Tonhöhe Helmholtz¹⁾ angibt. $2R = 15,4$ cm, $n_0 = 198$ pro Secunde. Für k wähle ich den Stefan'schen²⁾ Werth 0,000 055 8 im Centimeter-Secunden-Maasse. C sei 0,2375, $\rho_0 = 1/770$.

Die Verminderung der Schwingungszahl beträgt dann 0,132 Einheiten pro Secunde. Nicht so gering ist der Antheil der Wärmeleitung an dem Verklingen des Tones.

Es beträgt das logarithmische Decrement infolge der Wärmeleitung für diesen Resonator:

$$2\pi \cdot 0,132.$$

Berechnet man das logarithmische Decrement infolge der Abgabe von Wellen nach aussen, so findet man durch Integration der Gleichung:

$$\frac{d^2 \varphi_0}{dt^2} + \frac{\pi a^2 m}{V} \varphi_0 - \frac{m}{2a} \cdot \frac{d^3 \varphi_0}{dt^3} = 0$$

für dasselbe den Werth $2\pi \cdot \pi^2 n_0^4 V/a^3$, was im gegenwärtigen Falle $2\pi \cdot 0,792$ ausmacht.

Brünn, den 2. December 1880.

V. *Einige Anwendungen des Dispersionsgesetzes auf durchsichtige, halbdurchsichtige und undurchsichtige Mittel; von E. Ketteler.*

Die Begründung der sogenannten anomalen Dispersion hat selbstverständlich die frühere Dispersionstheorie haltlos gemacht, denn dass es in der Natur Erscheinungen geben sollte, die nur mittelst der Vorstellungen Cauchy's über Discontinuität und Wirkungssphäre der Aethertheilchen, und andere, die nur mittelst der gegenwärtigen Annahmen über die Wechselwirkung der Aether- und Körpermaterie erklärt werden könnten, wäre doch gar zu ungeheuerlich. Wenn nichtsdestoweniger vor kurzem Hr. v. Lang³⁾ die Cauchy'sche

1) Helmholtz, Tonempfindungen.

2) Meyer, Kinetische Theorie der Gase.

3) v. Lang, Wien. Ber. 81. p. 1. 1880.

Doppelbrechungstheorie aus dem Grunde für so wichtig hält, weil sie im Gegensatz zur Fresnel'schen die Dispersion erkläre, und wenn ganz neuerlich die Herren Lorenz und Prytz¹⁾ an das von ersterem vor Jahren auf Grundlage der früheren Ideen entwickelte „Refraktionsäquivalent“ wieder anknüpfen, so dürfte ein kurzer Aufsatz unter obigem Titel nicht gerade unangemessen erscheinen. Ich hoffe, darin zeigen zu können, dass ein und dasselbe Gesetz für alle Medien gilt, ganz unabhängig von deren physikalischer oder chemischer Constitution. Zu dem Ende werden nicht bloß die auf dioptrischem Wege gewonnenen — und zwar hier sowohl die photometrischen wie die spectrometrischen — Erfahrungsergebnisse verarbeitet werden müssen, sondern es werden nicht minder auch die Daten der katoptrischen Methoden (der elliptischen Polarisation) herbeizuziehen sein.

Dem vorerwähnten Gesetze lege ich die Form zu:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} a^2 - b^2 - 1 &= \sum \frac{D \lambda_m^2 (\lambda^2 - \lambda_m^2)}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + g^2 \lambda^2}, \\ 2ab &= \sum \frac{D \lambda_m^2 g \lambda}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + g^2 \lambda^2} \end{aligned} \right.$$

und haben die darin vorkommenden Bezeichnungen die frühere Bedeutung. Im Folgenden soll abkürzungsweise $D \lambda_m^2 = \mathfrak{D}$ geschrieben werden. Unterscheiden wir drei Classen von Mitteln.

1) Die durchsichtigen Mittel. Bedeutung des constanten Gliedes der Cauchy'schen Formel. Die von mir im Jahre 1870 aufgestellte vierconstantige Dispersionsformel, die den damaligen theoretischen Vorstellungen in jeder Weise genügte, hat sich als praktisch so brauchbar erwiesen, dass sie gegenwärtig auch von französischen Physikern benutzt wird.²⁾ Wenn ich freilich eine zeitlang glaubte, sie

1) Lorenz u. Prytz, Wied. Ann. 11. p. 70 u. 104. 1880.

2) Ketteler, Pogg. Ann. 140. p. 49. 1870. Sie hat die Form:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{A}{B - l^2} + \frac{C}{l^2 - D},$$

unter n den Brechungsexponenten und unter $l (= \lambda/n)$ die innere Wellenlänge verstanden, und ist $B > l > D$. Schreibt man sie in der Form der Reihe:

bei einer geringfügigen Aenderung auch mit den neueren Anschauungen in Einklang bringen zu können, so habe ich sie doch bald durch die Gl. (1) des Textes ersetzt. Jedenfalls hat die frühere Untersuchung gelehrt, dass alle ähnlich gebauten Formeln (ob l oder λ darin steht, ist gleichgültig) zur Darstellung des empirisch gegebenen Materials volle vier Constanten erfordern, und daher ist mir ein neuerer Versuch Lommel's¹⁾, schon mit zwei Constanten leidlich auszukommen, geradezu unverständlich.

Definiren wir die durchsichtigen Mittel als solche, für welche innerhalb des untersuchten Strahlungsbereiches bereits die erste Potenz des Extinctionscoëfficienten b vernachlässigt werden darf, so hat man sich nur um die erste der Gl. (1) zu kümmern, und diese schreibt sich, n statt a gesetzt:

$$(2) \quad n^2 - 1 = \sum \frac{\mathfrak{D}(\lambda^2 - \lambda_m^2)}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + g^2 \lambda^2}.$$

Um vorstehenden Ausdruck in möglichst bequemer Weise anwenden zu können, führen wir zunächst statt der Constanten λ_m^2 diejenige Grösse λ_μ^2 ein, in Bezug auf welche der Nenner der rechten Seite symmetrisch wird. Für den Zusammenhang beider ergibt sich leicht:

$$\lambda_m^2 = \lambda_\mu^2 + \frac{1}{2}g^2,$$

und so erhalten die Summanden die Form:

$$\frac{\mathfrak{D}(\lambda^2 - \lambda_\mu^2 - \frac{1}{2}g^2)}{(\lambda^2 - \lambda_\mu^2)^2 + g^2(\lambda_\mu^2 + \frac{1}{2}g^2)},$$

oder kürzer:

$$\frac{\mathfrak{D}(\lambda^2 - \sqrt{B_1^2 + B_2^2})}{(\lambda^2 - B_1)^2 + B_2^2}.$$

Führen wir endlich noch zwei neue Bezeichnungen A_1 , A_2 ein, die definirt seien durch die Relationen:

$$A_1 = \frac{1}{2}\mathfrak{D}, \quad \frac{A_2}{A_1}B_2 = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} - B_1 = \frac{1}{2}g^2,$$

$$\frac{1}{n^2} = \pi l^2 + \alpha + \frac{\beta}{l^2} + \frac{\gamma}{l^4},$$

so führt sich das erste charakteristische Glied der rechten Seite auf Redtenbacher, Holtzmann und C. Neumann, nicht aber, wie irrigerweise vielfach angenommen wird, auf Hrn. Ch. Briot zurück (vgl. p. 206).

1) Lommel, Wied. Ann. 8. p. 628. 1879.

so gehen die Summanden dadurch über in:

$$\frac{2[A_1(\lambda^2 - B_1) - A_2 B_2]}{(\lambda^2 - B_1)^2 + B_2^2}.$$

Jeder einzelne derselben lässt sich aber ersichtlich in die beiden folgenden complexen zerfällen:

$$\frac{A_1 + A_2 \sqrt{-1}}{\lambda^2 - B_1 - B_2 \sqrt{-1}} + \frac{A_1 - A_2 \sqrt{-1}}{\lambda^2 - B_1 + B_2 \sqrt{-1}},$$

sodass, wenn jede complexe Constante durch einen einzigen Buchstaben zusammengefasst wird, das Dispersionsgesetz in der kurzen und bequemen Form erscheint:

$$(3) \quad n^2 - 1 = \sum \frac{A}{\lambda^2 - B}.$$

Hierbei wird dann die Entscheidung über die Zahl der erforderlichen Glieder, sowie über Vorzeichen und Werth der in ihnen vorkommenden Coëfficienten ganz der Erfahrung anheimzustellen sein.

Ich habe nun die Formel (3) auf die schönen Messungen Mascart's über die Brechungsexponenten des ordinären Spectrums des Kalkspaths angewandt. Es ist das dieselbe Beobachtungsreihe, die früher nach den mannigfachsten Formeln berechnet worden ist, und deren Fehler sich erst in der fünften Decimalen bemerklich machen.¹⁾

Bleibt man zunächst bei einem einzigen Gliede stehen, setzt also:

$$(3a) \quad n^2 - 1 = \frac{A}{\lambda^2 - B},$$

und ermittelt die Werthe von A und B mittelst zweier zusammengehöriger beobachteter Werthsysteme (n, λ), so werden A und B reell, und wird zugleich B negativ. Berechnet man sodann mittelst derselben die den übrigen λ entsprechenden n , so divergiren die so berechneten n von den beobachteten so bedeutend, dass man behaupten darf, dass Ausdruck (3a) geradezu unbrauchbar sei, und dass er insbesondere erheblich weniger leiste, als die bekannte abgekürzte Cauchy'sche Formel.

Zieht man dann ein weiteres Glied hinzu, schreibt etwa:

1) Vgl. Pogg. Ann. l. c.

$$(3b) \quad n^2 - 1 = \frac{A}{\lambda^2 - B} + \frac{C}{\lambda^2 - D},$$

so sind zunächst die auftretenden vier Constanten A, B, C, D aus vier zusammengehörigen Beobachtungspaaren zu bestimmen. Es geschieht das mittelst vier Gleichungen I. Grades von der Form:

$$(4) \quad yx^2 - yxP + yQ - xR + S = 0,$$

worin abkürzungsweise $n^2 - 1 = y$, $\lambda^2 = x$ gesetzt ist, und die Hilfsconstanten $P \dots S$ die Bedeutung haben:

$$\begin{aligned} P &= B + D, & Q &= BD, \\ R &= A + C, & S &= AD + BC. \end{aligned}$$

sodass kommt:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} (P \mp \sqrt{P^2 - 4Q}), & D &= \frac{1}{2} (P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}), \\ A &= \frac{S - RB}{D - B}, & C &= \frac{S - RD}{B - D}. \end{aligned}$$

Der Ausführung der Rechnung wurden die den vier Fraunhofer'schen Linien C, b, H, O entsprechenden Messungen zu Grunde gelegt, und man erhielt auch diesmal sämtliche Constanten reell und wieder B mit negativem Vorzeichen. Ihre numerischen Werthe, sowie die Wellenlängen und die beobachteten nebst den berechneten Indices findet man in Tabelle I zusammengestellt. Die Columnen δ derselben gibt die Differenzen der letzteren in Einheiten der fünften Decimalen.

Tabelle I.

$$A = +253,980. \quad B = -149,904. \quad C = +0,01974. \quad D = +0,01735.$$

Fraunhofer. Linien	λ	n beob.	n ber.	δ	Fraunhofer. Linien	λ	n beob.	n ber.	δ
A	0,76013	1,65013	1,65015	- 2	H	0,39674	1,68330	1,68330	0
a	0,71838	1,65162	1,65168	- 6	L	0,38190	1,68706	1,68709	-3
B	0,68661	1,65296	1,65301	- 5	M	0,37288	1,68966	1,68966	0
C	0,65602	1,65446	1,65446	0	N	0,35802	1,69441	1,69440	+1
D	0,58878	1,65848	1,65841	+ 5	O	0,34401	1,69955	1,69954	+1
E	0,52680	1,66354	1,66344	+10	P	0,33602	1,70276	1,70283	-7
b	0,51656	1,66446	1,66446	0	Q	0,32856	1,70613	1,70616	-3
F	0,48597	1,66793	1,66789	+ 4	R	0,31775	1,71155	1,71151	+4
G	0,43077	1,67620	1,67618	+ 2					

Wie man ersieht, ist die Uebereinstimmung von Beobachtung und Rechnung befriedigend und ebenso gut wie

bei der früheren Formel. Sie würde selbstverständlich noch gewinnen bei Einhaltung eines passenden Ausgleichungsverfahrens, aber dieses letztere würde um so mühsamer werden, als ja streng genommen sowohl Brechungsexponenten wie Wellenlängen zuvor erst auf den leeren Raum zu reduciren wären.¹⁾

Weiter wurde dann die Mascart'sche Reihe unter der Annahme eines möglichst hohen Grades von Zuverlässigkeit noch mittelst einer sechsconstantigen Formel berechnet. Um die im Ausdruck:

$$(3c) \quad n^2 - 1 = \frac{A}{\lambda^2 - B} + \frac{C}{\lambda^2 - D} + \frac{E}{\lambda^2 - F}$$

vorkommenden Constanten zu erhalten, hat man das oben (p. 367) beschriebene Verfahren zu erweitern. Die drei Grössen B , D , F sind diesmal an die Auflösung einer kubischen Gleichung gebunden, und es war daher von besonderem Interesse; zu untersuchen, ob nicht etwa zwei derselben conjugirt complex würden. Das schien in der That infolge eines anfänglichen Rechenfehlers so kommen zu wollen, indess ergab die Revision der Rechnung für alle sechs Constanten einen reellen Werth, und behauptete B auch hier wieder sein negatives Vorzeichen. Bei Benutzung der Werthe der Fraunhofer'schen Linien a , C , b , H , O , R fanden sich nämlich vier derselben als mit denen der Tabelle I mehr oder minder übereinstimmend, dazu traten zwei neue, die für die Nähe der Linie D (also inmitten des untersuchten Spectrums) eine, freilich schmale Unstetigkeit ($n = \pm \infty$) hervorzurufen strebten. Liess man das betreffende Glied als widersinnig fort, so blieben die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung im ganzen die gleichen wie oben.

Aus den bisher mitgetheilten Daten lassen sich nun nicht unwesentliche Schlüsse ziehen. Stellen wir nämlich den empirisch bestätigten Ausdruck (3b) in der Form:

$$n^2 - 1 = \frac{A}{\lambda^2 + B} + \frac{C}{\lambda^2 - D},$$

1) Ueber die Brechungsindices der Luft vgl. Ketteler, Beobachtungen über die Farbenzerstreuung der Gase; Bonn 1885; Mascart, Compt. rend. 78. p. 617. 1874, und Lorenz, Wied. Ann. 11. p. 70. 1880.

in welcher sämtliche Constanten positive Zahlen sind, zusammen mit dem auf zwei Glieder beschränkten theoretischen Dispersionsgesetz:

$$n^2 - 1 = \frac{\mathfrak{D}_1 (\lambda^2 - \lambda_1^2)}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)^2 + g_1^2 \lambda^2} + \frac{\mathfrak{D}_2 (\lambda^2 - \lambda_2^2)}{(\lambda^2 - \lambda_2^2)^2 + g_2^2 \lambda^2},$$

so werden beide identisch, sobald gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1 &= A, & \lambda_1^2 &= 0, & g_1^2 &= B, \\ \mathfrak{D}_2 &= C, & \lambda_2^2 &= D, & g_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

Wären also wirklich nur zwei Absorptionsstreifen vorhanden, so lägen beide im ultravioletten Strahlungsgebiet, und es käme dem dem sichtbaren Spectrum zunächst liegenden (das Maximum seiner Absorption hätte nahezu die Wellenlänge $\sqrt{D} = 0,1317$) die kleinere, dem sehr viel entfernteren dagegen die grössere Reibungsconstante zu. Da freilich $g_1 = \sqrt{B}$ im vorliegenden Fall einen wohl unwahrscheinlich hohen Werth erreicht, so wird man passender mehrere Absorptionen zulassen und dieselben in zwei Klassen von der eben charakterisirten Art eintheilen. Es gilt dann wegen der Grösse von B und der Kleinheit von D die Entwicklung:

$$\frac{A}{\lambda^2 + B} = \frac{A}{B} \left(1 - \frac{\lambda^2}{B} \right) = \frac{A}{B} - \frac{A}{B^2} \lambda^2 = \sum \left(\frac{a}{b} - \frac{a}{b^2} \lambda^2 \right) = \sum \frac{a}{\lambda^2 + b}.$$

$$\frac{C}{\lambda^2 - D} = \frac{C}{\lambda^2} \left(1 + \frac{D}{\lambda^2} \right) = \frac{C}{\lambda^2} + \frac{CD}{\lambda^4} = \sum \left(\frac{c}{\lambda^2} + \frac{cd}{\lambda^4} \right) = \sum \frac{c}{\lambda^2 - d},$$

und die Identificirung mit den einzelnen Gliedern der theoretischen Reihe vollzieht sich ähnlich wie oben.

Bringt man endlich das Resultat der Reihenentwicklung auf die empirisch gleichfalls zulässige Form:

$$(5) \quad n^2 = -\mathfrak{R} \lambda^2 + \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}}{\lambda^2} + \frac{\mathfrak{C}}{\lambda^4},$$

so ist damit jeder der vier Coëfficienten auf seine theoretische Bedeutung zurückgeführt. Insbesondere also rührt das constante Glied der Cauchy'schen Formel (der bisher sogenannte „von der Dispersion befreite Brechungsindex“) nicht, wie die älteren Erklärer wollen, von einer Verschiedenheit des intermolecularen und des freien Aethers, sondern es ist dasselbe wesentlich homogen mit den übrigen Gliedern und daher absorptiven Ursprungs.

Schliesslich sei noch die Bemerkung gestattet, dass für sämtliche früher untersuchte Mittel der Theorie gemäss das Vorzeichen des Coëfficienten $\mathfrak{Q}$ negativ wird, sofern eben für alle der damalige Coëfficient α positiv gefunden worden ist. Dass in der That mit Abnahme der Wellenlänge der Brechungsindex unter den constanten Werth der Cauchy'schen Theorie herabsinkt, ist für die calorischen Strahlen durch die älteren Versuche Müller's und die neuesten Mouton's bestätigt. Nach unserer Theorie ist der Grenzwert für eine unendlich grosse Wellenlänge die Einheit.

2) Die halbdurchsichtigen Mittel. Unter den halb oder partiell durchsichtigen Mitteln verstehe ich hier solche, deren Extinctionscoëfficienten schon innerhalb des engen Bereiches des optischen Spectrums dermassen variiren, dass sie für gewisse Farben beträchtliche Werthe erreichen, für gewisse andere aber zu vernachlässigen sind. Dahin gehören bekanntlich die meisten Farbstoffe im festen und gelösten Zustand. Es war nun anfangs meine Absicht, die bekannten Beobachtungsreihen von Kundt und Wernicke nach vorstehenden Formeln zu berechnen. Da ich indess inzwischen selber eine grössere Experimentaluntersuchung über diese Mittel ausgeführt habe, so behalte ich die Charakterisirung derselben einem eigenen Aufsatze vor.

3) Die undurchsichtigen Mittel. Wenn ich im Folgenden einen ersten Versuch mache, auch die Dispersion der Metalle einer eingehenden numerischen Berechnung zu unterziehen, so wird man selbstverständlich schon in Anbetracht der geringen Genauigkeit der bezüglichen experimentellen (katoptrischen) Methoden nicht den hohen Grad von Schärfe erwarten wie bei spectrometrischen Messungen. Nichtsdestoweniger hat mir das Selen, auf das ich neben dem Silber meine Prüfung beschränkte, recht befriedigende Resultate gegeben.

Der Rechnung zu Grunde gelegt ist eine Beobachtungsreihe Quincke's¹⁾, die dieser nach der seines Erachtens zuverlässigsten Methode der doppelten Spiegelung ausgeführt hat. Die von ihm erhaltenen Zahlenwerthe für den Haupt-

1) Quincke, Pogg. Ann. Jbd. p. 336. 1874.

einfallswinkel E und das Hauptazimuth H findet man in den betreffenden Columnen der Tabelle II.

Tabelle II.

Fraun- hofer. Linien	E	H	a	b
C	$71^{\circ} 26'$	$8^{\circ} 24'$	2,851	0,773
D	$71^{\circ} 23'$	$11^{\circ} 32'$	2,734	1,044
E	$71^{\circ} 10'$	$12^{\circ} 13'$	2,672	1,085
F	$71^{\circ} 0'$	$13^{\circ} 14'$	2,603	1,156
G	$70^{\circ} 10'$	$15^{\circ} 30'$	2,381	1,261

Daraus berechnen sich dann mit Hülfe zweier der drei bekannten Formeln¹⁾:

$$(6) \quad \begin{cases} 2ab = \sin^2 E \tan^2 E \sin 4H, \\ a^2 - b^2 = \tan^2 E (1 - 2 \sin^2 E \sin^2 2H) \\ a^2 + b^2 = \tan^2 E \sqrt{1 - \sin^2 2E \sin^2 2H} \end{cases}$$

der zugehörige Refraktionsindex a und Extinctionsindex b , deren Werthe in den letzten Columnen der Tabelle II aufgeführt sind.

Um die weitere Untersuchung nach Möglichkeit zu vereinfachen, reducire ich das allgemeine Dispersionsgesetz Gl. (1) versuchsweise auf die Form:

$$(7) \quad a^2 - b^2 - \alpha = \frac{\mathfrak{D}(\lambda^2 - \lambda_m^2)}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + g^2 \lambda^2}, \quad 2ab = \frac{\mathfrak{D}g\lambda}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + g^2 \lambda^2},$$

unter α eine Constante verstanden. Ihr würde die Vorstellung entsprechen, dass man im oder in der Nähe des sichtbaren Spectrums nur einen Absorptionstreifen habe, und dass die sich letzterem zuordnende Refraktionscurve durch weit entfernte ultraviolette Absorptionen um ein constantes Stück emporgehoben werde.

Mittelst Division der Gleichungen (7) erhält man:

$$(8) \quad \frac{2ab}{a^2 - b^2 - \alpha} = \frac{g\lambda}{\lambda^2 - \lambda_m^2} = \tan \Delta,$$

wo Δ der Phasenunterschied zwischen Aether- und Körpertheilchen ist. Und durch einfache Umformung gewinnt man daraus die Gleichung:

$$(9) \quad 2ab\lambda^2 - 2ab\lambda_m^2 - (a^2 - b^2)\lambda \cdot g + \lambda \cdot g\alpha = 0,$$

mittelst welcher die drei Unbekannten λ_m^2 , g , $g\alpha$ aus drei

1) Ketteler, Wied. Ann. 1. p. 242. 1877, u. Carl's Report. 16. p. 281. 1880.

zusammengehörigen Beobachtungsdrillingen λ , $a^2 - b^2$, $2ab$ berechnet werden können. Setzt man dieselben sodann in eine der Gleichungen (7), so ergibt sich auch der Werth von $\mathfrak{D}$.

Man kann nun die so gewonnenen Constanten dazu benutzen, um rückwärts die einzelnen Refractions- und Extinctionscoëfficienten in ihrer Abhängigkeit von der Wellenlänge zu berechnen und damit wieder Erfahrung und Theorie zu confrontiren. Eine solche Zusammenstellung der beobachteten und berechneten a , b gibt Tabelle III. Die derselben zu Grunde gelegten Werthe der Constanten sind folgende:

$$\begin{aligned}\sqrt{\alpha} &= 2,5206, & g &= 0,71757, \\ \lambda_m &= 0,54866, & \mathfrak{D} &= 2,1820,\end{aligned}$$

Tabelle III.

	a		δ	b		δ
	beobachtet	berechnet		beobachtet	berechnet	
<i>C</i>	2,851	2,848	+ 3	0,773	0,757	+ 16
<i>D</i>	2,734	2,783	- 49	1,044	0,917	+ 127
<i>E</i>	2,672	2,674	- 2	1,085	1,075	+ 10
<i>F</i>	2,603	2,571	+ 32	1,156	1,176	- 20
<i>G</i>	2,381	2,391	- 10	1,261	1,295	- 34

Ueberblickt man insbesondere die beiden mit δ überschriebenen Columnen, welche die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung in Einheiten der dritten Decimale geben, so ist die Uebereinstimmung durchweg eine befriedigende zu nennen, und macht davon nur der Extinctionscoëfficient der Linie *D* eine Ausnahme.

Es ist nicht schwer, nun auch noch einen zweiten Schritt zurückzuthun, nämlich die den berechneten a , b sich zuordnenden Haupteinfallswinkel *E* und Hauptazimuth *H* zu entwickeln. Dahin gelangt man, abgesehen von den schon früher ¹⁾ hierfür aufgestellten Beziehungen, durch Eliminirung von *E* oder *H* aus zweien der Gl. 6. Die Ausführung derselben ergibt zunächst den Haupteinfallswinkel als Wurzel der kubischen Gleichung ($x = \text{tg } E$):

$$(10) \quad x^6 - x^4 + x^2 [2(a^2 - b^2) - (a^2 + b^2)^2] - (a^2 + b^2)^2 = 0.$$

Setzen wir behufs trigonometrischer Auflösung dieser letzteren:

1) Ketteler, Carl's Repert. I. c. p. 272.

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{B}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} [2(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)], \\ \frac{A}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} [(a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 - b^2)], \\ r = 2 \sqrt{\frac{A}{3}}, \quad \sin \vartheta = \frac{4B}{r^3}, \end{cases}$$

so findet sich:

$$(12a) \quad \operatorname{tg}^2 E = \frac{1}{3} + r \sin(60^\circ + \frac{1}{3} \vartheta)$$

und sonach schliesslich für H :

$$(12b) \quad \sin 4H = \frac{2ab}{\sin^2 E \operatorname{tg}^2 E}.$$

Das Resultat dieser Rechnungen gibt Tabelle IV, die offenbar die vorhergehende in wesentlichster Weise ergänzt.

Tabelle IV.

	E		δ	H		δ
	beobachtet	berechnet		beobachtet	berechnet	
C	71° 26'	71° 23'	+ 3'	8° 24'	8° 15'	+ 9'
D	71° 23'	71° 21'	+ 2'	11° 32'	10° 6'	+ 1° 26'
E	71° 10'	71° 9'	+ 1'	12° 13'	12° 7'	+ 6'
F	71° 0'	70° 54'	+ 6'	13° 14'	13° 35'	— 21'
G	70° 10'	70° 21'	— 11'	15° 30'	15° 45'	— 15'

Während wieder die Uebereinstimmung für die Haupt-einfallswinkel eine befriedigende ist, findet sich in der Differenzcolumnne der Hauptazimuthe für die Linie D eine Abweichung, die anscheinend gar nicht in das System der Beobachtungsreihe hineinpasst.¹⁾ Wäre dieselbe nicht vorhanden, so wäre es leicht, die einzelnen Fehler mittelst eines passenden Ausgleichungsverfahrens noch gleichförmiger zu vertheilen.

Da bisher die Dispersion der Metalle noch keine andere Beleuchtung erfahren hat, als wie sie die Zahlen Quincke's und die etwas weiter (fast von A bis H) reichen Jamin's unmittelbar zu geben vermögen, so habe ich es für nützlich erachtet, die bisherigen Rechnungen auf das ganze Bereich der zugänglichen calorischen, optischen und chemischen Strahlung auszudehnen. Man gewinnt dadurch

1) So gern man bei der bekannten Gewissenhaftigkeit und Sorgfalt des Herrn Beobachters grössere zufällige Fehler oder auch Schreib- oder Druckfehler ausschliessen möchte, so liegt doch der Gedanke nahe, dass es statt 11° 32' etwa heissen sollte: 10° 32'.

einen ungefähren Ueberblick über den Verlauf der hier in Betracht kommenden dioptrischen und katoptrischen Curven. Dass ich selbstverständlich den angewandten Constanten nur eine wesentlich empirische Bedeutung zulege, und dass ebenso die benutzte Formel bei ausgedehnter Extrapolation bloß Näherungswerthe zu geben vermag, ist wohl unnöthig, auszuführen.

Die Anordnung der folgenden Tabelle V ist aus den Ueberschriften der einzelnen Columnen genügend zu ersehen.

Tabelle V.

	λ	$a^2 - b^2$	$2ab$	$a^2 + b^2$	a	b	A	E	H
1	0,9000	7,996	2,084	8,263	2,851	0,365	51° 46'	70° 51'	4° 5'
2	0,8500	8,026	2,421	8,383	2,864	0,423	55° 21'	—	—
3	0,8000	8,017	2,818	8,498	2,874	0,490	59° 26'	—	—
<i>A</i>	0,7601	7,967	3,181	8,579	2,876	0,553	63° 6'	71° 13'	6° 3'
<i>a</i>	0,7184	7,857	3,606	8,645	2,872	0,628	67° 22'	71° 18'	6° 51'
<i>B</i>	0,6866	7,721	3,955	8,675	2,863	0,691	70° 55'	—	—
<i>C</i>	0,6560	7,537	4,310	8,682	2,848	0,757	74° 38'	71° 23'	8° 15'
<i>D</i>	0,5888	6,904	5,105	8,587	2,783	0,917	83° 50'	71° 21'	10° 6'
<i>E</i>	0,5268	5,995	5,750	8,307	2,674	1,075	93° 34'	71° 9'	12° 7'
<i>F</i>	0,4860	5,228	6,048	7,994	2,571	1,176	100° 32'	70° 54'	13° 35'
<i>G</i>	0,4308	4,039	6,195	7,395	2,391	1,295	110° 29'	70° 21'	15° 45'
<i>H</i>	0,3967	3,271	6,110	6,930	2,258	1,353	116° 46'	69° 52'	17° 10'
<i>L</i>	0,3819	2,939	6,029	6,707	2,196	1,373	119° 31'	—	—
<i>M</i>	0,3729	2,740	5,968	6,567	2,157	1,383	121° 11'	—	—
<i>N</i>	0,3580	2,419	5,847	6,328	2,091	1,398	123° 56'	69° 11'	18° 48'
<i>R</i>	0,3177	1,609	5,407	5,641	1,904	1,420	131° 16'	68° 19'	20° 32'
4	0,2500	0,510	4,394	4,424	1,571	1,399	143° 3'	—	—
5	0,2000	-0,066	3,529	3,580	1,316	1,341	151° 12'	64° 39'	18° 59'
6	0,1500	-0,463	2,634	2,674					

Zur Erläuterung habe ich nur hinzuzufügen, dass die Werthe von $a^2 - b^2$, $2ab$, $a^2 + b^2$ und dann auch die von a und b bei je einer bestimmten Wellenlänge ein Maximum erreichen. Das Gleiche gilt von E , H und $\lg A$, während A selbst bei Verkleinerung der Wellenlänge fortwährend wächst. Experimentell dürfte das Maximum von E leicht, das von H aber nur schwer erreichbar sein.

Der Verlauf insbesondere der Functionen a und b soll durch die beiden Curven (Taf. III Fig. 1) veranschaulicht werden, und wird die erste derselben passend als Refractionscurve, die zweite als Absorptionscurve bezeichnet werden können.

Während innerhalb der untersuchten Spectralzone die Curve der a (und gleichzeitig die Curve der E) mit Zunahme

der Wellenlänge ansteigt, fällt dagegen die Curve der b (und mit ihr die Curve H). Gerade diesem Umstand ist es zu danken, dass gegenwärtige numerische Untersuchung für Selen mit genügender Schärfe hat durchgeführt werden können. Beim Silber dagegen scheinen beide Curven gleichzeitig abzufallen, und daher dürfte eine genauere Prüfung der bezüglichen Verhältnisse erst dann ermöglicht werden, wenn es gelingt, die Beobachtungsgrenzen erheblich zu erweitern.

Ich schliesse diesen Aufsatz mit einiger Befriedigung darüber, dass es mir vergönnt war, die Färbung der Metalle, mit deren empirischer Begründung Jamin s. Z. ein so verdientes Aufsehen erregte, einem grossen allgemeinen Gesetze unterzuordnen.

Bonn, im August 1880.

Zur Abwehr.

Theilt man die theoretische Optik in zwei grosse Abschnitte, in die Theorie des nunmehr als incompressibel erwiesenen Weltäthers und in die der sogenannten ponderablen Mittel, so hat sich Verfasser dieses genöthigt gesehen, bezüglich des ganzen zweiten Theiles das System der hergebrachten Sätze als antiquirt zu verwerfen, resp. denselben als blossen Abstractionen nur noch für die ideellen Grenzfälle Bedeutung zuerkennen. Er hat an ihrer Stelle auf Grundlage der jüngsten gesicherten Erfahrungsthatfachen einen Neubau aufzuführen gesucht und hält denselben bereits gegen Angriffe aller Art für genügend befestigt. Von den drei wesentlichen Hauptsätzen dieses neuen Systems beziehen sich zwei auf die Lichtbewegung im Innern der als Aggregate aus zusammenschwingenden Aether- und Körpertheilchen aufgefassten ponderablen Mittel; sie lassen sich bezeichnen:

I. als das Gesetz der Verwandlung der Schwingungsarbeit des inneren Aethers;

II. als das Gesetz der Verwandlung der Schwingungsarbeit der Molecularkräfte der Körpertheilchen.

Sie zusammen constituiren sonach das Gesetz der Wechselwirkung beider. Das folgende dritte betrifft den Uebergang des Lichtes von einem Mittel in ein anderes; es verlangt:

III. als Satz von den Uebergangsbedingungen die Gleichheit der drei Drehungscomponenten der Volumenelemente des Aethers zu beiden Seiten der Grenzfläche und eine eventuelle, nämlich vom Doppelbrechungsvermögen abhängige Aenderung der linearen Dilatationen senkrecht zur Trennungsfläche.

Wenn der erste dieser Grundsätze die Vorstellungen Boussinesq's und Sellmeier's verallgemeinert, so ist die Aufstellung des ihn ergänzenden zweiten formell wie materiell erst durch Hrn. Helmholtz's Arbeit möglich oder wenigstens leicht geworden. Formell, weil zuerst Helmholtz das Unzureichende einer einzigen Differentialgleichung erkannte, und zugleich materiell, weil der berühmte Verfasser der „Tonempfindungen“ hier seine analogen akustischen Erfahrungen durch Einführung einer Reibungskraft verwerthete.

Ich darf daher wohl behaupten, dass seitdem eine auch im Einzelnen correcte Durchführung der Dispersionstheorie nur mehr eine Frage der Zeit war. Wie ich hoffe, habe ich selber sie gegeben.

Die folgenden Bemerkungen, die zur Abwehr geschrieben sind, beziehen sich in der Hauptsache auf den dritten Satz.

Wenn bekanntlich vor mehreren Jahren Hr. Kirchhoff¹⁾ aus muthmasslich didactischen Gründen die Gesetze der Reflexion des Lichtes an durchsichtigen Krystallen vom Neumann'schen Standpunkt aus behandelte und letzteren auf diejenige hochelegante Form brachte, deren derselbe fähig ist, tritt neuerlich Hr. Réthy, Professor in Klausenburg, in mehreren Aufsätzen²⁾ für diese Grundanschauung ein als eine noch heute berechnete. Sonderbar, dass der alte Dualismus zu einer Zeit wieder auftaucht, wo die Entdeckung der anomalen Dispersion gleichzeitig mit der constanten Elasticität wie Dichtigkeit des bis dahin für ausreichend erachteten Aethers gründlich aufgeräumt und allen Erklärern derselben

1) Kirchhoff, Abhandl. d. Berl. Acad. p. 57. 1876.

2) Réthy, Wied. Ann. 11. p. 121 und 504. 1880.

eine Zuhülfenahme der Schwingungen der Körpermaterie aufgezwungen hat. Die ponderablen durchsichtigen Mittel lassen sich freilich kraft der verschiedenen Beweglichkeit ihrer Körpertheilchen wohl mit einem „reducirten Aethermedium“ im Fresnel'schen Sinne, nicht aber mit einem solchen im Neumann'schen Sinne in Uebereinstimmung bringen. Dass zwar die Fresnel'sche Vorstellung bezüglich der Constitution der isotropen (gleiche Elasticität bei eventuell ungleicher Dichte) und der anisotropen Mittel (in allen Richtungen gleiche Dichte bei ungleicher Elasticität) weit weniger consequent war als die Neumann'sche (gleiche Dichte bei eventuell ungleicher Elasticität in sämtlichen Mitteln), ist unbestreitbar. Wenn indess die heutige Theorie innerhalb der anisotropen Mittel die Beweglichkeit der Körpertheilchen als variabel voraussetzt, so erhebt sie dieselben damit gerade zu verallgemeinerten reducirten Aethermedien im Sinne Fresnel's, obschon dieser selbst bei dem von ihm angeschauten reinen Aether zu einer solchen Conception nicht aufsteigen konnte.

Hr. Réthy, der anscheinend meinen vieljährigen einschlägigen Arbeiten nicht seine Beachtung hat zu Theil werden lassen, gelangt insbesondere zu Grenzbedingungen, die auch mit dem Arago'schen (Aberrations-) Versuch in Einklang stehen sollen. Hätte er indess die bezügliche, von mir gegebene Entwicklung¹⁾ eingesehen, so würde er ohne Zweifel die Hinfälligkeit, resp. Zwecklosigkeit der von ihm vorgenommenen Abänderung der üblichen Continuitätsgleichung erkannt haben. Wie man überhaupt auf Grundlage der beiden Begriffe „Dichtigkeit“ und „Elasticität“ ohne weitere Nebenannahmen das bald Grösser-, bald Kleinerwerden des Brechungsindex eines bewegten Mittels (je nach dem Winkel zwischen Verschiebungsrichtung und Strahl) sollte erklären können, ist mir unverständlich, und dürften die Anhänger der Neumann'schen Vorstellungsweise wohl eher genöthigt sein, die Richtigkeit der ganzen heutigen Aberrationstheorie rundweg zu leugnen.

1) Ketteler, Wied. Ann. 1. p. 556. 1877.

Den l. c. von mir gegebenen, später¹⁾ noch vervollständigten theoretischen Beweis, dass die Schwingungsebene des polarisirten Lichtes auf der Polarisationssebene senkrecht steht, halte ich auch jetzt noch für unangreifbar. Er steht in Einklang mit dem experimentellen Beweise Haidinger's, der sich bekanntlich auf die ungleiche Absorption dichroitischer Krystalle stützt. Hr. Lommel²⁾ hat vor kurzem auch die Fluoreszenzerscheinungen dieser Krystalle herangezogen und die Schlussweise Haidinger's bezüglich des durchgehenden Lichtes auf das reflectirte übertragen. Wenn gleich ich diesen Ausführungen Hrn. Lommel's rückhaltlos zustimme, so kann ich diesem neuen Beweise doch kaum eine höhere Evidenz beilegen als dem älteren, dessen durchschlagende Bedeutung wohl nur von Voreingenommenheit, und zu einer Zeit, welche die Absorptionsvorgänge nicht verstand, misskannt werden konnte.

Noch von einer anderen Seite her lässt sich unser Gegenstand beleuchten. Wie bekanntlich die Wissenschaft meist vom Speciellen zum Generellen fortschreitet, so stehen insbesondere in der Optik die Fresnel'schen Intensitätsformeln der durchsichtigen Mittel, seine Formeln für die Totalreflexion und Mac-Cullagh's und Cauchy's Formeln für die Metallreflexion zu einander in chronologischer Reihenfolge. Man erhält die zweiten aus den ersten durch Imaginärsetzen des Brechungswinkels und ebenso die dritten aus den ersten durch Complexsetzen des Brechungsverhältnisses und unter Anwendung des Fresnel'schen Schlüssels dazu, der aber bekanntlich für die Brechungsausdrücke im Stich lässt. Neumann ist dieser Generalisirung, die freilich erst Cauchy als solche erkannt und zu behandeln versucht hat, bezüglich der Totalreflexion gefolgt (seine Entwicklungen über Metallreflexion sind nicht näher bekannt geworden). Ebenso machen es heute wieder die Herren Réthy und Lommel. Ich selber habe dagegen die allgemeinen Formeln der absorbirenden Mittel an die Spitze gestellt und den Nachweis geliefert, dass dieselben die bekannten Formeln der gewöhnlichen wie

1) Ketteler, Wied. Ann. 3. p. 267. 1877.

2) Lommel, Wied. Ann. 8. p. 635. 1879.

der totalen Reflexion (und entsprechenden Brechung) als einander coordinirte Specialfälle umfassen. Obwohl ich namentlich die Amplituden- und Phasenverhältnisse beim Durchgang des Lichtes durch eine planparallele absorbirende Platte bis in das geringste Detail hinein verfolgen konnte¹⁾, so scheinen doch meine Ausführungen, abgesehen natürlich von den sehr wenigen selbständigen Forschern auf diesem Gebiete, bisher durchweg übersehen zu sein. Nur so wohl ist es erklärlich, dass z. B. Hr. Mousson in die neueste, eben erschienene Auflage seines vortrefflichen Lehrbuches die ungenügenden Formeln Beer's (zum ersten Male) aufgenommen hat.

Von dem von mir eingehaltenen allgemeinen Standpunkte aus erscheinen nun aber die Fresnel-Neumann'schen Grundgedanken als unbestimmt und enge, von ihm aus gibt es nur eine einzige und eindeutige Form der Grenzgleichungen, und was mit dieser Form in Widerspruch steht, mag höchstens eine einzelne der vorgenannten Erscheinungsgruppen erklären können. In solchem thatsächlichen Widerspruch befinden sich insbesondere die Annahmen Réthy's. Sollte ich etwa irren, so erlaube ich mir an alle diejenigen Herren, die meinen Entwicklungen ihre Anerkennung versagen zu sollen glauben, die Bitte auszusprechen, die Theorie der absorbirenden und totalreflectirenden Mittel von ihren Grundsätzen aus, indess unter strengem Ausschluss aller imaginären Grössen, die ja erst selber wieder gedeutet werden müssten, begründen zu wollen.

Man hat bekanntlich in jüngster Zeit²⁾ den Versuch gemacht, die in Rede stehenden Intensitätsformeln (und zwar nicht bloss für durchsichtige Mittel) auch aus der electromagnetischen Lichttheorie Maxwell's abzuleiten. Einmal ist so der Fizeau'sche Versuch über die Mitführung des Aethers eines bewegten Mittels, wenngleich in einer für Fresnel und Fizeau unerwarteten und unannehmbaren Weise, erklärt worden, andererseits kann selbst die Cauchy'-

1) Ketteler, Wied. Ann. 3. p. 95—103 u. 284—297. 1878.

2) Vgl. u. a. Fitzgerald, Beibl. 3. p. 819. 1879, und Lorentz, Beibl. 1. p. 92. 1877; Wied. Ann. 9. p. 641. 1880.

sche Verunzierung der Fresnel'schen Formeln, die sich gegenwärtig in der strengen optisch-elastischen Theorie unmöglich mehr halten lässt, durch electromagnetische Combinationen reproducirt werden.

Soviel indess steht meines Erachtens fest: erstens dass die erwähnte Elasticitätstheorie in der ihr von mir gegebenen Form nicht bloß keinerlei wesentliche Lücke mehr aufweist, sondern dass auch zweitens, falls die gewiss nicht unwahrscheinliche Annahme einer mehr oder minder grossen Aehnlichkeit oder gar Identität von Lichtstrahlen und electricischen Strömen sich als unabweisbar herausstellen sollte, die Folgerungen der einen Grundanschauung die der anderen fördern werden, — dass jedoch drittens die von mir gefundenen Einzelgesetze eine etwaige Modification nur erst „jenseit der Gültigkeitsgrenze des Mariotte'schen Gesetzes“ erfahren werden.

Bonn, im December 1880.

VI. *Untersuchungen über die Spectra gasförmiger Körper; von F. Lippich in Prag.*

(Aus dem 82. Bd. der Sitzungsber. d. Acad. II. Abth. Juni-Heft, vom 13. Mai 1880; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Erster Theil.

1. Die von Krönig und Clausius ausgebildete Hypothese über das Wesen des gasförmigen Aggregatzustandes, bedingt für die Zusammensetzung des Lichtes, das von derartigen glühenden Massen ausgesendet wird, gewisse Consequenzen, von denen im Folgenden einige des Näheren untersucht werden sollen.

Hierbei werden die Molecüle eines bestimmten Gases als untereinander congruente, schwingungsfähige Systeme betrachtet, und von den elementaren Schwingungen, die ein solches Molecül auszuführen vermag, eine bestimmte ins Auge gefasst, deren Schwingungszahl für die Secunde mit n bezeichnet sei.

Wären die Molecüle sämmtlich in Ruhe, und befänden sie sich in solchen Abständen von einander, dass die gegen-

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 6.

Fig. 4.

Fig. 3.

Fig. 7.

Taf. III.

Fig. 8.

Fig. 11.

Fig. 10.