta_2^{(t)}, \eta_3^{(t)}, \dots$ ($t = 1, 2, \dots$) derart, daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(\eta^{(t)}) = d$$

ist, und daß die Werte $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta_k^{(t)} = \eta_k$ existieren²³⁾. Aus $F(\eta^{(t)}) = \alpha$ und $G_i(\eta^{(t)}) = \beta_i$ folgt fast unmittelbar²⁴⁾

$$F(\eta) = \alpha, \quad G_i(\eta) = \beta_i.$$

Es ist ferner

$$D_h(\eta) = \sum_{k=1}^h \eta_k^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^h \eta_k^{(t)2} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^{(t)2} = d.$$

Daher ist auch

$$D(\eta) = \lim_{h \rightarrow \infty} D_h(\eta) \leq d.$$

Da aber notwendig $D(\eta) \geq d$ ist, so folgt $D(\eta) = d$, d. h. das Wertsystem $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$ löst unser algebraisches Minimumproblem. Nachdem die Existenz dieser Lösung erkannt ist, folgt genau wie bei endlich vielen Variablen die Existenz von nicht gleichzeitig verschwindenden, nur bis auf einen willkürlichen gemeinsamen Faktor bestimmten Konstanten $\mu_0, \lambda, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$, so daß

$$(60) \quad \mu_0 \lambda_k \xi_k + \lambda (\xi_k + p_k) + \sum_{i=1}^l \mu_i v_k^{(i)} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

bzw., wenn nicht gerade $\mu_0 \lambda_k + \lambda = 0$ ist,

$$(61) \quad \xi_k = - \frac{\sum_{i=1}^l \mu_i v_k^{(i)} + \lambda p_k}{\mu_0 \lambda_k + \lambda}$$

gilt. Wegen der Voraussetzung des Nichtverschwindens der Gramschen Determinante $\Delta\{\varphi, v_1, \dots, v_l\}$, deren Wert ja durch die Daten des Problems gegeben ist, kann die Größe μ_0 nicht verschwinden²⁵⁾. Wir dürfen also $\mu_0 = 1$ setzen. Nunmehr folgt aus (61) und (57), daß wir

²³⁾ Die Möglichkeit, aus einer Folge von Stellen mit beschränkter Quadratsumme der Koordinaten eine „konvergente Punktfolge“ auszuwählen, bildet den Inhalt des ohne weiteres auf unseren Fall übertragbaren Weierstraßschen Häufungstellensatzes. Vgl. die üblichen Darstellungen in der Theorie der quadratischen Funktionen von unendlich vielen Variablen.

²⁴⁾ Nämlich durch Berücksichtigung des Umstandes, daß die Größen λ_k mit k über alle Grenzen wachsen.

²⁵⁾ Wenn wir nämlich unter der Voraussetzung $\mu_0 = 0$ die Gleichungen (60) mit $\xi_k + p_k$ bzw. $v_k^{(i)}$ multiplizieren und über k summieren, so erhalten wir für die nicht sämtlich verschwindenden $l+1$ Größen $\lambda, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$ ein homogenes Gleichungssystem von $l+1$ Gleichungen, dessen Determinante gerade die Gramsche Determinante $\Delta\{\varphi, v_1, \dots, v_n\}$ ist; dies ist aber wegen ihres Nichtverschwindens nicht möglich.

$\xi_k = \frac{a_k}{k}$ setzen dürfen, wobei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ konvergiert. Daher wird die Reihe

$$(62) \quad \psi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k u_k(x, y)$$

wegen der Beschränktheit der Funktionen u_k absolut und gleichmäßig konvergieren; denn es ist

$$\left(\sum_{k=m}^{m'} |\xi_k u_k| \right)^2 \leq \text{Konst} \sum_{k=m}^{m'} a_k^2 \cdot \sum_{k=m}^{m'} \frac{1}{k^2}.$$

Die Reihe (62) stellt somit eine im Rechteck R stetige Funktion mit den Randwerten Null dar. Wir behaupten, daß diese Funktion das ursprüngliche Variationsproblem dieses Paragraphen löst und daß die Lösung $\varphi = p + \psi$ der Differentialgleichung

$$(63) \quad \Delta \varphi + \lambda \varphi + \sum_{i=1}^l \mu_i v_i = 0$$

genügt. Um dies zu zeigen, bilden wir mit der aus den Elementen bekannten, zu den Randwerten Null gehörigen Greenschen Funktion $G(x, y; \xi, \eta)$ des Ausdruckes Δu für das Rechteck R die Funktion

$$\psi^*(x, y) = - \int_{(R)} G(x, y; \xi, \eta) \left[\lambda \varphi(\xi, \eta) + \sum_{i=1}^l \mu_i v_i(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta.$$

Einerseits ist wegen der Grundeigenschaft der Greenschen Funktion

$$\Delta \psi^*(x, y) + \lambda \varphi(x, y) + \sum_{i=1}^l \mu_i v_i(x, y) = 0.$$

Andererseits gilt wegen der Vollständigkeitsrelation aus der Theorie der Fourierschen Reihen

$$\begin{aligned} \psi^*(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(R)} G u_k(\xi, \eta) d\xi d\eta \cdot \int_{(R)} \left[\lambda \varphi(\xi, \eta) + \sum_{i=1}^l \mu_i v_i(\xi, \eta) \right] u_k(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x, y)}{\lambda_k} \left[\lambda (\xi_k + p_k) + \sum_{i=1}^n \mu_i v_k^{(i)} \right], \end{aligned}$$

d. h. wegen (60), (62)

$$\psi^* = \psi.$$

Da nun $\Delta p = 0$ ist, so haben wir unsere Behauptungen bewiesen.

Kapitel III.

Der Existenzbeweis für die Lösungen des Eigenwertproblem.

Wir wenden uns nun, anknüpfend an Kapitel I, zur weiteren Durchführung des Existenzbeweises. Dabei dürfen wir gemäß dem im Satze des § 5 auf S. 292 ausgesprochenen Ergebnis von vornherein eine Minimalfolge der asymptotischen Dimensionszahl 1 zugrunde legen, d. h. eine Minimalfolge $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$, für welche die Relationen

$$(64) \quad \lim_{\substack{i=\infty \\ j=\infty}} D[\varphi_i - \varphi_j] = 0,$$

$$(65) \quad \lim_{\substack{i=\infty \\ j=\infty}} H[\varphi_i - \varphi_j] = 0$$

gelten

§ 9.

Eine Eigenschaft der Minimalfolgen.

Wir beweisen zunächst eine für das folgende wichtige Eigenschaft der Minimalfolgen unseres Problem: *Es kann keine Minimalfolge außerhalb eines ganz im Inneren von G liegenden Rechteckes R identisch verschwinden.* Wäre dies für die obige Minimalfolge der Fall, so könnten wir beliebig viele voneinander linear unabhängige Lösungen des Variationsproblem von § 3 konstruieren. Es sind nämlich für das Rechteck R alle Voraussetzungen des § 8 erfüllt, indem für α der Wert 1, für die β_i die Werte Null treten und sich für $\Delta\{\varphi, v_1, \dots, v_l\}$ sofort der Wert 1 ergibt. Wir können also für das Rechteck R das Variationsproblem des § 8 lösen, indem wir als Randwerte die Werte Null nehmen; da die untere Grenze bei diesem Variationsproblem mit der unteren Grenze d des ursprünglichen Problem I von § 3 wegen des identischen Verschwindens der Funktionen φ_k außerhalb R übereinstimmt, so gibt es also eine Funktion φ , für welche $D[\varphi] = d$ ist, welche außerhalb R verschwindet, die allen übrigen Bedingungen des Variationsproblem I aus § 3 genügt und welche in R die Differentialgleichung

$$\Delta \varphi + \lambda \varphi + \sum_{i=1}^l \mu_i v_i = 0$$

mit gewissen Konstanten λ, μ_i befriedigt; die Funktion φ ist also in R analytisch; sie löst überdies das Variationsproblem des § 3.

Sind nun $R', R'', R''', R^{(4)}, \dots$ weitere Rechtecke, von welchen jedes das vorangehende ganz im Inneren enthält, aber noch ganz im

Inneren von G liegt, so gehören zu diesen ebensolche Funktionen $\varphi', \varphi'', \varphi''', \dots$; alle diese Funktionen sind Lösungen unseres ursprünglichen Variationsproblem, und alle sind voneinander linear unabhängig; denn aus einer Relation $c\varphi + c'\varphi' + \dots + c^{(q)}\varphi^{(q)} \equiv 0$ mit konstanten Koeffizienten $c^{(i)}$ würde sofort folgen $c^{(q)} = 0$, da in dem zwischen $R^{(q-1)}$ und $R^{(q)}$ liegenden Gebiete die Funktionen $\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(q-1)}$ identisch verschwinden, nicht aber die Funktion $\varphi^{(q)}$. Nehmen wir q solcher Rechtecke, so haben wir in der Funktionenfolge $\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(q)}$; $\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(q)}$; $\varphi \dots$ eine Minimalfolge der Dimensionszahl $q + 1$, was nach dem Satz von § 5, S. 290 bei beliebig großem q nicht möglich ist. Somit haben wir die aufgestellte Behauptung erwiesen.

§ 10.

Konstruktion einer Grenzfunktion.

Mit Hilfe der Minimalfolge $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$, welche keineswegs selbst zu konvergieren braucht, wollen wir uns nun eine Grenzfunktion u für G konstruieren, von welcher sich dann zeigen wird, daß sie die gesuchte Lösung unseres Variationsproblem darstellt. Wir gehen dabei schrittweise vor und beginnen damit, eine *Einteilung von G in Rechtecke* zu treffen. Wir denken uns nämlich das Gebiet G derart mit einer Folge von Rechtecken $R_1, R_2, R_3, \dots$ überdeckt, daß jeder Punkt von G innerer Punkt mindestens eines Rechteckes wird und daß jedes ganz im Inneren von G liegende Gebiet G^* nur mit endlich vielen der Rechtecke R_n Punkte gemein hat. Wir können also, indem wir von einem beliebigen Rechteck der Einteilung ausgehen und an dieses der Reihe nach neue Rechtecke anhängen, deren jedes mit mindestens einem der vorangehenden gemeinsame innere Punkte besitzt, nach endlich vielen Schritten ein vorgegebenes Teilgebiet G^* überdecken.

1. Auswahl eines Rechteckes. *Es muß unter den Rechtecken jedenfalls eines, R , geben, für welches das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $\varphi_i, v_1, v_2, \dots, v_l$ bei wachsendem i oberhalb einer festen, positiven, von i unabhängigen Schranke bleibt.* Wir führen den Beweis hierfür wieder indirekt. Angenommen, es gäbe für jedes beliebige der Rechtecke bei hinreichend großem i Konstanten $c_0, c_1, \dots, c_n$ mit der Quadratsumme 1, so daß

$$H_R \left[c_0 \varphi_i - \sum_{v=1}^l c_v v_v \right]$$

beliebig klein wird, dann kann der Koeffizient c_0 nicht, absolut genommen, unter jede Grenze sinken, denn sonst wäre das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $v_1, v_2, \dots, v_l$ für R beliebig klein, d. h. aber Null, was un-

möglich ist, da die v_ν analytische, in keinem Gebiete voneinander linear abhängige Funktionen sind. Wir können also, indem wir durch c_0^2 dividieren, auf die Existenz von l mit wachsendem i absolut genommen beschränkt bleibenden, im übrigen von i abhängigen Konstanten $a_1, a_2, \dots, a_l$ schließen, derart, daß

$$(66) \quad \lim_{i=\infty} H_R \left[\varphi_i - \sum_{\nu=1}^l a_\nu v_\nu \right] = 0$$

gilt. Ist nun R' ein weiteres Rechteck, welches mit R das Gebiet B gemein hat, so muß es auch, zufolge unserer Annahme, ebensolche Konstante a'_ν geben, derart, daß

$$(67) \quad \lim_{i=\infty} H_{R'} \left[\varphi_i - \sum_{\nu=1}^l a'_\nu v_\nu \right] = 0$$

wird. Es gilt also erst recht

$$\lim_{i=\infty} H_B \left[\varphi_i - \sum_{\nu=1}^l a_\nu v_\nu \right] = 0, \quad \lim_{i=\infty} H_B \left[\varphi_i - \sum_{\nu=1}^l a'_\nu v_\nu \right] = 0,$$

und hieraus folgt in der gewohnten Weise, wenn wir $b_\nu = a_\nu - a'_\nu$ setzen,

$$\lim_{i=\infty} H_B \left[\sum_{\nu=1}^l b_\nu v_\nu \right] = 0.$$

Da nun die Funktionen v_ν in B ein positives Unabhängigkeitsmaß haben, so muß $\lim_{i=\infty} b_\nu = 0$ sein. Wir dürfen daher in (67) die Zahlen a'_ν durch a_ν ersetzen. Indem wir nun weiter durch Anhängung einer Anzahl N von Rechtecken ein vorgegebenes Teilgebiet G^* von G überdecken, schließen wir auf die Existenz von beschränkt bleibenden, noch von i abhängigen, Konstanten $a_1, a_2, \dots, a_l$, für welche

$$\lim_{i=\infty} H_{G^*} \left[\varphi_i - \sum_{\nu=1}^l a_\nu v_\nu \right] = 0,$$

der Ausdruck links in dieser Beziehung also bei hinreichend großem i beliebig klein ist. Nun können wir aber nach Hilfssatz 3 das Gebiet G^* so wählen, daß für den übrigbleibenden Teil Σ der Ausdruck $H_\Sigma[\varphi_i]$ beliebig klein wird; da die Konstanten a_ν beschränkt sind und die Ausdrücke $H_\Sigma[v_\nu]$ ebenfalls gleichzeitig mit $H_\Sigma[\varphi_i]$ beliebig klein gemacht werden können, so kann zufolge der Relationen (5), (7) aus § 1 auch $H_\Sigma \left[\sum_{\nu=1}^l a_\nu v_\nu - \varphi_i \right]$ beliebig klein gemacht werden. Es müßte daher $H_G \left[\varphi_i - \sum_{\nu=1}^l a_\nu v_\nu \right]$ selbst bei hinreichend großem i beliebig klein werden.

Nun ist aber wegen (15), (16), (18)

$$H_G \left[\varphi_i - \sum_{r=1}^l a_r v_r \right] = 1 + \sum_{r=1}^l a_r^2,$$

was ersichtlich einen Widerspruch bedeutet.

Ist nun R ein Rechteck, für welches bei gewissen beliebig groß wählbaren Werten von i das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $\varphi_i, v_1, \dots, v_l$ oberhalb einer positiven Schranke, etwa $2\gamma^2$, bleibt, so gilt entsprechendes für jeden hinreichend großen Wert von i , wie unmittelbar aus der Beziehung (65) und den Schlußbemerkungen in § 1 hervorgeht.

Wir denken uns nunmehr ein solches Rechteck R ausgewählt, für welches das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $\varphi_i, v_1, \dots, v_l$ bei wachsendem i oberhalb einer festen Schranke $2\gamma^2$ bleibt; dann gilt nach § 2 für die Gramsche Determinante die Ungleichung

$$\Delta_R \{ \varphi_i, v_1, v_2, \dots, v_l \} \geq (2\gamma^2)^{l+1} = 2b.$$

Ist nun R' ein im Inneren von R gelegenes, zu R parallel orientiertes Rechteck, dessen Seiten von den entsprechenden Seiten von R einen Abstand h besitzen, dann läßt sich zufolge des Hilfssatzes 4, S. 299, und der Beziehungen (5), (7) die Zahl h so klein wählen, daß für den zwischen R und R' liegenden Bereich B unabhängig von i die Beziehung

$$H[c_0 \varphi_i + c_1 v_1 + \dots + c_l v_l] < \gamma^2$$

gilt, wie auch immer $c_0, c_1, \dots, c_l$ unter der Bedingung $c_0^2 + \dots + c_l^2 = 1$ gewählt werden. Dann aber muß für R' gelten

$$(68) \quad H_{R'}[c_0 \varphi_i + c_1 v_1 + \dots + c_l v_l] \geq \gamma^2$$

und zufolge § 2

$$(69) \quad \Delta_{R'} \{ \varphi_i, v_1, v_2, \dots, v_l \} \geq \gamma^{2(l+1)} = e,$$

wo e eine von i unabhängige positive Schranke bedeutet. Beide Ungleichungen (68), (69) dürfen nach § 2 erst recht als gültig angesehen werden für jedes in R liegende Rechteck R'' , dessen Seiten von denen von R einen kleineren Abstand als h besitzen.

2. Vorbereitung des Konvergenzbeweises. Nach diesen Vorbereitungen „glätten“ wir die Funktion φ_i für das Rechteck R , indem wir für dieses Rechteck das Variationsproblem des § 7 lösen; hierbei sind die in § 7 als α und β , bezeichneten Größen mit den Zahlen $H_R[\varphi_i]$ bzw. $H_R[\varphi_i, v_r]$ zu identifizieren und als Randwerte f die von φ_i auf dem Rande von R angenommenen Werte zu nehmen. Da hier alle Voraussetzungen des § 7 erfüllt sind, so erhalten wir als Lösung in R eine ana-

lytische, auf dem Rande mit φ_i übereinstimmende Funktion ψ_i sowie Konstante $\lambda_i, \mu_{i,1}, \dots, \mu_{i,l}$, so daß in R die Differentialgleichung

$$(70) \quad \Delta \psi_i + \lambda_i \psi_i + \sum_{r=1}^l \mu_{i,r} v_r = 0$$

und die Beziehungen

$$(71) \quad H_R[\psi_i] = H_R[\varphi_i], \quad H_R[\psi_i, v_r] = H_R[\varphi_i, v_r], \quad D_R[\psi_i] \leq D_R[\varphi_i]$$

gelten. Wir setzen ψ_i über R hinaus in das ganze Gebiet G fort, indem wir ψ_i außerhalb R mit φ_i identifizieren; offenbar erfüllen dann die Funktionen ψ_i ($i=1, 2, 3, \dots$) alle Bedingungen des ursprünglichen Variationsproblems I aus § 3 und bilden, da aus (71) die Ungleichung $D[\psi_i] \leq D[\varphi_i]$ folgt, wieder eine Minimalfolge. Wir behaupten, daß diese „im wesentlichen“ mit der Minimalfolge der φ_i identisch ist, indem die Relationen gelten:

$$(72) \quad \lim_{i=\infty} H[\varphi_i - \psi_i] = 0,$$

$$(73) \quad \lim_{i=\infty} D[\varphi_i - \psi_i] = 0,$$

aus denen sofort auf Grund von (64), (65) die weiteren

$$(74) \quad \lim_{\substack{i=\infty \\ j=\infty}} H[\psi_i - \psi_j] = 0,$$

$$(75) \quad \lim_{\substack{i=\infty \\ j=\infty}} D[\psi_i - \psi_j] = 0$$

nach der üblichen Schlußweise folgen. Zum Beweise nehmen wir an, es gäbe beliebig große Werte $i_1, i_2, i_3, \dots$, für welche $a_k^2 = H[\varphi_{i_k} - \psi_{i_k}] > a^2$ bliebe, unter a^2 eine feste positive Konstante verstanden, dann würden

die Funktionen $\chi_k = \frac{\varphi_{i_k} - \psi_{i_k}}{a_k}$ ($k=1, 2, 3, \dots$), nach dem Satze aus § 3, S. 287, eine Minimalfolge bilden; nach dem Ergebnis von § 9 ist dies aber unmöglich, da die Funktionen χ_k sämtlich außerhalb R identisch verschwinden. Aus der so bewiesenen Gleichung (72) folgt nun mit Hilfe der Relation (21) aus § 3 in der üblichen Weise (73), womit dann auch (74) und (75) bestätigt sind.

Wir merken noch an, daß auf Grund von (71) die Ungleichungen (68), (69) sofort in

$$(68a) \quad H_R[c_0 \psi_i + c_1 v_1 + \dots + c_l v_l] \geq \gamma^2,$$

$$(69a) \quad \Delta_R' \{\psi_i, v_1, \dots, v_l\} \geq e$$

übergehen.

3. **Konvergenzbeweis für ein Rechteck.** Nunmehr wenden wir uns zum *Konvergenzbeweise für die Funktionen ψ_i im Rechteck R* , indem wir folgende Behauptung voranstellen: Die Konstanten $\mu_{i,1}, \dots, \mu_{i,l}$ und λ_i konvergieren gegen Grenzwerte $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$ und λ ; die Funktionen ψ_i konvergieren nebst ihren Ableitungen in jedem ganz innerhalb R liegenden Gebiete gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion u bzw. deren Ableitungen, für welche die Gleichung

$$(76) \quad \Delta u + \lambda u + \sum_{r=1}^l \mu_r v_r = 0$$

gilt.

Dem Beweise schicken wir die folgende Bemerkung voraus: Ist χ irgendeine in G stetige Funktion, deren Integral $D[\chi]$ existiert, so gibt es unter den zwischen R und R' gelegenen Zwischenrechtecken R'' gewiß eines, für welches die Ungleichung

$$\int_{(R'')} \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 \right] ds < 4 \frac{D[\chi]}{h}$$

gilt, wobei das Integral links um den Rand des Rechteckes R'' herumerstreckt und mit s die Bogenlänge auf diesem Rande bezeichnet werden soll.

In der Tat sei S ein Streifen, welcher aus R durch zwei Parallelen im Abstände h , etwa die Geraden $y=0$ und $y=h$ herausgeschnitten wird. Wegen

$$D_G[\chi] \geq D_S[\chi] = \int_0^h dy \int \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 \right] dx$$

muß es in dem Streifen S eine Gerade $y = \text{konst.}$ geben, für welche das über ihren ganzen Verlauf in G erstreckte Integral $\int \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 \right] dx$ einen Wert nicht größer als $\frac{D[\chi]}{h}$ besitzt; diese Überlegung, auf jedes der vier Seitenpaare von R und R' angewandt, gibt sofort die Richtigkeit unserer Behauptung. Bezeichnen wir wieder mit $\frac{\partial}{\partial \nu}$ die Differentiation nach der inneren Normale der Begrenzung von R'' , so gilt also erst recht

$$(77) \quad \int_{(R'')} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \nu} \right)^2 ds \leq 4 \frac{D[\chi]}{h}.$$

Wir wenden diese Bemerkung nunmehr an, indem wir R'' zum Index i so wählen, daß für die Funktion $\chi = \psi_i$ die Beziehung

$$(77a) \quad \int_{(R'')} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \nu} \right)^2 ds \leq 4 \frac{D[\psi_i]}{h}$$

besteht. Dann folgern wir leicht, daß die über R'' erstreckten Integrale $H_{R''}[\psi_i, \Delta\psi_i]$, $H_{R''}[v_\nu, \Delta\psi_i]$ ($\nu = 1, 2, \dots, l$) absolut genommen unterhalb einer von i unabhängigen Schranke bleiben. In der Tat ist nach der Greenschen Formel, auf R'' angewandt,

$$H_{R''}[\psi_i, \Delta\psi_i] + D_{R''}[\psi_i] = - \int_{(R'')} \psi_i \frac{\partial \psi_i}{\partial \nu} ds,$$

also

$$\{H_{R''}[\psi_i, \Delta\psi_i] + D_{R''}[\psi_i]\}^2 \leq \int_{(R'')} \psi_i^2 ds \cdot \int_{(R'')} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial r}\right)^2 ds.$$

Nun ist nach (77a) und nach Gl. (41), S. 299 jeder der beiden Faktoren rechts beschränkt, woraus wegen der Beschränktheit von $D_{R''}[\psi_i]$ für $H_{R''}[\psi_i, \Delta\psi_i]$ die behauptete Beschränktheit folgt. Für die Ausdrücke $H_{R''}[\psi_n, \Delta\psi_i]$ folgt dasselbe ganz analog aus der Gleichung

$$H_{R''}[v_n, \Delta \psi_i] = H_{R''}[\psi_i, \Delta v_n] - \int_{(R'')} \left[v_n \frac{\partial \psi_i}{\partial \nu} - \psi_i \frac{\partial v_n}{\partial \nu} \right] ds$$

und der Beschränktheit der Funktionen v_n , $\frac{\partial v_n}{\partial x}$.

Multiplizieren wir jetzt die Gleichung (70) der Reihe nach mit $\psi_i, v_1, v_2, \dots, v_l$ und integrieren wir über R'' , so ergibt sich für die $l+1$ Größen $\lambda_i, \mu_{i,1}, \dots, \mu_{i,l}$ das folgende lineare System von $l+1$ Gleichungen:

[illegible]

wobei die Integrale H stets über R'' zu erstrecken sind. Die Determinante dieses Gleichungssystems ist gerade die Gramsche Determinante $\Delta_{R''}\{\psi_i, v_1, \dots, v_i\}$, also gemäß (69a) absolut genommen größer als die feste, von i unabhängige positive Zahl ϵ ; die Koeffizienten der Gleichung sind sämtlich beschränkt, nämlich kleiner als 1; also sind auch die Lösungen $\lambda_i, \mu_{i-1}, \dots, \mu_{i-l}$ absolut genommen bei wachsendem i beschränkt.

Wir wollen nun darüber hinaus zeigen, daß sie bestimmten Grenzwerten mit wachsendem i zustreben.

gleichung (76) genügt. Diese zunächst nur für das Rechteck R definierte Funktion ist, da die Funktionen v_i analytisch vorausgesetzt wurden, selbst analytisch. Aus dieser letzten Tatsache folgt, daß das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $u, v_1, v_2, \dots, v_l$ für jedes Teilgebiet von R positiv sein muß, da sonst zwischen diesen Funktionen in diesem Teilgebiete, und somit wegen ihres analytischen Charakters überall in R eine lineare Abhängigkeit bestehen würde, was wegen der über das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $\psi_i, v_1, \dots, v_l$ gemachten Voraussetzungen (68a) nicht möglich ist. Da die ψ_i in jedem ganz im Innern von R liegenden Teilgebiete gleichmäßig gegen u konvergieren, so muß somit auch bei hinreichend großem i das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $\psi_i, v_1, v_2, \dots, v_l$ für jedes solche Teilgebiet oberhalb einer festen positiven, von i unabhängigen Schranke liegen.

4. Konvergenzbetrachtung für das ganze Gebiet. Nachdem wir die Grenzfunktion u für ein Rechteck R konstruiert haben, macht ihre Herstellung für die weiteren Rechtecke unserer Einteilung keine Schwierigkeiten mehr. Wir nehmen zunächst ein weiteres dieser Rechtecke, welches mit R ein gemeinsames Gebiet B besitzt, und bezeichnen dieses Rechteck — eine Gefahr der Verwechslung liegt nicht vor — mit R' . Auch für R' muß das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $\psi_i, v_1, v_2, \dots, v_l$ bei wachsendem i oberhalb einer positiven festen Schranke bleiben; ist nämlich B^* ein im Innern von B liegendes Teilgebiet von B , so ist, wie wir eben sahen, das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $\psi_i, v_1, \dots, v_l$ für B^* oberhalb einer festen positiven Schranke; wegen der Relation (72) folgt also das gleiche in der gewohnten Weise für die Funktionen $\varphi_i, v_1, \dots, v_l$; also gilt nach § 2 dasselbe erst recht für das Unabhängigkeitsmaß dieser Funktionen in R' .

Wir können also für R' genau dieselben Überlegungen anstellen wie eben für R und erhalten so in R' Funktionen ψ'_i, u' sowie Konstanten $\lambda'_i, \mu'_{i,r}; \lambda', \mu'_r$, zwischen denen alle Relationen bestehen, welche sich aus (76), (72), (73), (74), (75) bei Ersetzung der Zeichen $\psi_i, u, \lambda_i, \dots$ durch $\psi'_i, u', \lambda'_i, \dots$ ergeben. Wir wollen zeigen, daß $\lambda' = \lambda, \mu'_r = \mu_r$ ist und daß in dem gemeinsamen Gebiete B die Funktionen u und u' identisch sind, so daß also u' die analytische Fortsetzung von u bildet. Dies ergibt sich leicht folgendermaßen: Es ist wegen $\lim_{i \rightarrow \infty} H_{R'}[\psi'_i - \varphi_i] = 0$, $\lim_{i \rightarrow \infty} H_R[\psi_i - \varphi_i] = 0$ erst recht $\lim_{i \rightarrow \infty} H_{B^*}[\psi'_i - \varphi_i] = 0$, $\lim_{i \rightarrow \infty} H_{B^*}[\psi_i - \varphi_i] = 0$, also auch $\lim_{i \rightarrow \infty} H_{B^*}[\psi'_i - \psi_i] = 0$. Da nun in B^* die Funktionen ψ_i, ψ'_i gleichmäßig gegen u bzw. u' konvergieren, so folgt $H_{B^*}[u - u'] = 0$ d. h. es ist in B^* u' mit u identisch.

Subtrahieren wir nun die für B^* geltende Gleichung (76) und die entsprechende Gleichung für die gestrichenen Größen, indem wir $u' = u$ einsetzen, so folgt

$$(\lambda - \lambda')u + \sum_{v=1}^l (\mu_v - \mu'_v)v_v = 0;$$

da aber die Funktionen $u, v_1, \dots, v_l$ in B^* linear unabhängig sind, so ist $\lambda = \lambda', \mu_v = \mu'_v$, und somit haben wir den gewünschten Nachweis erbracht.

Gehen wir in derselben Art von Rechteck zu Rechteck weiter, so gelangen wir zu einer überall im Innern von G analytischen, der Differentialgleichung (76) genügenden Funktion, von der wir nun zu zeigen haben, daß sie tatsächlich die gesuchte Lösung unseres Variationsproblems ist.

§ 11.

Die Eigenschaften der Grenzfunktion.

Wir haben zu diesem Zwecke nachzuweisen:

1. Daß u den Bedingungen

$$H[u] = 1, \quad H[u, v_\nu] = 0, \quad (\nu = 1, 2, \dots, l)$$

genügt,

2. daß $D[u] = d$ ist, und
3. daß u die Randwerte Null besitzt.

Um die beiden ersten Punkte zu beweisen, beachten wir, daß für jedes im Innern eines der Rechtecke R liegende Teilgebiet B^* wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen φ_i und ihrer Ableitungen aus (72) und (73) die Gleichungen

$$\lim_{i=\infty} D_{B^*}[\varphi_i - u] = 0, \quad \lim_{i=\infty} H_{B^*}[\varphi_i - u] = 0$$

folgen. Da wir jedes ganz im Innern von G liegende Gebiet G^* durch eine endliche Anzahl sich lückenlos aneinanderschließender Gebiete B^* bedecken können, so folgt hieraus auch

$$\lim_{i=\infty} D_{G^*}[\varphi_i - u] = 0, \quad \lim_{i=\infty} H_{G^*}[\varphi_i - u] = 0.$$

Aus den Gleichungen (9), (10) des § 1 ergibt sich nun sofort für jedes solche Gebiet

$$\lim_{i=\infty} D_{G^*}[\varphi_i] - D_{G^*}[u] = 0, \quad \lim_{i=\infty} H_{G^*}[\varphi_i] - H_{G^*}[u] = 0.$$

Weiter gilt für das ganze Gebiet G $\lim_{\substack{i=\infty \\ j=\infty}} D[\varphi_i - \varphi_j] = 0$, so daß dieser

Ausdruck bei hinreichend großem i und j kleiner als eine beliebig kleine

positive Zahl ε wird; es ist also erst recht für alle solche i und j , gleichmäßig für alle Teilgebiete G^* , $D_{G^*}[\varphi_i - \varphi_j] < \varepsilon$, und hier können wir nach den obigen Ausführungen den Grenzübergang zu $j = \infty$ machen, so daß wir gleichmäßig für alle Teilgebiete G^* erhalten $D_{G^*}[\varphi_i - u] < \varepsilon$. Da hierin wieder G^* beliebig genau mit G zusammenfallend genommen werden kann, so folgt $D_G[\varphi_i - u] < \varepsilon$, und somit nach Gleichung (10) des § 1 $\lim_{i=\infty} D[\varphi_i] - D[u] = 0$, d. h. wegen $\lim_{i=\infty} D[\varphi_i] = d$

$$D[u] = d,$$

womit Punkt 2 erwiesen ist.

Ganz ebenso schließen wir bei Ersetzung des Zeichens D durch das Zeichen H , daß

$$\lim_{i=\infty} H[\varphi_i - u] = 0, \quad H[u] = 1$$

wird. Aus

$$H[u, v_r]^2 = H[u - \varphi_i, v_r]^2 \leq H[u - \varphi_i] \cdot H[v_r]$$

ergibt sich nun unmittelbar $H[u, v_r] = 0$; hiermit ist auch Punkt 1 bewiesen.

Um nun noch drittens zu zeigen, daß u die Randwerte Null besitzt, betrachten wir einen Punkt P in G , welcher vom Rande und zwar vom Randpunkt Q den kürzesten Abstand ε besitzt, und schlagen um P mit ε den Kreis C . Auf Grund von Gleichung (38), § 6 schließen wir

$$H_C[\varphi_i] \leq 4\varepsilon^2 \cdot D_K[\varphi_i] \cdot 4\pi^2,$$

wobei K das Teilgebiet von G ist, welches in einem Kreise mit dem Radius 2ε um den Randpunkt Q liegt, und hier dürfen wir dem Obigen zufolge den Grenzübergang für $i = \infty$ machen, indem wir einfach φ_i durch u ersetzen; wir haben also

$$H_C[u] \leq 4\varepsilon^2 \cdot 4\pi^2 \cdot D_K[u] < \varepsilon^2 \delta(\varepsilon),$$

wobei $\delta(\varepsilon)$ eine mit ε gegen Null konvergierende Größe ist.

Weiter setzen wir in C

$$\omega = \iint_{(C)} K(\lambda r) f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

wobei wieder $K(\lambda r)$ wie in § 7 die Besselsche Funktion zweiter Art des Argumentes $\lambda \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ ist, $f = \sum_{v=1}^i \mu_v v$, gesetzt wird, und das Integral über die Kreisfläche C erstreckt werden soll. Nach § 7 gilt in C

$$\Delta \omega + \lambda \omega + f = 0.$$

Ferner wird überall in C

$$\omega^2 \leq \iint K(\lambda r)^2 f^2 d\xi d\eta \cdot \varepsilon^2 \pi < A^2 \cdot \varepsilon^2 \pi,$$

wo A eine für alle ε gleichzeitig wählbare Konstante ist; also wird

$$H_C[\omega] < A^2 \varepsilon^4 \cdot \pi^2.$$

Jedenfalls strebt also ω mit ε gleichmäßig gegen Null. Für die Differenz $\chi = u - \omega$ gilt weiter

$$H_C[\chi] = H_C[u] + H_C[\omega] - 2H_C[u, \omega] < \varepsilon^2 \delta(\varepsilon) + \varepsilon^4 \pi^2 A^2 + 2\varepsilon^3 \pi A \sqrt{\delta(\varepsilon)},$$

also ist auch

$$H_C[\chi] < \varepsilon^2 \delta'(\varepsilon),$$

wo $\delta'(\varepsilon)$ eine mit ε gegen Null strebende Größe ist.

Nun genügt χ der Differentialgleichung $\Delta \chi + \lambda \chi = 0$, und der Wert von χ im Punkte P wird nach dem schon in § 7 benutzten Mittelwertsatz durch die Gleichung

$$\chi \cdot \int_0^\varepsilon J(\lambda r) r dr = \iint_{(C)} \chi dx dy$$

gegeben, wo $J(\lambda r)$ wieder die nullte Besselsche Funktion von λr bedeutet. Also wird zufolge der Schwarzschen Ungleichung

$$\chi^2 \cdot \left(\int_0^\varepsilon J(\lambda r) r dr \right)^2 < \varepsilon^2 \pi \cdot \varepsilon^2 \delta'(\varepsilon),$$

und da wegen $J(0) = 1$ bei hinreichend kleinem ε

$$\int_0^\varepsilon J(\lambda r) r dr > \frac{1}{4} \varepsilon^2$$

ist, folgt sofort, daß χ mit ε gleichmäßig gegen Null konvergiert. Somit ist das gleiche auch für die Summe $u = \omega + \chi$ bewiesen.

Die Funktion u ist also eine Lösung unseres Variationsproblems. Zur Lösung des ursprünglich in dieser Arbeit gestellten Eigenwertproblems gelangen wir nun einfach durch *Spezialisierung der Funktionen v_r* . Wir wollen annehmen, daß die Funktionen v_r Differentialgleichungen der Form $\Delta v_r + \lambda_r v_r = 0$ genügen, die Randwerte Null haben, und endliche Integrale $D[v_r]$ besitzen (die übrigens dann notwendig gleich λ_r sein müssen). Dann behaupten wir, daß auch u ebenso wie die v_r eine Eigenfunktion unseres Problems sein muß, d. h. daß die Werte μ_r sämtlich verschwinden und die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ gilt. In der Tat brauchen wir nur die Differentialgleichung (76) mit v_r zu multiplizieren und über G zu integrieren. Wegen (18) erhalten wir

$$\mu_r = -H[v_r, \Delta u].$$

Die rechte Seite dürfen wir auf Grund von § 6 nach der Greenschen Formel umformen und erhalten

$$\mu_\nu = -H[u, \Delta v_\nu],$$

und dieser Ausdruck wird wegen $\Delta v_\nu + \lambda_\nu v_\nu = 0$ und (16) Null. Ebenso finden wir nach Multiplikation von (76) mit u und Integration

$$D[u] = d = \lambda.$$

Wir haben damit das Eigenwertproblem der Differentialgleichung (1) gelöst. Die erste Eigenfunktion u_1 und den ersten Eigenwert λ_1 erhalten wir, indem wir $l = 0$ nehmen, d. h. gar keine Nebenbedingung der Form (16) stellen; der zweite Eigenwert λ_2 und die zweite Eigenfunktion u_2 ergeben sich, wenn wir $l = 1$ und $v_1 = u_1$ setzen; indem wir so sukzessive weitergehen, erhalten wir die unendliche Serie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, u_1, u_2, u_3, \dots$ der Eigenwerte und Eigenfunktionen.

§ 12.

Vollständigkeit der Lösung.

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß die so definierten Eigenfunktionen ein vollständiges orthogonales Funktionensystem für G bilden. Dies ergibt sich leicht aus dem Umstande, daß zufolge der Überlegungen von § 5 mit wachsendem p der Eigenwert λ_p über alle Grenzen wachsen muß; sonst würde nämlich wegen $\lambda_{p+1} \geq \lambda_p$ der Grenzwert $\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_p = \lambda$ existieren, und daher würde in dem dort als Problem II bezeichneten Variationsproblem die untere Grenze des Ausdruckes $D[o]$ bei wachsendem p höchstens die Größenordnung p haben, wie man erkennt, wenn man $o' = u_1, o'' = u_2, \dots, o^{(p)} = u_p$ einsetzt; diese untere Grenze muß aber, wie wir sahen, die Größenordnung p^2 haben.

Es sei nun ψ irgendeine in G stetige Funktion mit stückweise stetigen ersten Ableitungen, endlichem $D[\psi]$ und verschwindenden Randwerten; wir behaupten, daß, wenn $c_i = H[\psi, u_i]$ gesetzt wird, die Gleichung

$$(79) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H\left[\psi - \sum_{i=1}^n c_i u_i\right] = 0$$

gilt. Es ist nämlich

$$H\left[\psi - \sum_{i=1}^n c_i u_i\right] = H[\psi] - \sum_{i=1}^n c_i^2 = a_n^2,$$

wo a_n^2 eine mit n monoton abnehmende Zahl ist; ist $a^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2$ positiv, so wird die Funktion

$$\varphi = \frac{1}{a_n} \left[\psi - \sum_{i=1}^n c_i u_i \right]$$

den Bedingungen $H[\varphi] = 1$, $H[\varphi, u_i] = 0$ ($i = 1, \dots, n$), ($l = n$) des Variationsproblemes in § 3 genügen und am Rande verschwinden; es muß also $D[\varphi] \geq \lambda_{n+1}$ sein. Andererseits ist, wie durch die erlaubte Anwendung der Greenschen Formel folgt,

$$\alpha_n^2 D[\varphi] = D[\psi] + \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n c_i D[\psi, u_i] = D[\psi] - \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2,$$

d. h. $\alpha_n^2 D[\varphi] \leq D[\psi]$ oder erst recht $\alpha^2 D[\varphi] \leq D[\psi]$, was bei hinreichend großem n in Widerspruch mit $D[\varphi] \geq \lambda_{n+1}$ steht. Folglich ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^2 = 0$.

Mithin ist bewiesen, daß jede in G stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion ψ mit verschwindenden Randwerten und endlichem Integral $D[\psi]$ sich im Sinne des mittleren Fehlerquadrates beliebig genau durch ein lineares Aggregat der u_i approximieren läßt. Da man jede in G stetige Funktion ψ^* durch eine solche Funktion ψ im angegebenen Sinne beliebig genau approximieren kann, so ist damit die gleiche Eigenschaft für ψ^* bewiesen, und diese Eigenschaft bedeutet gerade die Vollständigkeit des Funktionensystemes der u_i .

Kapitel IV.

Die numerische Berechnung der Lösungen.

Aus den soeben durchgeführten Betrachtungen unseres Existenzbeweises, insbesondere den Ausführungen von Kapitel I, erhalten wir gleichzeitig die Mittel zu einer *wirklich numerischen Konstruktion* der gesuchten Lösung. Hierbei kommt es wesentlich darauf an, ein Verfahren zur numerischen Konstruktion der Minimalfolgen zu geben. Zu diesem Zwecke gehen wir mit W. Ritz²⁶⁾ von einem fest gewählten System von „Koordinatenfunktionen“ $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ in G aus, welche folgende Eigenschaften besitzen: Alle Funktionen ω_i sind nebst ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung in G stetig und verschwinden am Rande; ist φ eine in G stetige, am Rande verschwindende Funktion mit stückweise stetigen ersten Ableitungen und endlichem Integral $D[\varphi]$, dann läßt sich eine lineare Kombination $\varphi^{(n)} = c_1 \omega_1 + c_2 \omega_2 + \dots + c_n \omega_n$ von endlich vielen der Koordinatenfunktionen so finden, daß gleichzeitig $H[\varphi - \varphi^{(n)}]$ und $D[\varphi - \varphi^{(n)}]$ beliebig klein werden (Vollständigkeitseigenschaft). Solche Funktionen lassen sich grundsätzlich für jedes Gebiet in mannigfacher Weise angeben; im speziellen Falle besteht die praktische Aufgabe nicht zuletzt darin, mit dem richtigen Takt das Funktionensystem der ω_i so zu wählen, daß die Durchführung der numerischen Rechnung nicht allzu mühsam wird.

²⁶⁾ Vgl. loc. cit. 1).

Setzen wir in unserem ursprünglichen Variationsproblem für φ eine Funktion $\varphi^{(n)} = \sum_{\nu=1}^n c_\nu \omega_\nu$ mit noch unbestimmten Koeffizienten $c_1, c_2, \dots, c_n$ ein, so geht das Variationsproblem in ein Minimumproblem der gewöhnlichen Differentialrechnung über; die Funktionen $\varphi^{(n)}$, welche durch Lösung dieses Minimumproblem es entstehen, müssen wegen der Vollständigkeit der ω_i mit wachsendem n eine Minimalfolge des Variationsproblem es bilden.

Wir wollen jedoch, indem wir uns auf das eigentliche Eigenwertproblem beschränken, zeigen, wie man durch eine kleine naheliegende Modifikation des Verfahrens mit einem Schlage zu *allen* Eigenwerten und Eigenfunktionen gelangen kann. Zu diesem Zwecke machen wir der bequemerem Schreibweise halber die sonst unwesentliche Voraussetzung, daß die Funktionen ω_i ein normiertes Orthogonalsystem bilden, d. h. den Beziehungen $H[\omega_i] = 1$, $H[\omega_i, \omega_j] = 0$ ($i \neq j$) genügen. Wir setzen nun das Problem so an, als handelte es sich nur um die Berechnung des ersten Eigenwertes und der ersten Eigenfunktion, indem wir fordern

$$D[\varphi] = \text{Min},$$

während

$$H[\varphi] = 1$$

ist. Der Wert des Minimums ist, wie wir wissen, gleich λ_1 . Setzen wir nun in $D[\varphi]$, $H[\varphi]$ statt φ eine Funktion $\varphi^{(n)} = c_1 \tilde{\omega}_1 + c_2 \tilde{\omega}_2 + \dots + c_n \tilde{\omega}_n$ ein, so erhalten wir folgendes algebraische Problem:

Die quadratische Form

$$D_n = \sum_{\nu, \mu=1}^n c_\nu c_\mu A_{\nu\mu} \quad (A_{\nu\mu} = D[\omega_\nu, \omega_\mu])$$

soll durch geeignete Wahl der n Variablen c_i unter der Nebenbedingung

$$(80) \quad \sum_{\nu=1}^n c_\nu^2 = 1$$

zum Minimum gemacht werden. Hieraus folgt für die c_i das Gleichungssystem

$$(81) \quad \sum_{k=1}^n A_{ik} c_k = \lambda c_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

wobei die Größe $\lambda = \lambda_1^{(n)}$ als die kleinste der durchweg positiven Wurzeln der Gleichung n -ten Grades

$$(82) \quad R_n(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

bestimmt werden muß; der gesuchte Minimalwert von D_n ist gleich $\lambda_1^{(n)}$. Wir bezeichnen die Wurzeln der Gleichung (82), nach wachsender Größe geordnet, mit $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \lambda_3^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}$; dann lassen sich die Gleichungen (81) für $\lambda = \lambda_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) durch ein Wertsystem $c_{1,i}, c_{2,i}, \dots, c_{n,i}$ erfüllen, wobei die $c_{h,i}$ ein orthogonales Zahlenschema bilden, d. h. den Relationen

$$(83) \quad \sum_{h=1}^n c_{h,i}^2 = 1, \quad \sum_{h=1}^n c_{h,i} c_{h,j} = 0 \quad (i \neq j)$$

genügen.

Wir setzen

$$(84) \quad \varphi_i^{(n)} = \sum_{h=1}^n c_{h,i} \omega_h \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

und behaupten dann folgenden Satz: *Ist $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ das vollständige System der nach der Größe geordneten Eigenwerte, $u_1, u_2, u_3, \dots$ das entsprechende vollständige System der Eigenfunktionen unseres Differentialgleichungsproblem, so wird zunächst*

$$(85) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^{(n)} = \lambda_i;$$

ferner wird, wenn λ_i ein einfacher Eigenwert der Differentialgleichung ist, bei geeigneter Wahl des Vorzeichens von $\varphi_i^{(n)}$

$$(86) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H[\varphi_i^{(n)} - u_i] = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D[\varphi_i^{(n)} - u_i] = 0;$$

ist $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{i+r-1}$ ein r -facher Eigenwert, so gelten ebenfalls Gleichungen

$$(87) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H[\psi_j^{(n)} - u_j] = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D[\psi_j^{(n)} - u_j] = 0 \quad (j = i, i+1, \dots, i+r-1),$$

wobei die $\psi_j^{(n)}$ aus den $\varphi_i^{(n)}, \varphi_{i+1}^{(n)}, \dots, \varphi_{i+r-1}^{(n)}$ durch eine geeignete orthogonale Substitution hervorgehen²⁷⁾.

Der Beweis dieser Behauptungen, welche eine Rechtfertigung des nach Ritz genannten Verfahrens für unser Problem darstellen, folgt sehr leicht auf Grund der Untersuchungen von Kapitel I. Seien zunächst $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{i-1}$ einfache Eigenwerte, dann müssen ersichtlich alle zugehörigen Minimalfolgen die asymptotische Dimensionszahl 1 haben; denn sonst würden wir auf Grund von Kapitel I und III sofort mehrere zueinander orthogonale Eigenfunktionen für einen Eigenwert erhalten. Wir betrachten zuerst λ_1 ,

²⁷⁾ Man vergleiche zu diesem Satze eine schon am 15.12.1919 vorgelegte Note von M. Plancherel in den Comptes Rendus, wo ohne Beweis ein ganz analoges Resultat ausgesprochen wird; die Formulierung bei Herrn Plancherel scheint mir übrigens im Falle mehrfacher Eigenwerte eine kleine Ungenauigkeit zu enthalten.

der ja stets ein einfacher Eigenwert sein muß. Daß die Werte $\lambda_1^{(n)}$ bei zunehmendem n gegen λ_1 konvergieren müssen, ist wegen der Vollständigkeitseigenschaften der ω_i offenbar; denn man kann $D[\varphi_n]$ bei hinreichend großem n stets unter Innehaltung der Bedingung $H[\varphi_n] = 1$ beliebig nahe an die untere Grenze λ der Werte $D[\varphi]$ bringen. Also bilden die Funktionen $\varphi_1^{(n)}$ eine Minimalfolge des Variationsproblems aus § 3 für $l = 0$, und es ergibt sich bei geeigneter Vorzeichenwahl nach § 5 direkt

$$(86a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H[\varphi_1^{(n)} - u_1] = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D[\varphi_1^{(n)} - u_1] = 0.$$

Um nun zu beweisen, daß auch

$$(85a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2^{(n)} = \lambda_2$$

ist, beachten wir, daß die Funktion $\varphi_2^{(n)}$ das Minimum von D_n unter der Nebenbedingung $H[\varphi^{(n)}] = 1$, sowie der weiteren Bedingung $H[\varphi^{(n)}, \varphi_1^{(n)}] = 0$ liefert. Nehmen wir nun an, in der Entwicklung von u_1 nach den ω_i sei der erste Entwicklungskoeffizient $H[u_1, \omega_1]$ nicht Null (gleichviel ob diese Entwicklung konvergiert oder nicht, so läßt sich dies jedenfalls durch Umpumerieren stets erreichen), dann können wir uns aus jeder der Gleichung $H[\varphi^{(n)}, \varphi_1^{(n)}] = 0$ genügenden Funktion $\varphi^{(n)}$ durch Addition einer Funktion der Form $a_1 \omega_1$ sofort eine Funktion $\overline{\varphi^{(n)}}$ herstellen, welche der Bedingung $H[\overline{\varphi^{(n)}}, u_1] = 0$ genügt. Hierbei bedeutet, wie festgesetzt, der obere Index n , daß die betreffenden Funktionen lineare Kombinationen der n ersten Funktionen ω_i sind.

Wegen der Gleichung (85) ist $H[\varphi_1^{(n)}, \omega_1]$ bei hinreichend großem n beliebig wenig von $H[u_1, \omega_1]$ verschieden, und daher wird bei hinreichend großem n sich a_1 beliebig wenig von Null, $H[\overline{\varphi^{(n)}}]$ beliebig wenig von $H[\varphi^{(n)}]$ und $D[\overline{\varphi^{(n)}}]$ beliebig wenig von $D[\varphi^{(n)}]$ unterscheiden; indem wir die Funktion $\overline{\varphi^{(n)}}$ mit einem, bei hinreichend großem n von 1 beliebig wenig verschiedenen Faktor multiplizieren, erhalten wir eine Funktion $\widetilde{\varphi^{(n)}}$, welche noch der Bedingung $H[\widetilde{\varphi^{(n)}}] = 1$ genügt.

Genau den entsprechenden Übergang können wir in umgekehrter Richtung machen, indem wir von einer Funktion, welche der Gleichung $H[\varphi^{(n)}, u_1] = 0$ genügt, zu einer andern $\widetilde{\varphi^{(n)}}$ übergehen, welche die Bedingung $H[\widetilde{\varphi^{(n)}}, \varphi_1^{(n)}] = 0$ befriedigt. Aus der Vollständigkeit des Funktionensystemes der ω_i ergibt sich nun sofort, daß die Funktionen $\widetilde{\varphi^{(h)}}$ ($h = 2, 3, 4, \dots$) eine Minimalfolge des ursprünglichen Variationsproblems für $n = 1$, $v_1 = u_1$ bilden; denn man kann infolge der Vollständigkeitseigenschaft gewiß eine Minimalfolge der Gestalt $\varphi^{(h)}$ ($h = 2, 3, 4, \dots$) zugrunde legen, und nach dem eben Ausgeführten bei beliebig geringer Veränderung des Wertes

von $D[\varphi^{(h)}]$ zu einer der Bedingung $H[\tilde{\varphi}^{(h)}, \varphi_1^{(h)}] = 0$ genügenden Funktion übergehen; für die Funktion $\varphi_2^{(h)}$ wird aber $\lambda_2^{(h)} = D[\varphi_2^{(h)}] \leq D[\tilde{\varphi}^{(h)}]$; ebenso schließt man in umgekehrter Richtung. Hieraus folgt unmittelbar, daß wirklich $\lim_{h \rightarrow \infty} \lambda_2^{(h)} = \lambda_2$ ist, und daß die Funktionen $\varphi_2^{(h)}$ ($h = 2, 3, \dots$)

wenigstens im erweiterten Sinne eine Minimalfolge des Variationsproblems bilden. Ist λ_2 ein einfacher Eigenwert der Differentialgleichung, so können wir wiederum schließen, daß diese Minimalfolge die Dimensionszahl 1 hat, woraus wir die Gültigkeit von (85), (86) für $i = 2$ entnehmen dürfen.

In derselben Weise können wir fortfahren, solange es sich um einfache Eigenwerte handelt. Ist dagegen λ_i ein r -facher Eigenwert, so betrachten wir das Variationsproblem II aus Kap. I § 5, indem wir $l = i - 1$, $p = r$ nehmen und $v_1 = u_1, \dots, v_l = u_l$ setzen. Die untere Grenze bei diesem Variationsproblem, bzw. das wirklich angenommene Minimum ist gleich $r \cdot \lambda_i$; andererseits bilden, wie genau nach dem obigen Muster folgt, die Funktionensysteme $\varphi_i^{(h)}, \varphi_{i+1}^{(h)}, \dots, \varphi_{i+r-1}^{(h)}$ ($h = i + r, i + r - 1, \dots$) eine Minimalfolge im weiteren Sinne von Funktionensystemen für das Problem II; hieraus folgt wie oben, daß die Summe $\lambda_i^{(h)} + \lambda_{i+1}^{(h)} + \dots + \lambda_{i+r-1}^{(h)}$ gegen $r \lambda_i$ konvergieren muß; da nun genau wie oben sich $\lim_{h \rightarrow \infty} \lambda_i^{(h)} = \lambda_i$ ergibt, andererseits

$\lambda_{i+1}^{(h)} \geq \lambda_i^{(h)}$ ist, so wird $\lim_{h \rightarrow \infty} \lambda_{i+1}^{(h)} = \lambda_i, \dots, \lim_{h \rightarrow \infty} \lambda_{i+r-1}^{(h)} = \lambda_i$. Die Funktionen $\varphi_i^{(h)}, \dots, \varphi_{i+r-1}^{(h)}$ ($h = i + r, i + r + 1, \dots$) bilden eine Funktionsfolge der Dimensionszahl r ; da es keine Minimalfolge der Dimensionszahl $r + 1$ geben kann, wenn der Eigenwert λ_i , wie wir annehmen wollen, nicht eine größere Vielfachheit als r besitzt, so folgt aus § 5 unmittelbar die in den Gleichungen (87) ausgesprochene Behauptung.

Hiermit ist für das Ritzsche Verfahren, soweit es sich um die Eigenfunktionen handelt, keineswegs die Konvergenz im üblichen Sinne, sondern nur die viel weniger besagende „mittlere Konvergenz“ nachgewiesen; in der Tat kann man nicht mehr erwarten, wenigstens nicht, wenn man keine weiteren einschränkenden Bedingungen über die Funktionen ω_i stellt.

Man kann jedoch folgendermaßen in einfacher Weise von den Funktionen $\varphi_i^{(h)}$ zu Funktionen $\chi_i^{(h)}$ gelangen, welche selbst gegen die betreffenden Eigenfunktionen konvergieren, und kann sogar zugleich Entsprechendes noch für die ersten Ableitungen erreichen: Es sei R eine Zahl, für welche $\int_0^R J(\lambda_i^{(h)} r) r dr = a_i^{(h)}$ bei wachsendem h oberhalb einer festen positiven Schranke bleibt, die ihrerseits ebenso wie R beliebig klein genommen werden kann; es sei P ein Punkt in G , der vom Rande einen Abstand größer als R hat, K_R der um P mit dem Radius R geschlagene Kreis;

dann konvergieren mit wachsendem h die Funktionen $\frac{1}{a_i^{(h)}} \iint_{(K_R)} \varphi_i^{(h)} dx dy = \chi_i^{(h)}$

sowie die Funktionen $\frac{1}{a_i^{(h)}} \iint_{(K_R)} \frac{\partial \varphi_i^{(h)}}{\partial x} dx dy$ und $\frac{1}{a_i^{(h)}} \iint_{(K_R)} \frac{\partial \varphi_i^{(h)}}{\partial y} dx dy$ in dem so

definierten Teilgebiete gleichmäßig gegen u_i bzw. $\frac{\partial u_i}{\partial x}$ und $\frac{\partial u_i}{\partial y}$; gegebenenfalls ist hierbei die Funktion $\varphi_i^{(h)}$ durch $\psi_i^{(h)}$ zu ersetzen.

Der Beweis folgt unmittelbar aus dem Mittelwertsatz; es ist danach z. B.

$$u_i \cdot a_i = u_i \int_0^R r J(\lambda_i r) dr = \iint_{(K_R)} u_i dx dy,$$

woraus sich

$$(u_i a_i - \chi_i a_i^{(h)})^2 \leq H_{K_R} [u_i - \varphi_i^{(h)}] \cdot R^2 \pi$$

ergibt. Analog schließt man für die Ableitungen, indem man das Zeichen H durch D ersetzt. Natürlich wird man in der numerischen Rechnung a_i statt $a_i^{(h)}$ nehmen.

Will man höhere Ableitungen der u_i aus den entsprechenden Ableitungen der $\varphi_i^{(h)}$ approximativ berechnen, so muß man den hier angewandten Prozeß der Mittelbildung entsprechend öfter anwenden.

Wie man aus den voranstehenden Ausführungen leicht entnehmen kann, enthalten diese auch die Hilfsmittel für eine Abschätzung der Fehler bei der numerischen Rechnung, doch kann darauf hier nicht weiter eingegangen werden. Es sei nur noch bemerkt, daß man sich leicht von der Beziehung $\lambda_i^{(h+1)} \leq \lambda_i^{(h)}$ überzeugt²⁸⁾, was für die Praxis eine nützliche Handhabe geben mag.

²⁸⁾ Diese folgt sofort aus der Maximum-Minimum-Definition der Werte $\lambda_i^{(h)}$ und dem Umstand, daß die quadratische Form D_h aus D_{h+1} hervorgeht; indem wir für die Variable c_{h+1} die Bedingung $c_{h+1} = 0$ stellen.