Ueber Schnittpunktfiguren ebener algebraischer Curven.

Von

E. STUDY in Marburg.

Herr Olivier hat in zwei auf die Theorie der algebraischen Curven bezüglichen Abhandlungen mehrere Sätze aufgestellt, welche die Aufmerksamkeit einiger Mathematiker erregt haben. *) Diese Sätze und viele andere sind als besondere Fälle in einem allgemeineren Theorem enthalten, das, soweit es sich auf Curven mit einfachen Schnittpunkten bezieht, so ausgesprochen werden kann:

Sind auf einer algebraischen Curve n^{ter} Ordnung C^n vier Punktgruppen a, b, γ, δ gelegen, von welchen a und b residual sind zu γ und δ , so dass die Paare $(a, \gamma), (a, \delta), (b, \gamma), (b, \delta)$ je ein volles Schnittpunktsystem der C^n bezüglich mit einer $C^l, C^m, C^{m_1}, C^{l_1}$ ausmachen; so liegen die Punktgruppen d, c, β, α , in welchen sich die Curven C^l und C^{m_1}, C^m und C^{l_1}, C^l und C^m, C^{l_1} und C^{m_1} noch weiterhin durchdringen, auf einer C^{n_1} , deren Ordnung sich aus den Relationen ergibt:

$$(1) \quad l + l_1 = m + m_1 = n + n_1.$$

Dieser Satz ist keineswegs neu; er enthält nur eine vollständige geometrische Einkleidung der Identität des sogenannten *Restsatzes*. Seien nämlich die linken Seiten der Gleichungen, welche die betreffenden Curven darstellen, ebenso bezeichnet, wie die Curven selbst, so hat man, wenn γ und δ vermöge C^l und C^m residual sind zu a , und b vermöge C^{l_1} residual ist zu δ , nach dem Nöther'schen Fundamentalsatze eine Identität von der Form $C^l \cdot C^{l_1} = C^m \cdot C^{m_1} + C^n \cdot C^{n_1}$, aus welcher eben geschlossen wird, dass b auch residual ist zu α vermöge einer Curve, deren Ordnung m_1 sich aus der Gleichung $l + l_1 = m + m_1$ ergibt.**) Wir mögen nun aber die Identität,

*) Olivier, „Ueber einige allgemeine Eigenschaften der geometrischen Curven.“ Crelle's J. Bd. 70, S. 156 ff. „Zur Theorie der Erzeugung geometrischer Curven“. Ebenda, Bd. 71, S. 1 ff. Bacharach, „Ueber den Cayley'schen Schnittpunktsatz“, Math. Ann. Bd. 26, S. 292 u. ff.

**) Brill und Nöther, „Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie.“ Math. Ann. Bd. 7, S. 273.

indem wir etwa $-C^l$ für C^h setzen, zunächst symmetrischer schreiben:

$$(2) \quad C^l \cdot C^h + C^m \cdot C^{m_1} + C^n \cdot C^{n_1} = 0$$

und dann bemerken, dass auch der letzte Factor C^{n_1} einer einfachen geometrischen Deutung fähig ist: Gleich Null gesetzt, stellt er gerade die Curve dar, deren Vorhandensein in obigem Satze behauptet wurde.

Besondere Beachtung verdient nun die Symmetrie der Identität (2). Die Curven $C^l, C^h, C^m, C^{m_1}, C^n, C^{n_1}$ ordnen sich in bestimmter Weise zu Paaren; eine einzelne unter ihnen ist aber nicht ausgezeichnet. Daraus folgt, dass man von *irgend* einer dieser 6 Curven ausgehend, eine ganz entsprechende Anordnung der Schnittpunktgruppen $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ erhalten muss, wie bei Benutzung von C^n als Grundcurve. Jede der 6 Curven trägt 4 Punktgruppen, zwei von uns durch Buchstaben des lateinischen und zwei durch Buchstaben des griechischen Alphabets bezeichnete Gruppen.

Jede der ersteren Gruppen ist residual zu jeder der beiden anderen Gruppen, vermöge je einer Curve des Systems, welche mit der gerade als Grundcurve betrachteten Curve nicht zu einem Paar gehört. Die acht Punktgruppen $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ ordnen sich zu vier Paaren: $a, \alpha; b, \beta; c, \gamma; d, \delta$; derart, dass zwei demselben Paar angehörige Gruppen durch *keine* der 6 Curven des Systems verbunden werden können. Ferner ordnen sie sich in zwei Quadrupel a, b, c, d und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; derart, dass irgend zwei Gruppen desselben Quadrupels auf einer bestimmten

Curve des Systems cor-residualsind, und dass beide Quadrupel einander in der eben bemerkten Zuordnung zu Paaren entsprechen. Endlich bestimmt jede Punktgruppe (z. B. a) des einen Quadrupels drei Punktgruppen (β, γ, δ) des anderen Quadrupels, deren jede mit

ihr zusammen das volle Schnittpunktsystem zweier Curven des Systems ausmacht. Kurz, die Gruppierung der acht Punktgruppen und sechs Verbindungscurven ist (wie auch aus naheliegenden Gründen von vorneherein deutlich) dieselbe, welche von den Ecken eines Würfels und seinen Seitenflächen dargeboten wird. Für uns mag sie durch die beigelegte Figur veranschaulicht werden, in welcher die sechs Curven durch Kreise dargestellt sind.

Statt von einer der sechs Curven als einer Grundcurve auszugehen, kann man auch eine der acht Punktgruppen auszeichnen, und demgemäss den Satz etwa in folgender Form aussprechen:

Wenn drei algebraische Curven C^l, C^m, C^n durch dieselben Punkte a gehen, und sich ausserdem paarweise noch in den Punktgruppen δ, γ, β durchdringen, so kann man noch in mannichfacher Weise drei andere Curven $C^{l_1}, C^{m_1}, C^{n_1}$ finden, deren Ordnungen den Gleichungen (1) genügen, welche einzeln bezüglich durch die Punktgruppen δ, γ, β gehen, welche ferner paarweise auf den Curven C^l, C^m, C^n denselben Rest ergeben, und deren sämtliche übrige Schnittpunkte in gewissen Punkten α der Ebene zusammenfallen.

Bezeichnen wir die Anzahlen der Punkte $a \dots \delta$ durch dieselben Buchstaben, wie die Punktgruppen selbst, so müssen zwischen diesen Zahlen natürlich die folgenden Relationen bestehen:

$$(3) \quad \begin{cases} a + \delta = mn, & b + \gamma = m_1 n, \\ a + \gamma = nl, & b + \delta = n l_1, \\ a + \beta = lm, & b + \alpha = l_1 m_1, \\ c + \beta = m n_1, & d + \alpha = m_1 n_1, \\ c + \alpha = n_1 l_1, & d + \beta = n_1 l, \\ c + \delta = l_1 m, & d + \gamma = l m_1. \end{cases}$$

Die Relationen allein würden, mit den Gleichungen (1) zusammengekommen, von den 14 Zahlen $l, m, n, l_1, m_1, n_1, a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ im Ganzen fünf willkürlich lassen; es ist aber natürlich nicht gesagt, dass jedem ganzzahligen Lösungssystem dieser Gleichungen auch eine Figur der betrachteten Art entspricht. Vielmehr haben diese Zahlen, wenn sie einer solchen Figur entsprechen sollen, noch gewissen Bedingungen zu genügen (die sich nicht allgemein angeben lassen); es wird ferner im Allgemeinen auch die Lage der willkürlich anzunehmenden Stücke der Figur noch bedeutenden Einschränkungen unterworfen sein.

Denken wir uns die Punkte a als gegeben, so haben diese ihrer Zahl und Lage nach selbstverständlich der Bedingung zu genügen, dass man die Curven C^l, C^m, C^n hindurchlegen kann (wenn l, m, n gegebene Zahlen sind). Es müssen ferner diese Curven so gewählt werden können, dass keine zwei von ihnen einen Theil gemein haben, und, wenn sie gleicher Ordnung sind, auch so, dass sie nicht demselben Büschel angehören. Denken wir uns ferner die Zahl l_1 gegeben; so wird dieser, wenn sie gross genug ist, im Allgemeinen eine Schaar von Curven C^{l_1} entsprechen. Jede dieser Curven wird aus den Curven C^n und C^m einen gewissen Rest (b, c) ausschneiden. Jede

der Restgruppen b wird man nun mit den Punkten γ durch mindestens eine C^{m_1} verbinden können, im Allgemeinen aber noch durch eine lineare Schaar; und jedes der so bestimmten Curvenpaare C^h, C^{m_1} gibt Anlass zur Entstehung einer bestimmten Figur der geschilderten Art. Die Willkür, die man hiernach bei gegebenen Curven C^l, C^m, C^n und bei gegebenem Werthe von l_1 im Allgemeinen noch hat, wird man dazu verwenden können, die Lage einiger von den Punkten a, b, c, d vorzuschreiben. Man hat in den Anwendungen dann nur darauf zu achten, dass die Curvenschaaren C^h (mit den Basispunkten δ) und C^{m_1} (mit den Basispunkten γ) durch die Punktgruppen b projectiv auf einander bezogen sind, oder es doch werden, wenn man durch geeignete den Curvenschaaren aufzuerlegende äussere Bedingungen dafür sorgt, dass jede der Punktgruppen b aus der C^n nur noch durch eine Curve C^h und eine Curve C^{m_1} ausgeschnitten werden kann. Es ist ferner zu beachten, dass es durchaus nicht nothwendig ist, dass sämtliche Punkte z. B. der Gruppe δ von denen der Gruppen β oder γ verschieden sind: Es können diese Gruppen sehr wohl einzelne Punkte gemein haben, so lange nur die oben ausgesprochenen allgemeinen Voraussetzungen erfüllt bleiben. Nimmt man an, dass die Gruppen α, β, γ eine Anzahl von Punkten gemeinsam enthalten, so werden durch diese überhaupt alle Curven der Figur hindurchgehen müssen; und man erhält so einen, wenn man will, allgemeineren, in den Anwendungen jedenfalls besonders zu berücksichtigenden Satz.

So einfach, ja selbstverständlich die vorstehenden Bemerkungen sind, so fruchtbar erweisen sie sich in ihrer Anwendung auf specielle Probleme. Zunächst ergeben sich, wie bemerkt, als besondere Fälle die sämtlichen von Herrn Olivier aufgestellten Sätze. Ein erster von Herrn Olivier angegebener Satz lautet:

„Hat man in einer Ebene drei beliebige Curven der n^{ten} Ordnung [die nicht zu einem Büschel gehören], und legt man durch einen willkürlichen Punkt in dieser Ebene drei andere Curven, ebenfalls von der n^{ten} Ordnung, durch die jedesmaligen Durchschnittspunkte von zwei der obigen Curven, so treffen sich diese drei Curven in noch weiteren $n^2 - 1$ Punkten.“

Um dies einzusehen, hat man (mit Bezug auf die oben eingeführten Bezeichnungen) $l = m = n, l_1 = m_1 = n_1 = n$ zu nehmen, ferner $a = 0$ zu setzen. Es wird dann $\alpha = \beta = \gamma = \delta = n^2, b = c = d = 0$. Die beiden Curvenbüschel C^h und C^{m_1} lassen jetzt noch einen von den Punkten α willkürlich; durch diesen und die Punkte β ist dann aber auch die Curve C^{m_1} völlig bestimmt.

Zwei weitere Sätze, die Herr Olivier aufgestellt hat, entstehen, wenn man wieder $l = m = n$ nimmt, und die Punkte a so wählt,

dass durch die Punkte β, γ, δ gerade je eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$, bezüglich $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung gelegt werden kann. Daraus ergeben sich, wenn man von speciellen Lagen der Punkte β, γ, δ absieht, im ersten Falle die Zahlenwerthe

$$\beta = \gamma = \delta = \frac{(n-1)(n+2)}{2}, \quad b = c = d = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

$$a = \frac{n(n-1)}{2} + 1, \quad \alpha = \frac{n(n-1)}{2},$$

im zweiten Falle aber die Zahlenwerthe

$$\beta = \gamma = \delta = \frac{(n-2)(n+1)}{2}, \quad b = c = d = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

$$a = \frac{n(n+1)}{2} + 1, \quad \alpha = \frac{(n-2)(n-3)}{2}.$$

Die Punkte β sind nur so zu wählen, dass sie nicht Basispunkte eines Büschels von Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ bezüglich $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung sind. Hiermit sind bereits zwei weitere Sätze des Herrn Olivier bewiesen.*) Wir wollen diese indessen noch vervollständigen, indem wir die Frage beantworten, welches die für den Ausnahmefall charakteristische Eigenschaft der Punkte a ist.

Nehmen wir an, es gehen im ersten Falle durch die Punkte β noch $\infty^1 C^{n-1}$, so wird irgend eine von ihnen eine der hindurchgelegten C^n noch in einer Gruppe von $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Punkten treffen, welche die Beweglichkeit Eins besitzt. Diese Punkte werden dann nach dem sogenannten *Riemann-Rock'schen Satze***) auf einer C^{n-3} liegen müssen. Letztere Curve trifft die C^n noch in $\frac{n(n-3)}{2} - 1$ Punkten, durch welche ein Büschel von C^{n-3} gelegt werden kann. Diese Punkte müssen nun nach dem Restsatze mit den Punkten a zusammen auf einer C^{n-2} liegen. Da sich diese Betrachtung sofort umkehren lässt, so können wir den ersten der beiden erwähnten Sätze in der folgenden vervollständigten Form aussprechen:

1. „Legt man durch $a = \frac{n(n-1)}{2} + 1$ auf keiner Curve $n-2$. O. enthaltene Punkte drei Curven n . O., so kann man durch die $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ Punkte, welche sie ausserdem paarweise gemein haben, je eine Curve

*) Betreffs des von Herrn Bacharach gegebenen Beweises sehe man die Bemerkungen auf S. 224.

**) Wegen der Formulirung dieses Satzes vergleiche man Noether, in Crelle's J. Bd. 97, S. 224 u. ff., woselbst auch die genaueren Litteraturnachweise zu finden sind.

$n - 1$. O. legen. Diese drei Curven schneiden sich zu zweien in je $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Punkten jener Curven n . O., ihre übrigen Schnittpunkte aber entfallen in dieselben $\alpha = \frac{n(n-1)}{2}$ Punkte der Ebene.“

Tritt der Ausnahmefall, dass die Punkte a auf eine C^{n-2} zu liegen kommen, wirklich ein, so entsteht eine noch viel merkwürdigere Figur. Man findet dann, unter Berücksichtigung des bereits Gesagten, und des Umstandes, dass die drei Büschel von Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung projectiv auf einander bezogen sind, und also paarweise je eine Curve $(2n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugen, den folgenden Satz:

2. „Legt man durch $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ Punkte a , welche einer einzigen C^{n-2} angehören, drei Curven n . O. C_1^n, C_2^n, C_3^n , welche sich paarweise noch in je $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ Punkten β, γ, δ treffen mögen; so geht durch jede dieser letzteren Punktgruppen ein Büschel von Curven $n-1$. O. Es gibt dann eine gewisse Curve $n-2$. O. Γ^{n-2} von folgender Eigenschaft: Legt man aus irgend einem Punkt x der Γ^{n-2} drei Curven $C_1^{n-1}, C_2^{n-1}, C_3^{n-1}$ bezüglich durch die Punkte β, γ, δ , so gehen diese Curven noch durch die nämlichen $\alpha - 1 = \frac{n(n-1)}{2} - 1$ Punkte, welche ebenfalls auf die Γ^{n-2} zu liegen kommen. Sie treffen sich ferner paarweise noch in Gruppen b, c, d von je $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Punkten, welche bezüglich auf die Curven C_1^n, C_2^n, C_3^n entfallen. Diese Punktgruppen b, c, d liegen ausserdem auf je einer Curve $n-3$. O., $C_1^{n-3}, C_2^{n-3}, C_3^{n-3}$. Letztere treffen wiederum die Curven C_1^n, C_2^n, C_3^n bezüglich noch in $\frac{n(n-3)}{2} - 1$ festen, von der Wahl des Punktes x unabhängigen Punkten b, c, d , welche auf der Curve C^{n-2} gelegen sind, und zusammen mit den Punkten a das volle Schnittpunktsystem der Curve C^{n-2} mit je einer der Curven C_1^n, C_2^n, C_3^n bilden. Die Curven $C_1^{n-3}, C_2^{n-3}, C_3^{n-3}$ gehen ferner durch dieselben $\frac{(n-3)(n-4)}{2} + 1$ Punkte der C^{n-2} , und schneiden sich ausserdem paarweise in $\frac{(n-1)(n-4)}{2}$ Punkten, welche bezüglich auf die drei Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $C_1^{n-1}, C_2^{n-1}, C_3^{n-1}$ zu liegen kommen.“

Die Zahl n muss hier mindestens gleich vier genommen werden, da im Falle $n = 3$ die drei Curven C_1^n, C_2^n, C_3^n einen gemeinsamen Theil enthalten würden.

Wir haben in Satz 2. denjenigen Ausnahmefall des Satzes 1. behandelt, in welchem die Punkte β, γ, δ die Basispunkte je eines Büschels von Curven $n-1$. O. werden. Wie nun aber, wenn durch diese Punkte sogar ein Netz von Curven $n-1$. O. gelegt werden

kann, oder wenn noch mehr als drei linear unabhängige Curven $n - 1$. O. hindurchgehen? Auch auf diese Fragen ergibt sich auf dem von uns eingeschlagenen Wege die erschöpfende Antwort. Wir beschränken uns darauf, noch den erstgenannten Ausnahmefall zu behandeln.

Sollen die Punkte β Basispunkte eines Netzes von C^{n-1} sein, so kann das auf zweierlei Arten geschehen: Entweder es gehen durch sie eigentliche, nicht zerfallende C^{n-1} hindurch, oder jede hindurchgelegte C^{n-2} zerfällt in eine bestimmte C^{n-2} und eine ganz beliebige Gerade. In beiden Fällen findet man, ganz ähnlich wie oben (S. 220), dass durch die Punkte a noch ein Büschel von C^{n-2} gelegt werden kann, und dass dieser Umstand kennzeichnend dafür ist, dass die Punktgruppen β, γ, δ noch je ein Netz von C^{n-1} tragen. Zwischen den beiden genannten Fällen besteht nun aber ein charakteristischer Unterschied: Im ersten liegen die Punkte b, c, d in welchen die drei C^n von einer durch die Punkte a gehenden C^{n-2} ausserhalb der Punktgruppe a noch getroffen werden, auf drei linear unabhängigen eigentlichen C^{n-3} ; im zweiten sind sie auf je einer C^{n-4} enthalten. Dies tritt aber, wie man leicht sieht, dann und nur dann ein, wenn die $(n-2)^2 - a$ Punkte, in welchen sich zwei C^{n-2} des durch die Punkte a gelegten Büschels ausserhalb der Punkte a noch treffen, auf einer C^{n-6} enthalten sind. Diese Bedingung ist von selbst erfüllt, wenn $n = 6$ ($n = 6$ ist der kleinste überhaupt in Betracht kommende Werth der Zahl n); sie hat eine specielle Lage der Punkte a zur Folge, wenn $n > 6$.

Schliessen wir diese besondere Lage zunächst aus, so ergibt sich der Satz:

3 a). „Haben $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ Punkte a eine solche Lage, dass sie sich mit gewissen $\frac{n(n-7)}{2} + 3$ Punkten, die auf keiner C^{n-6} gelegen sind, zum vollen Schnittpunktsystem zweier C^{n-2} ergänzen, so geht durch die $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ Punkte β, γ, δ , welche drei die Punkte a enthaltende Curven C_1^n, C_2^n, C_3^n ausser den Punkten a paarweise gemein haben, noch je ein Netz von eigentlichen Curven $n - 1$. O. Man kann dann durch einen beliebig angenommenen Punkt der Ebene auf eine einzige Weise drei Curven $n - 1$. O. legen, welche bezüglich die Punktgruppen β, γ, δ enthalten, und sich paarweise in $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Punkten der drei Curven n . O. treffen. Die drei Curven $n - 1$. O. schneiden sich ausser in dem angenommenen Punkte noch in gewissen $\alpha - 1 = \frac{n(n-1)}{2} - 1$ weiteren Punkten.“ Jene $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Punkte aber gehören der Basis eines Büschels von Curven $n-3$. O. an, u. s. w. u. s. w.

In der That, jener willkürlich angenommene Punkt x bestimmt zusammen mit den Punkten γ ein Büschel von Curven $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung; und dieses wiederum bestimmt ein Büschel von Curven $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung durch die Punkte δ , wenn man je zwei Curven einander zuordnet, welche die die Gruppen γ und δ enthaltende C^n in den nämlichen Punkten treffen. Das zweite Büschel schickt eine seiner Curven durch den Punkt x ; woraus sich mit leichter Mühe der Satz ergibt. Auszuschliessen sind gewisse leicht zu erkennende besondere Lagen des Punktes x . Eine interessantere Figur bietet wieder der Ausnahmefall dar:

3b). „Ergänzen sich $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ Punkte a mit $\frac{n(n-7)}{2} + 3$ Punkten, die auf einer einzigen C^{n-6} gelegen sind, zum vollen Schnittpunktsystem zweier C^{n-2} , so kann man durch die $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ Punkte β, γ, δ , welche drei die Punkte a enthaltende C_1^n, C_2^n, C_3^n paarweise noch gemein haben, je eine Curve $n - 2$. O. $C_1^{n-2}, C_2^{n-2}, C_3^{n-2}$ legen. Diese gehen durch dieselben $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ Punkte, und treffen sich ausserdem paarweise in $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ Punkten, welche bezüglich auf die drei Curven n . O. zu liegen kommen.“

Der Satz 3b) behält seine Gültigkeit, wie bemerkt, noch für den Werth $n = 6$, während im Satze 3a) die Zahl n mindestens den Werth 7 haben muss.

In ganz gleicher Weise lässt sich der andere der beiden oben angeführten Sätze behandeln, mit voller Berücksichtigung der Ausnahmefälle. Ich beschränke mich darauf, den Satz selbst in vervollständigter Form zu reproduciren:

„Legt man durch $a = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ auf keiner Curve $n - 1$. O. enthaltene Punkte drei Curven n . O., so kann man durch die $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ Punkte, welche sie paarweise gemein haben, je eine Curve $n - 2$. O. legen. Diese drei Curven schneiden sich zu zweien in je $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Punkten, welche bezüglich auf die Curven n . O. zu liegen kommen, ihre sonstigen Schnittpunkte aber entfallen in dieselben $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ Punkte.“

In derselben Weise wird man auch die Sätze ableiten und vervollständigen können, welche Herr Olivier in der zweiten der oben genannten Abhandlungen aufgestellt hat; das im Vorstehenden Mitgetheilte mag aber genügen. — Es wird dem aufmerksamen Leser nicht entgangen sein, dass man zu ganz ähnlichen Sätzen, wie den angeführten, noch in zahllosen anderen Fällen gelangen kann. Zu einem besonders einfachen Resultat wird man z. B. immer dann kommen,

wenn durch gewisse Punkte a drei Curven, die durchaus nicht nothwendig dieselbe Ordnung zu haben brauchen, derart hindurchgehen, dass durch ihre weiteren Schnittpunkte je eine bestimmte Curve niederster Ordnung gelegt werden kann. Ein ganz einfacher Satz dieser Art, der seiner zahlreichen Anwendungen wegen hervorgehoben zu werden verdient, ist z. B. der folgende:

„Legt man durch nm Punkte einer C^m , die ein volles Schnittpunktsystem bilden, drei Curven n . O., so bestimmen die weiteren Schnittpunkte von je zweien dieser Curven solche drei Curven $n - m$. O., welche einem und demselben Büschel angehören.“

Dieser Satz, der wohl bekannt sein dürfte, kann z. B. mit Vortheil zur Ableitung der bekannten Configuration der durch 6 Punkte eines Kegelschnittes bestimmten *Pascal'schen Linien* verwendet werden. Unter den Sätzen dieser Art, deren man aufstellen kann, soviele als man nur will, haben die eben behandelten Olivier'schen nur insofern eine Besonderheit, als bei ihnen die von uns mit a bezeichneten Punkte lediglich solchen Bedingungen zu genügen haben, die sich durch Ungleichungen ausdrücken lassen; während im Allgemeinen die Punkte a auch durch Gleichungen an einander gebunden sein werden. Ich habe die genannten Sätze übrigens nicht darum so ausführlich behandelt, weil ich glaubte, dass sie durch den erwähnten Umstand einen besonderen Vorzug erhielten; sondern vielmehr, weil ich an einem bestimmten Beispiele zu zeigen wünschte, wie derartige Fragen behandelt werden können. Es war diese Auseinandersetzung auch nach den sehr schätzbaren Erörterungen des Herrn Bacharach über denselben Gegenstand nicht überflüssig. Denn einmal tritt in dem a. a. O. gegebenen Beweise in Folge der (unnöthigen) Herbeiziehung des Cayley'schen Satzes diejenige Voraussetzung, auf welcher allein die Möglichkeit ähnlicher Schlüsse beruht, nicht deutlich hervor; dann hat Herr Bacharach die Bedingungen, welchen die von uns mit a bezeichneten Punkte zu genügen haben, nicht angegeben; endlich ist er in eine Erörterung der Ausnahmefälle nicht eingetreten.

Die nachfolgenden, aus einer grossen Zahl ähnlicher Sätze herausgegriffenen Beispiele mögen weiterhin dazu dienen, diese Art von Anwendungen des Restsatzes zu veranschaulichen. Einige unter ihnen sind bekannt, die meisten indessen dürften neu sein.

1. Gehen drei Kegelschnitte durch dieselben drei Punkte, so gibt es ∞^1 Dreiecke, deren Ecken bezüglich auf die drei Curven zu liegen kommen, während ihre Seiten durch die drei Punkte gehen, welche die Kegelschnitte paarweise noch gemein haben.

Als eine Umkehrung hiervon kann angesehen werden der Satz:

2. Nimmt man auf den Seiten eines Dreiecks je einen Punkt α, β, γ an, und verbindet die drei Ecken a, b, c bezüglich mit den

Punkten $\beta, \gamma; \gamma, \alpha; \alpha, \beta$ und zwei fest angenommenen Punkten durch je einen Kegelschnitt, so gehen diese drei Curven noch durch einen weiteren Punkt.

Dieser Satz wurde (ob zuerst?) in metrischer Form ausgesprochen von Möbius (Statik Bd. I, S. 117).

3. *Nimmt man auf drei Kegelschnitten, welche durch einen Punkt gehen, noch je einen Punkt beliebig an; so bestimmen je zwei dieser Punkte zusammen mit den 3 Punkten, in welchen sich die beiden zugehörigen Kegelschnitte noch weiter treffen, einen neuen Kegelschnitt. Die drei so construirten Kegelschnitte gehen durch dieselben drei Punkte.*)*

Man erhält so eine Figur von einfacher Symmetrie: Die 6 Kegelschnitte ordnen sich zu drei Paaren; die vier Schnittpunkte von zwei nicht zu demselben Paar gehörigen Kegelschnitten ordnen sich zu drei und einem. So entstehen 4 Tripel und 4 einzelne Schnittpunkte; jeder der 6 Kegelschnitte trägt zwei Tripel und zwei einzelne Schnittpunkte, jedes Tripel und jeder einzelne Schnittpunkt aber liegen auf drei Kegelschnitten. — Nichts hindert uns, von den drei Schnittpunkten, in welchen sich je zwei der gegebenen Kegelschnitte paarweise noch treffen, zwei in bestimmt angenommene Punkte der Ebene fallen zu lassen, so dass also die drei Kegelschnitte nun 3 gemeinsame Schnittpunkte haben, von denen einer ausgezeichnet ist. Den auf diese Art gewonnenen Satz können wir in metrischer Form so aussprechen:

4. *Nimmt man auf drei Kreisen, welche sich in einem Punkte treffen, je einen Punkt an, und verbindet je zwei dieser Punkte mit dem weiteren Schnittpunkte der sie enthaltenden Kreise durch einen neuen Kreis, so treffen sich die drei so construirten Kreise wieder in einem Punkt.*

Die so erhaltene Figur von 8 Punkten und 6 Kreisen ist dieselbe, die wir oben benutzten, um den allgemeinen Satz symbolisch darzustellen. Der Satz 4. ist übrigens von dem Satze 2. nicht wesentlich verschieden, da er aus ihm durch eine quadratische Transformation abgeleitet werden kann. Ausserdem kann der Satz 4. nach vorgängiger Uebertragung auf die Kugel als ein Specialfall des bekannten Satzes angesehen werden, wonach 7 Schnittpunkte dreier Flächen zweiten Grades den achten bestimmen. Endlich sei bemerkt, dass ein dem Satze 4. ganz analoger Satz im Raume gilt. Nimmt man auf 4 durch denselben Punkt gehenden Kugeln je einen weiteren Punkt an, so wird durch eine der obigen ganz entsprechende Construction noch ein weiterer Punkt bestimmt. Man erhält dann eine Figur von zehn Punkten, die sich in zwei Quintupel und fünf Paare

*) Vgl. Olivier, Crelle's J. Bd. 71.

ordnen, und acht Kugeln die sich in vier Paare ordnen. Jede Kugel trägt fünf Punkte, und jeder Punkt liegt auf vier Kugeln.

Zu einer nicht minder einfachen Figur führt der folgende Satz:

5. Nimmt man drei Kegelschnitte an, welche sich in den nämlichen beiden Punkten treffen, so kann man durch zwei beliebige Punkte immer und im Allgemeinen nur auf eine Art drei Kegelschnitte legen, die sich paarweise in je zwei Punkten der drei gegebenen Kegelschnitte begegnen, und ausserdem durch je eines der Schnittpunktpaare hindurchgehen, in welchen sich die gegebenen Kegelschnitte zu zweien durchdringen.

Die so bestimmte Figur besteht aus 8 Punktpaaren, in deren jedem sich gewisse drei von den 6 Kegelschnitten treffen.

Die acht Punktpaare ordnen sich zu zweimal vierein, derart, dass die zu einem Quadrupel gehörigen vier Sehnen sich in je einem Punkte treffen.

Auf jedem Strahle jedes der beiden Strahlenquadrupel liegt ein Punktpaar; die drei Kegelschnitte der Figur, welche durch dieses Punktpaar gehen, schneiden sich dann paarweise noch auf drei Strahlen des anderen Quadrupels.

6. Es seien C_1, C_2, C_3 drei Kegelschnitte durch die beiden Punkte a, t_1, t_2, t_3 seien die Punktpaare, in welchen sie sich ausserdem noch zu zweien durchdringen; ferner seien p_1, p_2, p_3 drei auf ihnen beliebig angenommene Punkte. Dann kann man noch auf ∞^1 Arten drei Kegelschnitte finden, $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, welche bezüglich durch die Punkte $t_1, p_2, p_3 - t_2, p_3, p_1 - t_3, p_1, p_2$ gehen und sich ausserdem paarweise auf den drei Curven C_1, C_2, C_3 treffen. Diese drei Kegelschnitte gehen noch durch dieselben zwei weiteren Punkte; und alle ∞^1 so construirten Punktpaare bilden eine Involution eines gewissen Kegelschnittes, welcher durch die drei Punkte p_1, p_2, p_3 geht. Der Mittelpunkt dieser Involution ist unabhängig von der Wahl der Punkte p_1, p_2, p_3 ; er ist derselbe Punkt, in welchem sich die drei bezüglich durch t_1, t_2, t_3 gelegten Geraden treffen.

Um dies einzusehen, berücksichtige man, dass die drei Kegelschnittbüschel $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ vermöge der Curven C_1, C_2, C_3 projectiv auf einander bezogen sind.

7. Nimmt man auf drei Geraden durch denselben Punkt je ein Punktpaar an, und verbindet einen beliebig angenommenen Punkt mit je zweien dieser Punktpaare durch einen Kegelschnitt, so gehen die drei auf diese Art erhaltenen Kegelschnitte noch durch einen weiteren Punkt.

Es entsteht so von Neuem die bereits mehrfach von uns heran-

gezogene Figur, welche z. B. von drei Kreisen und ihren gemeinsamen Sehnen gebildet wird. Der Satz 7 ist die Umkehrung des betreffenden bekannten Satzes.

8. Nimmt man auf drei Curven 3. O., welche durch dieselben beiden Punkte gehen und sich also paarweise noch in je 7 Punkten treffen, je einen Punkt beliebig an, so bestimmen je zwei derselben mit den zugehörigen 7 Punkten eine neue C^3 . Diese letzteren Curven 3. O. gehen sämmtlich durch gewisse 7 Punkte, und schneiden sich paarweise ausser in den angenommenen Punkten noch in je einem weiteren Punkt der gegebenen Curven 3. O.

9. Man lege durch 6 Punkte eines Kegelschnittes drei Curven 4. O., C_1, C_2, C_3 , welche sich paarweise noch in Gruppen von je 10 Punkten a_1, a_2, a_3 treffen mögen, und aus dem Kegelschnitt noch drei Punktepaare b_1, b_2, b_3 ausschneiden. Dann liegen die Punktgruppen a_1, a_2, a_3 bezüglich auf 3 Curven 3. O. $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. Diese gehen durch die nämlichen 7 Punkte, und schneiden sich ausserdem zu zweien noch in je einem Punktepaar c_1, c_2, c_3 der drei Curven C_1, C_2, C_3 . Die Punktepaare a_1 und c_1, a_2 und c_2, a_3 und c_3 sind auf je einer geraden Linie enthalten; und diese drei Geraden treffen sich paarweise noch in drei Punkten der Curven $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.

10. Liegen von den Schnittpunkten einer C^4 und einer C^5 10 auf einer C^3 , so liegen die übrigen 10 auf einer zweiten C^3 . Beide C^3 treffen die C^4 noch in je zwei Punkten, welche auf einer und derselben Geraden liegen. Sie treffen ferner die C^5 noch in je 5 Punkten, welche einem und demselben Kegelschnitt angehören. Die Schnittpunkte des Kegelschnittes und der Geraden aber vertheilen sich auf die beiden Curven 3. O.

11. Haben auf einer Curve 10. O. 30 Punkte eine solche Lage, dass sie sich mit gewissen 6 Punkten eines Kegelschnittes zu dem vollen Schnittpunktsystem zweier Curven 6. O. ergänzen, so gilt dasselbe nicht allein von allen corresidualen Gruppen von 30 Punkten, sondern auch von den zu ihnen residualen Gruppen. Der Kegelschnitt aber ist derselbe für alle residualen und corresidualen Gruppen.

12. Haben von den 54 Schnittpunkten einer C^6 und einer C^9 27 eine solche Lage, dass sie sich mit gewissen 3 Punkten einer Geraden zum vollen Schnittpunktsystem der C^6 und einer C^5 ergänzen, so ergänzen sich die übrigen 27 mit drei weiteren Punkten derselben Geraden zum vollen Schnittpunktsystem der C^6 und einer zweiten C^5 . Die beiden Curven 5. O. treffen die genannte Gerade noch in je zwei Punkten, und die Curve 9. O. noch in je 18 Punkten. Diese

$$2 + 2 + 18 + 18 = 40$$

Punkte sind auf einer Curve 4. O. enthalten.

13. Sind von den 42 Schnittpunkten einer C^6 und einer C^7 21 die Basispunkte eines Netzes von C^5 , so liegen die übrigen 21 auf einer C^4 , und umgekehrt. Jede C^5 des Netzes trifft die C^6 noch in 9 Punkten eines Kegelschnittes, und die C^7 noch in 14 Punkten einer Curve 3. O. Die Curve 3. O. dreht sich um die weiteren 7 Schnittpunkte der C^4 und der C^7 , der Kegelschnitt um die weiteren 3 Schnittpunkte der C^4 und der C^6 . Dabei begegnen sich die Curve 3. O. und der Kegelschnitt fortwährend noch in einem Punkte der C^5 und in 5 Punkten der C^4 .

14. Vertheilt man die 16 Schnittpunkte zweier Curven 4. O. irgendwie zu 8 und 8, und ergänzt beide Gruppen durch je einen weiteren Punkt a_1 , bezüglich a_2 , zu dem System der Basispunkte zweier Büschel von Curven 3. O. C_1^3 und C_2^3 ; so liegen diese Punkte a_1 und a_2 immer auf derselben Curve C^4 des gegebenen Büschels. Und zwar treffen die Curven C_1^3 die C^4 noch in 3 Punkten, welche mit a_2 in einer Geraden liegen, die Curven C_2^3 aber treffen sie in je drei Punkten, welche mit a_1 in einer Geraden gelegen sind.

Um dies einzusehen, betrachte man eine C^3 und zwei C^4 durch die ersten 8 Punkte, von welchen Curven die eine so gewählt ist, dass sie den 9^{ten} Basispunkt des zu den 8 Punkten gehörigen C^3 -Büschels enthält. Durch die 4 weiteren Schnittpunkte der C^3 mit dieser C^4 kann man dann einen Kegelschnitt legen, welcher in zwei Gerade zerfällt, und aus der C^4 noch 4 weitere Punkte ausschneidet. Von diesen ist einer fest, während sich die anderen drei um jenen 9^{ten} Basispunkt drehen können; u. s. w.

Ebenso ergibt sich der folgende Satz:

15. Haben von den Schnittpunkten einer C^4 und einer C^6 12 eine solche Lage, dass alle hindurchgelegten C^4 sich noch in einem weiteren Punkt schneiden, so gehen auch alle C^4 durch die übrigen 12 Punkte noch durch einen 13^{ten} Punkt. Und zwar liegen die drei beweglichen Schnittpunkte der Grundcurve C^4 mit den Curven des ersten C^4 -Netzes in einer Geraden mit dem 13^{ten} Basispunkt des zweiten Netzes, und umgekehrt. —

16. Legt man durch die 20 Schnittpunkte einer C^4 und einer C^5 drei Curven C_1^6, C_2^6, C_3^6 , so schneiden sich die Curven C^4 und C_i^6 noch in je 4 Punkten $[4]_i$, ferner die C^5 und C_i^6 noch in je 10 Punkten $[10]_i$, endlich die Curven C_i^6 paarweise noch in je 16 Punkten $[16]_i$. Die Punkte $[4]_i$ liegen auf 3 Geraden Γ_i^1 , die Punkte $[10]_i$ auf drei Kegelschnitten Γ_i^2 , die Punkte $[16]_i$ auf 3 Curven 3. O. Γ_i^3 . Die 6 Curven $C_i^6, \Gamma_i^1, \Gamma_i^2, \Gamma_{i+1}^3, \Gamma_{i+2}^3$ ($i + 3 \equiv i$) gehen durch die nämlichen beiden Punkte $[2]_i$. Ferner schneiden sich die Geraden Γ_i^1 zu je zweien auf den Curven Γ_i^3 , und ebenso kommen die 4 Schnittpunkte von je zwei Curven Γ_i^2 auf die drei Curven Γ_i^3 zu liegen. Die Curven Γ_i^3 aber gehen durch die nämlichen 7 Punkte.

Es sind in dem Vorstehenden mit Absicht concrete Zahlenbeispiele gewählt worden; doch lassen sich viele der ausgesprochenen Sätze ohne Mühe bedeutend verallgemeinern. Auch die an die Spitze gestellte Betrachtung selbst ist noch erheblicher Erweiterungen fähig, wie sich sofort aus dem Umstande ergibt, dass sie nur auf dem Nöther'schen Fundamentalsatze beruht; da mir indessen meine sonstige Beschäftigung zur Zeit keine Veranlassung bietet, diese Verallgemeinerungen näher zu betrachten, so mag es bei dem Gesagten sein Bewenden haben.

Marburg, den 18. October 1889.