

**2. Zur Theorie des Abtropfens
mit besonderer Rücksicht auf die Bestimmung
der Kapillaritätskonstanten durch Tropfversuche;
von Theodor Lohnstein.**

Die folgenden Zeilen sind der Aufhellung eines Problems gewidmet, in dessen Formulierung merkwürdigerweise bis heute eine gewisse Unklarheit herrscht, trotzdem die theoretischen Grundlagen zu seiner Erledigung seit reichlich einem Jahrhundert vorhanden sind. Und dabei handelt es sich um eine der alltäglichsten Erscheinungen, deren Realisierung experimentelle Hilfsmittel besonderer Art nicht erfordert, die aber auch zwecks messender Verfolgung Gegenstand vieler Experimentaluntersuchungen seitens der Physiker und Chemiker gewesen ist. Wir meinen das Problem der *Tropfengröße*, und zwar im Gegensatz zu den auf einer Unterlage *ruhenden* Tropfen, bei denen Theorie und Messung in befriedigendem Einklang miteinander stehen, die *fallenden* Tropfen, wie sie durch Abfallen von benetzten Oberflächen oder beim langsamen Ausfluß aus Röhren entstehen.

Man weiß natürlich seit langem, daß die Tropfenbildung eine Kapillaritätserscheinung ist und man daher ihr theoretisches Studium auf das Grundgesetz der Oberflächenspannung stützen muß, aber in der Art und Weise, wie man dies tat, hat man bisher einen prinzipiellen Fehler begangen, indem man einen für andere Kapillarerscheinungen gültigen Satz ohne weiteres auf diesen Fall übertrug, ohne sich darüber klar zu werden, daß dessen Besonderheit eine solche Verallgemeinerung nicht gestattete. Wir wollen uns der Einfachheit halber im folgenden auf Tropfen beschränken, die an kreisförmigen Platten oder Öffnungen zustandekommen; sie stellen sich dann, solange sie noch an der betreffenden Fläche oder Mündung hängen, als Rotationskörper verschiedener Form

dar, von denen sich nach Eintritt der Bedingung des Tropfenfalles der untere Teil als *fallender* Tropfen löst. Die beiden Hauptfragen, die in der Theorie des Abtropfens zu beantworten sind, sind nun diese:

1. Wodurch ist die Bedingung des Tropfenfalles gegeben?

2. Welches ist das Verhältnis der sich abtrennenden Flüssigkeitsmasse, d. h. der Masse des *fallenden* Tropfens, zu der unmittelbar vor dem Tropfenfalle an der Mündung befindlichen Gesamtmasse des *hängenden* Tropfens?

Die Beantwortung dieser beiden Fragen schließt als Folgerung die Lösung der praktischen Hauptfrage in sich, der Frage nach der Abhängigkeit der Tropfengewichte von dem Halbmesser der Ausflußmündung beim Abtropfen aus Röhren.

Man hat dieses letztere Problem bisher recht kurz theoretisch folgendermaßen erledigt. Das bekannte Gesetz der Kapillarröhren, wie es sich sowohl experimentell als auch aus der Laplace-Gauss'schen Kapillaritätslehre ergibt, zeigt, daß von der Längeneinheit der Berührungslinie einer vollständig benetzten vertikal gerichteten Körperoberfläche mit einer Flüssigkeit ein Flüssigkeitsquantum über das Niveau gehoben wird, das für eine gegebene Flüssigkeit konstant ist, die sogenannte Kapillaritätskonstante α . Derselbe Satz gilt für das vollständig benetzte vertikale parallele Plattenpaar sowie für beliebige vertikal stehende vollständig benetzte Flächen. Dieses in den angeführten Fällen (aber nur für die vertikal stehenden Flächen) durch die Beobachtung streng bestätigte Theorem hat man nun verallgemeinert, indem man die Behauptung aufstellte, daß die Längeneinheit einer jeden Linie, der vermöge der Kapillarkräfte ein gewisses Flüssigkeitsquantum anhaftet, im Maximum ein der Kapillaritätskonstante α gleiches Flüssigkeitsquantum trägt. Ist r der Halbmesser der Berührungslinie, längs der ein Umdrehungskörper bildender Tropfen an einem festen Körper hängt, so sollte hiernach das Gewicht eines solchen Tropfens $= 2r\pi\alpha$ sein, wobei zwischen *hängendem* und *fallendem* Tropfen meist gar nicht unterschieden wurde. Auf Grund dieser Überlegung hat z. B. Quincke¹⁾

1) G. Quincke, Pogg. Ann. 134. 135. 138.

die Kapillaritätskonstanten geschmolzener Metalle aus deren von dünnen Drähten abfallenden Tropfen berechnet, und diese Darlegung ist auch in die Lehrbücher von Wüllner und Müller-Pouillet-Pfaundler übergegangen. In derselben Weise wird der Gegenstand noch in der neuesten Auflage (1905) von Kohlrauschs Lehrbuch der praktischen Physik (p. 237 und 240) vorgetragen. Nun haben aber schon die alten Versuche von Hagen ergeben, daß jene Formel die tatsächlichen Tropfengewichte gewöhnlicher tropfbarer Flüssigkeiten wie Wasser nicht einmal annähernd wiedergibt. Dasselbe Ergebnis hatten auch die Bestimmungen späterer Untersucher wie J. Traube¹⁾ und F. Eschbaum²⁾, von dem letzteren selbst allerdings nicht hervorgehoben, aber aus den von ihm mitgeteilten Zahlen herauszulesen. J. Traube, der den Zusammenhang der Tropfengröße mit der Kapillaritätskonstante zum Gegenstand besonders eingehender Forschungen machte, hat denn auch seine Versuche nicht nach der einfachen von Quincke benutzten Formel berechnet, sondern vielmehr, auf die Aufstellung eines analytischen Ausdruckes für das Tropfengewicht überhaupt verzichtend, die Tropfengewichte einer größeren Reihe von Flüssigkeiten mit dem Tropfengewicht des Wassers bei der gleichen Abtropffläche verglichen und daraus nach einer ebenfalls unrichtigen Formel unter Einbeziehung des sogenannten Randwinkels die Kapillaritätskonstante berechnet, wobei die Kapillaritätskonstante des Wassers — bei Traube Produkt aus Oberflächenspannung und Randwinkelkosinus — als bekannt angesehen und anderweitigen Bestimmungen entnommen wurde.

Die Fehler der genannten Autoren erklären sich dadurch, daß, mit Ausnahme von Quincke, der es unrichtig tat, keiner von ihnen auf das Fundament der ganzen Theorie, die Differentialgleichung der Tropfenoberfläche, zurückgegangen ist; dies werden wir im folgenden tun und dadurch zu einer zwar nicht eleganten, aber strengen und mit der Erfahrung übereinstimmenden Erledigung des Problems gelangen.

1) J. Traube, Journ. f. pr. Chem. **34**. 1886.

2) F. Eschbaum, Ber. d. deutsch. pharmaz. Ges. 1900. Heft 4.

I.

Da wir uns auf den Fall der Tropfen mit kreisrunder Basis beschränken, so haben wir es mit einer gewöhnlichen Differentialgleichung, der Differentialgleichung der Meridiankurve der Tropfenoberfläche, zu tun. Sie lautet bekanntlich:

$$(A) \quad \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} + \frac{y'}{x(1+y'^2)^{1/2}} = \frac{2}{a^2} (h-y),$$

in der die vertikale Koordinate y entgegengesetzt der Richtung der Schwere positiv gerechnet ist. a hat darin die Bedeutung, daß $\frac{1}{2} a^2 (\sigma_1 - \sigma_2)$ die an der Grenze zweier Flüssigkeiten von den spezifischen Gewichten σ_1 und σ_2 herrschende Oberflächenspannung ist. h ist eine Konstante, deren Wert sich durch eine Grenzbedingung bestimmt. Von der entsprechenden Differentialgleichung des auf einer Unterlage ruhenden Tropfens unterscheidet sich (A) durch das Vorzeichen des auf der rechten Seite vorkommenden y . Die Gleichung enthält, wie man sieht, zwei Parameter; durch die Einführung von a als Längeneinheit kann einer derselben jedoch sofort fortgeschafft werden. Setzt man nämlich $x = a\bar{x}$, $y = a\bar{y}$, $h = a\bar{h}$, so erhält man eine Differentialgleichung, die genau die Form wie (A) hat, nur daß an Stelle von $2/a^2$ rechts 2 steht; läßt man der Einfachheit halber die Striche über \bar{x} , \bar{y} , \bar{h} wieder fort, so resultiert also:

$$(B) \quad \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} + \frac{y'}{x(1+y'^2)^{1/2}} = 2(h-y),$$

eine Gleichung, die den weiteren Entwicklungen zugrunde gelegt werden soll. Man kann sie ersetzen durch das System der beiden Differentialgleichungen

$$(C) \quad \begin{cases} a) & \frac{d(xu)}{dx} = 2x(h-y), \\ b) & \frac{dy}{dx} = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}. \end{cases}$$

In ihnen ist

$$u = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

d. h. der Sinus des Winkels, den die Tangente der Meridiankurve im Punkte (x, y) mit der Horizontalebene bildet.

Als Anfangspunkt des Koordinatensystems soll der tiefste Punkt des Tropfens gewählt werden; h ist alsdann der reziproke Wert des Krümmungshalbmessers in diesem Tropfenscheitel, für den ja die beiden Radien der Hauptkrümmungen zusammenfallen.

Von fundamentaler Wichtigkeit für unsere folgenden Erörterungen ist der nunmehr abzuleitende Ausdruck für das Volumen eines Tropfenabschnittes, der durch den den Scheitel enthaltenden Teil der Oberfläche und einen in der Entfernung y vom Scheitel geführten Horizontalschnitt begrenzt ist. Dieses Volumen wird gegeben durch das Integral

$$J = \pi \int_0^y x^2 dy.$$

Durch partielle Integration erhält man hieraus

$$J = \pi x^2 y - 2\pi \int_0^x xy dx$$

und daraus wieder mit Benutzung der Gleichung (C, a):

$$\begin{aligned} J &= x\pi u + x^2\pi(y-h), \\ (D) \quad &= x\pi(u + x(y-h)). \end{aligned}$$

Man kann diesem Ausdruck auch die Gestalt geben

$$J = \frac{x^2\pi}{2} \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1} \right),$$

wo ϱ_1 und ϱ_2 die beiden Hauptkrümmungsradien der Tropfenoberfläche im Punkte (x, y) sind; indessen bietet dieser Ausdruck weiter keinen Vorteil vor der Formel (D) und ist hier nur der Vollständigkeit halber angeführt worden.

Ein hängender Tropfen mit einer ebenen Basisfläche vom Halbmesser r hat das Volumen

$$a^2 r \pi \left(\sin \vartheta + \frac{r \left(y_0 - \frac{a^2}{\varrho_0} \right)}{a^2} \right);$$

darin hat a die frühere Bedeutung, ϑ ist der Winkel, den das Kurvenelement der Meridiankurve an der Berührungslinie bez. am Röhrenrande mit der Horizontalebene einschließt, y_0 ist die Höhe des Tropfens vom Scheitel bis zur Basis, ϱ_0 ist

der Krümmungsradius im Tropfenscheitel. Der vorstehende Ausdruck ist unmittelbar aus (D) herzuleiten, indem man darin x durch r/a , y durch y_0/a , h durch a^2/ρ_0 , u durch $\sin \vartheta$ ersetzt. Vernachlässigt man ferner das spezifische Gewicht der Luft, und ist σ das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, so ist $\frac{1}{2} a^2 \sigma = \alpha$ die Kapillaritätskonstante der Flüssigkeit, und somit

$$2 r \pi \alpha \left(\sin \vartheta + \frac{r \left(y_0 - \frac{a^2}{\rho_0} \right)}{a^2} \right)$$

das Gewicht des hängenden Tropfens.

Man erkennt aus der vorstehenden Formel, daß die Quincke-Kohlrauschsche Formel für den fallenden Tropfen, $m = 2 r \pi \alpha$, falsch ist, denn der Faktor

$$\sin \vartheta + \frac{r \left(y_0 - \frac{a^2}{\rho_0} \right)}{a^2}$$

ist im allgemeinen von 1 verschieden, wie wir später zeigen werden, sogar meist kleiner als 1 und der fallende Tropfen überdies nur ein Bruchteil des hängenden.

II.

Wie man sieht, kommt die ganze Frage auf das Studium der Wertschwankungen hinaus, denen der Ausdruck

$$V = u + x(y - h)$$

unterliegt. Diese Untersuchung wird dadurch sehr erschwert, daß es leider nicht möglich ist, die Differentialgleichung (B) mit Hilfe bekannter Funktionen zu integrieren. Dasselbe gilt zwar auch für die sich von (B) nur durch ein Vorzeichen unterscheidende Differentialgleichung des ruhenden Tropfens, aber bei letzterer sind wir insofern besser daran, als wir den Zusammenhang zwischen der Kapillaritätskonstante und den der Messung zugänglichen Raumgrößen wenigstens annähernd durch endliche Ausdrücke darstellen können. In dem vorliegenden Fall müssen wir auch darauf verzichten; hier bleibt uns nur der Weg der mechanisch-numerischen Integration der Differentialgleichung übrig, ein Weg, der zwar mühsam und zeitraubend ist, dafür aber den Vorzug hat, unangreifbare Resultate zu liefern. Diesen Weg haben wir nun tatsächlich betreten, indem wir die Differentialgleichung (B) für eine Reihe

von Werten des Parameters h numerisch integrierten. Dabei wurde das ganze für die Versuchspraxis in Betracht kommende Wertintervall von h berücksichtigt, indem wir mehr oder weniger große Stücke der Kurve für die Werte des Parameters: $h=0,5; 0,85; 1,0; 1,25; 1,5; 1,6; 1,7; 1,7975; 1,82; 1,91; 2,0; 2,1; 2,2; 2,3; 2,4; 2,5; 3,0$ und $4,0$ berechneten. Für sehr kleine h endlich wurde die in diesem Falle absolut konvergente Reihenentwicklung benutzt.

Wir haben nunmehr über das von uns bei der mechanischen Integration der Differentialgleichung eingeschlagene Verfahren zu berichten. C. Runge hat in einer vor längerer Zeit erschienenen Arbeit¹⁾ ein hierher gehöriges Verfahren angegeben und unter anderem durch die oben erwähnte Differentialgleichung des ruhenden Tropfens exemplifiziert. Der von Runge entwickelte Algorithmus ist zwar gedanklich sehr elegant, bei einer Probe mit seiner praktischen Ausführung fand ich jedoch, daß er zwecks Vermeidung von Rechenfehlern zu große Aufmerksamkeit erfordert. Ich wandte mich daher dem sozusagen natürlichen alten Verfahren zu, das auf der Benutzung der ersten Glieder der Taylorschen Reihe beruht. Man kann mit demselben, von dem Tropfenscheitel ausgehend, beliebig viele Punkte der Meridiankurve berechnen. Die dabei geltenden Anfangsbedingungen sind: Für $x=0$ ist $y=0$ und $u=0$. Von einem schon bekannten Punkte x, y, u geht man zu dem benachbarten mit der Abszisse $x + \delta x$ über durch folgendes aus (C) unmittelbar sich ergebende Gleichungssystem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{u}{x} + 2(h-y),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{du}{dx}}{(1-u^2)^{3/2}}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{\frac{du}{dx}}{x} + \frac{u}{x^2} - 2\frac{dy}{dx}.$$

Es ist dann für den nächsten Kurvenpunkt

$$\text{Abszisse} = x + \delta x,$$

$$\text{Ordinate} = y + \frac{dy}{dx} \delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2} \delta x^2 + \dots$$

$$\text{Sinus des Tangenten-} \\ \text{neigungswinkels} = u + \frac{du}{dx} \delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2u}{dx^2} \delta x^2 + \dots$$

1) C. Runge, Math. Ann. Bd. 46. p. 167.

Wenn man, wie hier meist geschehen, $\delta x = 0,1$ nimmt, so reicht man, solange $dy/dx < 1$, für physikalische Zwecke mit den hingeschriebenen Gliedern aus; man kann aber auch, wenn man will, noch die Glieder mit der dritten Potenz annähernd berücksichtigen, da man nach Berechnung der ersten beiden Punkte der Kurven, bei denen man die dritten Differentialquotienten ja noch streng ausrechnen mag, für die folgenden Punkte aus jenen in einfacher Weise Näherungswerte der dritten Ableitungen herleiten und für die weitere Berechnung verwenden kann. Dies habe ich bei einigen der Kurven ausgeführt.

Ist $dy/dx > 1$, so vertauscht man, wie auch C. Runge bei seinem Algorithmus, die unabhängigen Variablen und geht also folgendermaßen vor, indem man $v = \sqrt{1 - u^2}$ einführt:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \frac{dv}{dy} = \frac{\sqrt{1-v^2}}{x} - 2h + 2y,$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{\frac{dv}{dy}}{(1-v^2)^{3/2}}, \quad \frac{d^2v}{dy^2} = 2 - \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dv}{dy} - \frac{v}{x^2}.$$

Das Weitere dann wie oben, nur daß jetzt die Entwicklung nach Potenzen von δy erfolgt.

Da für die Versuchspraxis die in der Nähe des Tropfenscheitels gelegenen Punkte meist nicht in Betracht kommen, so wurde bei einigen der Kurven auch je nach dem Werte von h mit einem anderen Punkte begonnen, dessen Koordinaten und zugehörigen Wert von u man dann durch die in der Nähe des Punktes $x = 0$, $y = 0$ geltende Mac Laurinsche Reihe berechnet. Setzt man

$$y = \sum_{x=0}^{\infty} c_x x^x, \quad u = \sum_{x=0}^{\infty} \gamma_x x^x,$$

so ist $c_0 = c_1 = 0$, $\gamma_0 = 0$; die Reihe für y enthält nur gerade, und jene für u nur ungerade Potenzen von x . Die Werte der Koeffizienten c_x und γ_x für die ersten Potenzen sind:

$$c_2 = \frac{h}{2}, \quad \gamma_1 = h,$$

$$\gamma_3 = -\frac{h}{4}, \quad c_4 = \frac{1}{8} h^3 - \frac{1}{16} h,$$

$$\begin{aligned} \gamma_5 &= -\frac{1}{24} h^3 + \frac{1}{48} h, & c_6 &= \frac{1}{16} h^5 - \frac{5}{72} h^3 + \frac{1}{288} h, \\ \gamma_7 &= -\frac{1}{64} h^5 + \frac{5}{288} h^3 - \frac{1}{1152} h, \\ c_8 &= \frac{5}{128} h^7 - \frac{35}{512} h^5 + \frac{41}{2304} h^3 - \frac{1}{9216} h, \\ \gamma_9 &= -\frac{1}{128} h^7 + \frac{7}{512} h^5 - \frac{41}{11520} h^3 + \frac{1}{46080} h. \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt eine Bezeichnung definieren, von der wir im folgenden mehrfach Gebrauch zu machen haben. Wenn im Anfangsteil der Kurve u stetig von 0 bis 1, d. h. der Tangentenneigungswinkel von 0 bis $\pi/2$ wächst, so wollen wir diesen Teil der Meridiankurve ihren ersten Quadranten nennen. Wir werden später sehen, daß erst von einem bestimmten Werte des Parameters h ab die Meridiankurve einen vollständigen ersten Quadranten hat. Für die höheren Werte von h , etwa von $h = 2$ ab, interessieren von den Punkten der ersten Quadranten nur die unmittelbar in der Nähe von $u=1$ gelegenen Punkte; in diesen Fällen konnte daher auf die schrittweise Integration der Kurve innerhalb des ersten Quadranten um so eher verzichtet werden, als hier eine Methode existiert, vermöge deren die Koordinaten des zu $u = 1$ gehörigen Kurvenpunktes, des Endpunktes des ersten Quadranten, in verhältnismäßig einfacher Weise direkt numerisch ausgewertet werden können. Es ist dies das von mir in einer früheren Arbeit¹⁾ für die auf einer Unterlage ruhenden Tropfen mittlerer Größe auseinandergesetzte Verfahren. Bei demselben wird die zu $u = 1$ gehörige Abszisse $x = R$ mit steigender Annäherung durch eine Kette algebraischer Gleichungen geliefert, während das zugehörige y bei Verwendung der ersten vier Reihenkoeffizienten hinlänglich genau durch den Ausdruck

$$c_2 R^2 + c_4 R^4 - 4 c_6 R^6 + 16 c_8 R^8$$

gegeben wird. Von dem so ermittelten Endpunkt des ersten Quadranten aus wurde dann die Kurve in der oben erläuterten Weise numerisch fortgesetzt.

Die Mitteilung unserer Zahlenrechnungen im einzelnen würde einen zu großen Raum beanspruchen, und es mögen

1) Th. Lohnstein, Wied. Ann. 54. p. 720. 1895.

daher vorstehende Angaben über die eingeschlagenen Wege genügen.

III.

Als erstes Resultat unserer Rechnungen ergab sich eine Feststellung, die den tatsächlich zu beobachtenden Tropfenformen entspricht. Man findet nämlich, daß, wenn $h < 1,7975$, die Meridiankurve des Tropfens keinen vollständigen ersten Quadranten hat; in diesen Fällen wächst u von 0 (im Anfangspunkt der Kurve) bis zu einem bestimmten Maximum, das kleiner als 1 ist und natürlich von h abhängt, um von diesem Wendepunkte der Kurve ab wieder stetig auf 0 zu fallen. Der weitere Verlauf der Kurve hat kein physikalisches Interesse; es sei nur kurz erwähnt, daß sie sich in sinusartigen Schwankungen abnehmender Amplitude mit im Endlichen

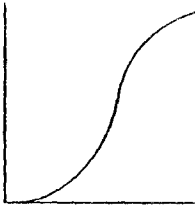


Fig. 1.

Halbes Profil einer Tropfenoberfläche erster Art; $h = 1,5$.

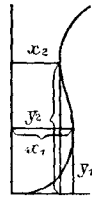


Fig. 2.

Halbes Profil einer Tropfenoberfläche zweiter Art; $h = 2,0$.

variabler Periode um die Gerade $y = h$ herum ins Unendliche verliert. — Die Form dieser ersten Art der Tropfenmeridiankurven wird durch Fig. 1 veranschaulicht, welche in 13,3facher Vergrößerung, oder auf Wasser bezogen in etwa 3,4facher Vergrößerung annähernd den Fall $h = 1,5$ darstellt.

Ist $h > 1,7975$, so resultieren Kurven mit vollständigem ersten Quadranten; bei ihnen liegt der Wendepunkt erst im zweiten — dadurch natürlich unvollständig bleibenden — Quadranten; von dem Wendepunkte aus wächst dann u wieder stetig bis 1, wobei sich die Kurve immer mehr der Umkehrungsachse nähert, letzteres um so mehr, je größer h wird; bei unendlich großem h kommt sie ihr also unendlich nahe. Eine Kurve dieser zweiten Art wird durch Fig. 2 dargestellt; sie gibt die Größenverhältnisse des Falles $h = 2$ wieder.

Nach ihrem ferneren Verlauf zerfallen die Tropfenkurven zweiter Art wieder in zwei Klassen; bei der ersten, von $h = 1,7975$ bis zu einem zwischen $h = 2$ und $h = 3$ liegenden Werte des Parameters, nimmt u ohne Wendepunkt von dem Punkte der größten Einschnürung aus von 1 bis 0 ab; bei der zweiten, für höhere Werte von h , hat die Kurve in diesem Abschnitt mindestens zwei Wendepunkte. Annähernd habe ich den Grenzwert des Parameters h , der diese beiden Klassen der Tropfenkurven zweiter Art scheidet, zu 2,5 ermittelt. Jenseits des Punktes, für den zum zweiten Male $u = 0$ wird, verhalten sich die Kurven zweiter Art von denen erster Art nicht verschieden.

Die nachstehende Tabelle enthält für die Kurven zweiter Art unter x_1 und y_1 die Koordinaten des Endpunktes des ersten Quadranten, unter x_2 und y_2 die Koordinaten des Punktes der größten Einschnürung, für den zum zweiten Male $u = 1$ ist, unter ε den Wert des Ausdruckes $\varepsilon = 1 + x_2(y_2 - h)$. Wir werden von dieser Tabelle später noch Gebrauch zu machen haben. Für sehr große h nähern sich x_1 und y_1 dem Werte $1/h$, y_2 dem Werte $2/h$, während x_2 sehr klein gegen x_1 wird; daraus folgt, daß $\varepsilon = 1 + x_2(y_2 - h)$ mit wachsendem h dem Grenzwert 1 zustrebt.

Tabelle 1.

h	x_1	y_1	x_2	y_2	ε
1,7975	0,6473	1,0247	0,6473	1,0247	0,5000
1,82	0,6371	0,9377	0,6357	1,1547	0,5770
1,91	0,6004	0,7814	0,5687	1,3365	0,6734
2,0	0,5600	0,6854	0,4802	1,4048	0,7142
2,1	0,5259	0,6195	0,3956	1,4132	0,7283
2,2	0,4954	0,5667	0,3186	1,3901	0,7370
2,3	0,4699	0,5302	0,2592	1,3427	0,7519
2,4	0,4466	0,4975	0,2118	1,2795	0,7627
2,5	0,4261	0,4696	0,1733	1,2069	0,7759
3,0	0,3474	0,3688	0,08172	0,9147	0,8296
4,0	0,2551	0,2613	0,02488	0,6008	0,9154
∞	0	0	0	0	1,0000

Die dem Parameter $h = 1,7975$ entsprechende Meridiankurve stellt den Übergang zwischen den beiden Kurvenarten

dar; sie hat einen vollständigen ersten Quadranten, dessen Endpunkt aber gleichzeitig ein Wendepunkt ist. Der letzterem zugehörige Abszissenwert wurde zu $x = 0,6473$ berechnet, woraus folgt, daß die maximale Dicke eines hängenden Tropfens zweiter Art an seiner Ausbauchung kleiner als $2,0,6473 a = 1,295 a$ ist. Für Wasser würde das etwa 5,05 mm betragen.

Eine weitere Tatsache, die sich aus unseren Rechnungen ergeben hat, ist die Ermittlung einer oberen Grenze, die die Breite eines kreisrunden an einer ebenen Fläche hängenden Tropfens nicht überschreiten kann. Man findet diese Grenze, wenn man die Abszissen R der Meridiankurven aufsucht, für welche u zum zweiten Male gleich Null wird. Die numerische Rechnung lieferte hierfür folgende Zahlen, wobei unter Δ die Werte der Differenz zwischen der zugehörigen Ordinate und dem Parameter h eingetragen sind:

$h = 0,5$	$R = 2,610$	$\Delta = 0,1983$
0,85	2,4518	0,3257
1,0	2,3545	0,3763
1,25	2,1552	0,4470
1,5	1,9032	0,4842
1,82	1,5918	0,4433
1,91	1,5622	0,4049
2,0	1,5605	0,3663
2,2	1,3912	0,2497
2,5	2,106	0,3404

Für unendlich kleine h ist

$$y = h \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2^2} \frac{x^4}{(2!)^2} + \frac{1}{2^3} \frac{x^6}{(3!)^2} - \dots \right);$$

man kann aus dieser absolut konvergenten Reihe leicht ableiten, daß y' , also auch u zum zweiten Male für $R = 2,710$ verschwindet. Die zugehörige Ordinate ist gleich $1,401 h$, der Wert der Differenz Δ also gleich $0,401 h$.

Man ersieht aus der vorstehenden Zahlenreihe, daß der in Rede stehende Grenzwert gleich $2,710$ ist; anders ausgedrückt: die Breite eines an einer ebenen Platte hängenden Tropfens ist stets kleiner als $2,710 a$.

Noch ein anderes Ergebnis von Interesse enthalten die mitgeteilten Zahlen. Nach (D) ist das Volumen der ihnen ent-

sprechenden, ihre Basisfläche vollständig benetzenden hängenden Tropfen gleich $R^2 \pi \Delta$. Bildet man die Werte dieses Ausdrucks für die einzelnen h , so findet man, daß dieses Volumen innerhalb des Bereiches von $h = 0,85$ bis $h = 1,25$ ein Maximum haben muß. Indem man $R^2 \Delta$ innerhalb dieses Bereiches durch eine ganze Funktion von h zweiten Grades darstellt, findet man, daß dieses Maximum bei $h = 1,124$ liegt und den Wert 6,657 hat. Da das Volumen eines Tropfens bei konstantem h seinen größten Wert erreicht, wenn u zum zweiten Male gleich Null wird, so gibt diese Zahl *den größten Tropfen an, den eine durch die Kapillaritätszahl $a = 1$ charakterisierte Flüssigkeit überhaupt bilden kann*. Der zugehörige Wert von R ist 2,2614 und der Faktor $u + x(y - h)$, der in diesem Falle gleich $R \cdot \Delta$ wird, beträgt 0,937. Um dieses Maximalvolumen für eine beliebige Flüssigkeit zu erhalten, hat man die Zahl 6,657 mit a^3 zu multiplizieren; will man dann zum Tropfengewicht übergehen, so hat man noch den Faktor σ hinzuzufügen. Führt man endlich noch die Kapillaritätskonstante durch die Gleichung $\alpha = \frac{1}{2} a^2 \sigma$ ein, so ergibt sich:

$$\text{Maximalgewicht eines Tropfens} = 18,83 \frac{\alpha^{3/2}}{\sigma^{1/2}}.$$

Das theoretische Maximalgewicht eines hängenden Tropfens ist also direkt proportional der $(\frac{3}{2})^{\text{ten}}$ Potenz der Kapillaritätskonstante und umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem spezifischen Gewicht der Flüssigkeit. Mit $\alpha = 7,6$ ergibt das bei mittlerer Temperatur für Wasser den Wert 0,395 g.

J. Traube, der meines Wissens zuerst den Begriff der Tropfenmaximalgewichte aufgestellt, ihn aber theoretisch nicht recht klar definiert hat, hat für eine Reihe von Flüssigkeiten auf indirektem Wege aus Versuchen unter Anwendung eines nicht näher mitgeteilten Interpolationsverfahrens die Maximalgewichte zu eruiert gesucht.¹⁾ Für Wasser fand er auf diese Weise den Wert 0,2330 g. Diese Zahl ist, wie man sieht, erheblich kleiner als das von uns theoretisch berechnete Maximum; sie ist auch tatsächlich entschieden zu niedrig, denn bei Wägungen der Tropfen einer Wasserleitung, deren Ausflußmündung einen Durchmesser von etwa 14 mm hatte, erhielt

1) J. Traube, Ber. d. deutsch. chem. Ges. 19. p. 1673.

ich je nach der Schnelligkeit des Abtropfens Tropfen von 0,22 bis 0,24 g, die teilweise also noch den Traubeschen Maximaltropfen an Größe übertrafen. Die Traubeschen Ermittlungen bezüglich der Maximaltropfen bedürfen hiernach einer Revision; leider fehlte es mir selbst an Muße und Gelegenheit, in dieser Hinsicht systematische Versuche anzustellen.

IV.

Wir kommen nunmehr zur Erörterung unseres Hauptthemas, der Frage nach dem *Einfluß der Röhrendurchmesser auf die Tropfengröße*. Wir werden uns dabei auf den Fall beschränken, daß das kreiszylindrische Rohr eine scharf abgeschliffene Tropfmündung hat. Wir wollen ferner annehmen, daß die Substanz des Rohres von der tropfenden Flüssigkeit vollständig benetzt wird; dann spielt nur der äußere Durchmesser des Rohres eine Rolle. Der Fall der Röhren mit rundlich gestaltetem Profil der Tropfmündung würde die mathematische Behandlung unnötig komplizieren; das Schlußresultat würde aber auch hier zeigen, daß es wesentlich auf den äußeren Durchmesser ankommt.

Wie wir schon im Eingang unserer Darlegungen bemerkten, haben wir zunächst die Frage zu beantworten, wodurch überhaupt das Abfallen eines Tropfens bedingt ist. Die älteren Autoren erledigten diese Frage durch die oben erwähnte auf unrichtiger Verallgemeinerung beruhende Überlegung, daß eine Linie der Länge $2r\pi$ höchstens ein Flüssigkeitsgewicht $2r\pi\alpha$ tragen könne. Sie vergaßen dabei durchgängig zu untersuchen, ob überhaupt ein Körper, der durch eine der Differentialgleichung (A) genügende Rotationsfläche begrenzt ist und gleichzeitig als Basis eine Kreisfläche vom Halbmesser r hat, für jeden Wert von r für irgend einen Wert des Parameters h notwendig das Volumen $r\pi a^2$ erreichen muß, und ein Teil der Autoren unterließ auch, sich klar zu machen, daß, selbst wenn das Gewicht des *hängenden* Tropfens, auf den obige Überlegung sich doch nur beziehen konnte, durch den Ausdruck $2r\pi\alpha$ gegeben wäre, das Gewicht des *abfallenden* Tropfens kleiner sein müßte, da stets ein Teil der Flüssigkeit an der Röhrenmündung haften bleibt.

Wir wollen jetzt an einigen Beispielen zeigen, daß im

allgemeinen das Volumen des hängenden Tropfens den Wert $r \pi a^2$ nicht erreicht, oder, was auf dasselbe hinausläuft, daß der früher erklärte Ausdruck $u + x(y - h)$ im allgemeinen kleiner als 1 bleibt.

Es sei $r/a = 0,8$; aus unseren durch mechanische Integration berechneten Kurven entnehmen wir folgendes:

1. $h = 0,85$; für $x = 0,8$ finden wir $y = 0,2779$, $u = 0,5704$ und hieraus

$$u + x(y - h) = 0,1127.$$

2. $h = 1,0$, $x = 0,8$, $y = 0,3428$, $u = 0,6657$,

$$u + x(y - h) = 0,1399.$$

3. $h = 1,25$, $x = 0,8$, $y = 0,4829$, $u = 0,8187$,

$$u + x(y - h) = 0,2050.$$

4. $h = 1,5$, $x = 0,8$, $y = 0,7606$, $u = 0,9527$,

$$u + x(y - h) = 0,3612.$$

5. $h = 1,6$, $x = 0,8$, $y = 0,9895$, $u = 0,9818$.

$$u + x(y - h) = 0,4934.$$

6. $h = 1,7$, $x = 0,8$, $y = 1,4901$, $u = 0,9559$,

$$u + x(y - h) = 0,7880.$$

7. $h = 1,7975$, $x = 0,8$, $y = 1,8044$, $u = 0,8584$,

$$u + x(y - h) = 0,8639.$$

8. $h = 1,82$, $x = 0,8$, $y = 1,8496$, $u = 0,8372$,

$$u + x(y - h) = 0,8609.$$

9. $h = 1,91$, $x = 0,8$, $y = 2,0034$, $u = 0,7425$,

$$u + x(y - h) = 0,8172.$$

Die Werte des Ausdruckes $V = u + x(y - h)$ bilden, wie man sieht, eine stetige Folge, in der niemals der Wert 1 erreicht wird. Dadurch, daß man V im Bereich der h zwischen 1,7975 und 1,91 als eine ganze Funktion zweiten Grades von h darstellt, findet man, daß V für $h = 1,7875$ ein Maximum im Betrage von 0,8642 hat.

Ins Physikalische übertragen heißt dies: Die an einem Rohr oder einer Platte vom Halbmesser $0,8 a$ hängenden Tropfen haben im Maximum ein Gewicht von $2 \cdot (0,8 a) \pi \cdot \alpha \cdot 0,8642$; der von dem Rohre fallende Tropfen ist seinerseits wieder ein Bruchteil dieses Maximalgewichtes.

In gleicher Weise findet man für $x = 1,0$

$$\begin{aligned} h = 0,5, & \quad V = 0,1112, & h = 1,5, & \quad V = 0,7735, \\ h = 0,85, & \quad V = 0,2151, & h = 1,6, & \quad V = 0,8849, \\ h = 1,0, & \quad V = 0,2762, & h = 1,7, & \quad V = 0,9241, \\ h = 1,25, & \quad V = 0,4478, & h = 1,7975, & \quad V = 0,8751. \end{aligned}$$

Hier liegt das Maximum von V bei $h = 1,6933$ und hat den Wert $0,9243$.

Durch ähnliche Rechnungsmethoden wurde das Maximum des Ausdruckes V noch ermittelt für

$$\begin{aligned} x = 0,2 & \text{ zu } 0,7685, & x = 1,4 & \text{ zu } 1,015, \\ x = 0,3 & \text{ zu } 0,7576, & x = 2,0 & \text{ zu } 1,013, \\ x = 0,5 & \text{ zu } 0,7848, & x = 2,2614^1) & \text{ zu } 0,937. \end{aligned}$$

Wenn x von $0,2$ auf 0 abnimmt, wächst das zugehörige Maximum von V stetig von $0,7685$ auf 1 , wie später noch genauer gezeigt werden wird.

Mit den vorstehenden Zahlen ist nicht nur bewiesen, daß der Ausdruck $u + x(y - h)$ im allgemeinen erheblich kleiner als 1 bleibt, sondern auch daß er ein sich mit x stetig änderndes angebbares Maximum hat. *Diese letztere Tatsache enthält zugleich die Lösung der ersten der beiden von uns formulierten Fragen, der Frage, wodurch eigentlich das Abfallen des Tropfens bedingt ist: der Tropfen fällt ab, wenn bei stetig sich änderndem h $u + x(y - h)$, d. h. das Volumen des Tropfens zuerst ein Maximum erreicht hat.*

V.

Soweit mir bekannt, hat nur J. Traube Versuche angestellt, auf Grund deren man die eben entwickelte Theorie mit der Erfahrung vergleichen kann. Für Glasröhren mit eben abgeschliffener Tropffläche verschiedener Durchmesser bestimmte Traube nicht nur das Gewicht der abfallenden Tropfen, sondern auch die Größe des an der Tropffläche verbleibenden Tropfenrestes, den von ihm sogenannten „Tropfenmeniskus“, letzteres nach einer Methode, die vielleicht nicht ganz strenge begründet, zur Ermittlung annähernder Resultate aber immerhin brauchbar war. Indem wir bezüglich der Methode auf die Original-

1) Über diesen Wert vgl. oben.

arbeit verweisen, wollen wir hier nur die Resultate mitteilen. Traube stellte für Wasser folgendes fest:

Eine Tropffläche von 6,05 mm Durchmesser hatte einen Tropfenmeniskus, der 0,376 des abfallenden Tropfens betrug; das Gewicht des letzteren, durch den Umfang der Tropffläche dividiert, ergab

$$4,487 \left(\frac{\text{mg}}{\text{mm}} \right);$$

die entsprechenden Zahlen für zwei andere Tropfflächen von 4,0 und 2,5 mm Durchmesser waren 0,235 und 4,903 bez. 0,091 und 5,865.

Die durch den Umfang des Röhrenrandes dividierten Gewichte der gesamten unmittelbar vor dem Abfallen an der Mündung hängenden Tropfen betragen also in diesen Versuchen

$$4,487 \cdot 1,376 = 6,173, \quad 4,903 \cdot 1,235 = 6,056$$

und

$$5,865 \cdot 1,091 = 6,399.$$

Bezeichnet man das Tropfengewicht mit G , den Halbmesser der Abtropffläche mit r , das Verhältnis des Tropfenmeniskus zum abfallenden Tropfen mit p , das Maximum des Ausdruckes $u + x(y - h)$ für variable h bei konstantem Wert von x mit $V_m(x)$, so erfolgt die Ermittlung der Kapillaritätskonstante $\alpha = \frac{1}{2} a^2 \sigma$ aus einem derartigen Versuch nach folgender Gleichung:

$$\alpha^2 V_m \left(\frac{r}{a} \right) = \frac{G(1+p)}{r\pi \cdot \sigma}.$$

$V_m(x)$ ist hierin zwar nicht durch einen analytischen Ausdruck gegeben, aber numerisch annähernd bekannt, da wir oben die Werte für $x = 0,2; 0,3; 0,5; 0,8; 1,0; 1,4; 2,0; 2,2614$ mitgeteilt haben; man kann aus ihnen durch parabolische Interpolation unter Benutzung je dreier aufeinanderfolgender Funktionswerte für ein gegebenes x den Funktionswert $V_m(x)$ mit hinreichender Genauigkeit berechnen und somit auch durch Probieren den vorstehender Gleichung genügenden Wert von a ausfindig machen. Kennt man, wie meist doch der Fall, den Wert von a anderweit schon annähernd, so ist auch r/a annähernd bekannt, und man weiß somit von vornherein, in der Nähe welches der angegebenen Werte von x man zu entwickeln hat; man erhält auf diese Weise zur Bestimmung von a direkt

eine quadratische Gleichung. Beim Wasser und wässerigen Salzlösungen weiß man z. B. von vornherein, daß a zwischen 3,7 und 4,1 liegt; wenn man daher den ersten der obigen drei Traubeschen Versuche berechnen will, so bildet man etwa $r/a = 3,025/4$ und erkennt somit, daß man aus den drei Werten, die $V_m(x)$ für $x = 0,5$, $x = 0,8$ und $x = 1,0$ hat, einen Ausdruck zweiten Grades zu bilden hat, der $V_m(x)$ im Bereiche von $x = 0,5$ bis $x = 1,0$, in dessen Mitte etwa $3,025/4 = 0,756 \dots$ liegt, hinreichend genau darstellt. Nimmt man der Einfachheit halber für σ den Wert 1, so findet man zunächst als annähernden Ausdruck für $V_m(x)$ in der Umgebung von $x = 0,8$:

$$V_m(x) = 0,8642 + 0,2864(x - 0,8) + 0,0704(x - 0,8)^2,$$

für a also die Gleichung:

$$a^2 \left(0,8642 + 0,2864 \left(\frac{3,025}{a} - 0,8 \right) + 0,0704 \left(\frac{3,025}{a} - 0,8 \right)^2 \right) = 12,346,$$

die man allerdings besser numerisch als algebraisch auflöst. Man findet als ihre hier in Betracht kommende Wurzel:

$$a = 3,7788 \quad \text{und damit} \quad \alpha = \frac{1}{2} a^2 = 7,14 \left(\frac{\text{mg}}{\text{mm}} \right).$$

In ähnlicher Weise wurde aus dem zweiten Versuch berechnet:

$$a = 3,924 \quad \text{und daraus} \quad \alpha = \frac{1}{2} a^2 = 7,70;$$

der dritte Versuch endlich ergibt:

$$a = 4,110 \quad \text{und damit} \quad \alpha = \frac{1}{2} a^2 = 8,445.$$

Man erhält somit auf Grund unserer Theorie aus den Traubeschen Versuchen Werte für die Kapillaritätskonstante des Wassers, welche durchaus im Bereiche der nach anderen Methoden gefundenen liegen, während die Anwendung der Gleichung $G = 2 r \pi \alpha$ auf den fallenden Tropfen ohne Berücksichtigung des Tropfenmeniskus von den auf anderem Wege erhaltenen völlig abweichende Werte liefert.

VI.

Würde man mit jeder zwecks Ermittlung der Kapillaritätskonstante ausgeführten Tropfenbestimmung eine Bestimmung des zugehörigen Tropfenmeniskus verbinden, so wäre mit dem

eben Dargelegten die Theorie dieser Bestimmung bereits erledigt. Aber die Ermittlung des Tropfenmeniskus ist unständig und, wie die Traubeschen Einzelzahlen, deren Mittelwerte wir oben benutzt haben, zeigen, auch wohl keiner großen Genauigkeit fähig. Schon aus diesem Grunde ist, von dem theoretischen Interesse ganz abgesehen, die Beantwortung der zweiten von uns aufgeworfenen Hauptfrage nicht zu umgehen, d. h. wir haben zu erörtern: *Nach welchem Prinzip teilt sich der das Maximalvolumen darbietende Tropfen in fallenden Tropfen und hängenbleibendes Segment?* Zur Beantwortung dieser Frage liefert uns, soweit ich sehe, keines der Prinzipien der Mechanik noch ein Satz der Kapillaritätslehre die Grundlage; wir müssen uns daher lediglich an die Erfahrung halten, die uns vielleicht zur Kenntnis eines neuen in einfacher Weise zu formulierenden Gesetzes führt. Die uns hier zu Gebote stehende Erfahrung ist allerdings gering; sie beschränkt sich im wesentlichen auf die im vorigen Abschnitt teilweise verwerteten Messungen Traubes und auf das, was man gelegentlich ohne besondere experimentelle Hilfsmittel beim Abtropfen aus Röhren, Trichtern etc. wahrnehmen kann. In dieser Hinsicht schien mir nun die Beobachtung zu lehren, daß *der am Röhrenrande befindliche Endteil der Meridiankurve des Tropfenmeniskus annähernd die gleiche Neigung gegen den Horizont aufweist wie der Endteil der Meridiankurve des hängenden Tropfens unmittelbar vor dem Abreißen.* Will man diese Beobachtung theoretisch verfolgen, so hat man folgendermaßen vorzugehen. Für ein gegebenes x sucht man, wie früher gezeigt, den Maximalwert des Ausdruckes $u + x(y - h)$ auf; es ergibt sich ein zugehöriger Wert von h , der mit h_m bezeichnet werde. Die gleichzeitig gewonnenen Werte der u bilden eine Reihe, aus der man durch Interpolation den h_m entsprechenden Wert von u ermittelt. Letzterer werde u_m genannt. u_m ist der Sinus des Neigungswinkels des Randteiles für den hängenden Maximaltropfen. Für unendlich kleines x ist, wie noch gezeigt werden wird, $u_m = 1$, d. h. der Neigungswinkel ein Rechter, mit steigendem x nimmt dann u_m stetig ab, um für einen bestimmten Wert von x , der dem früher erwähnten absoluten (hängenden) Maximaltropfen entspricht, gleich 0 zu werden. Dieser Wert von x ist 2,2614. Innerhalb des so begrenzten Wertbereiches der x läßt sich nun zu

jedem u_m ein zweiter Wert \bar{h}_m ermitteln, für den das zu x gehörige u gleich u_m ist und für den das zugehörige dy/dx mit dem zu u_m und h_m gehörigen dy/dx auch dem Vorzeichen nach übereinstimmt; nennt man das zu (x, \bar{h}_m) gehörige y noch \bar{y} , so ist der Ausdruck $u_m + x(\bar{y} - \bar{h}_m)$ dann proportional dem Volumen desjenigen Tropfenmeniskus, dessen Meridiankurve ein dem Randelement des hängenden Maximaltropfens gleich gerichtetes und gleich geneigtes Randelement hat. Es gibt einen Wert von x , für den $\bar{h}_m = h_m$; für die kleineren x ist $\bar{h}_m > h_m$, für die größeren ist $\bar{h}_m < h_m$. Ich habe jenen Wert von x nicht berechnet und kann auf Grund meiner übrigen Rechnungen nur angeben, daß er zwischen 0,5 und 0,6 liegt; für ihn ist — geometrisch ausgedrückt — der verbleibende Tropfenmeniskus ein Segment des vorher am Rohre befindlichen Maximaltropfens.

Die auszuführenden Rechnungen werden am besten durch ein Zahlenbeispiel klar. Für $x = 1,0$ wurde gefunden:

$$\begin{aligned} h = 1,6, & \quad u = 0,8653, & \quad V = u + x(y - h) = 0,8849, \\ h = 1,7, & \quad u = 0,7604, & \quad V = 0,9241, \\ h = 1,7975, & \quad u = 0,6328, & \quad V = 0,8751, \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich durch parabolische Interpolation:

$$\begin{aligned} h_m &= 1,6933, \\ V_m &= 0,9243, \\ u_m &= 0,7682. \end{aligned}$$

Ferner fand sich:

$$\begin{aligned} h = 0,85, & \quad u = 0,6349, & \quad V = 0,2151, \\ h = 1,0, & \quad u = 0,7335, & \quad V = 0,2762, \\ h = 1,25, & \quad u = 0,8712, & \quad V = 0,4478. \end{aligned}$$

Durch parabolische Interpolation wird aus den drei Werten von u der vorstehenden Reihe ermittelt, daß für $h_m = 1,0575$, $u = u_m = 0,7682$ ist, und hieraus wird wieder durch parabolische Interpolation zwischen den drei Werten von V der vorstehenden Reihe ermittelt, daß $V(\bar{h}_m) = \bar{V}_m = 0,3080$ ist. Zu der Maximalgröße $1,0 \cdot \pi \cdot 0,9243$ des hängenden Tropfens (für $x = 1,0$) gehört also der Volumenwert des zugehörigen Tropfenmeniskus gleicher Randneigung $1,0 \pi \cdot 0,3080$. Das Volumen des dadurch

bestimmten fallenden Tropfens für $x = 1,0$ folgt hieraus durch Bildung der Differenz

$$1,0 \pi \cdot 0,9243 - 1,0 \pi \cdot 0,3080 = 1,0 \pi \cdot 0,6163.$$

Wir wollen im weiteren der Einfachheit halber den konstanten Faktor $x\pi$ fortlassen und nur die den Volumen ja proportionalen Ausdrücke $V_m(r/a)$ und $\bar{V}_m(r/a)$ in Betracht ziehen.

VII.

Das vorstehende Beispiel zeigt, daß, falls unsere Theorie zutrifft, das *wirkliche* Volumen des fallenden Tropfens zu dem nach der Quincke-Kohlrauschschen Formel berechneten für den speziellen Fall $r = a$ im Verhältnis 0,6163:1,0 steht; wir haben nunmehr zu prüfen, inwieweit unsere Annahme mit den im vorigen Abschnitt teilweise schon diskutierten Traubescben Bestimmungen von Tropfenmenisken des Wassers im Einklang steht. Zu diesem Ende sind zunächst die Werte von r/a zu berechnen, die diesen Versuchen entsprechen. Im ersten Versuch fand sich $\frac{1}{2}a^2 = 7,14$, r war gleich $\frac{1}{2}6,05 = 3,025$; demnach

$$\frac{r}{a} = \frac{3,025}{\sqrt{14,28}} = 0,8004;$$

für die beiden anderen Versuche ergibt sich entsprechend

$$\frac{r}{a} = \frac{2,0}{\sqrt{15,4}} = 0,5096$$

bez.

$$\frac{r}{a} = \frac{1,25}{\sqrt{16,89}} = 0,3041.$$

Wir haben nun in der oben für den Fall $r/a = 1,0$ mitgeteilten Weise — natürlich mit den durch die Verschiedenheit der einzelnen Zahlenwerte in der Rechnungsart bedingten Modifikationen — außerdem noch für die Werte 0,2; 0,3; 0,5; 0,8; 1,4; 2,0; 2,2614 des Verhältnisses r/a die in der oben dargelegten Weise definierten Funktionswerte $\bar{V}_m(r/a)$ berechnet und dadurch folgende Tabelle gewonnen, die uns in den Stand setzt, die erforderliche Vergleichung unserer Theorie mit der Erfahrung durchzuführen.

Tabelle 2.

$\frac{r}{a}$	$V_m\left(\frac{r}{a}\right)$	$V_m\left(\frac{r}{a}\right)$	$f\left(\frac{r}{a}\right) = V_m\left(\frac{r}{a}\right) - \bar{V}_m\left(\frac{r}{a}\right)$
0	1,0	0	1,0
0,2	0,7685	0,0285	0,7405
0,3	0,7576	0,0497	0,7079
0,5	0,7848	0,1278	0,6570
0,8	0,8642	0,2348	0,6294
1,0	0,9243	0,3080	0,6163
1,4	1,0120	0,3574	0,6546
2,0	1,0132	0,3131	0,7001
2,2614	0,9370	0,0	0,9370

Aus dieser Tabelle ergibt sich durch parabolische Interpolation:

$$\begin{aligned} \bar{V}_m\left(\frac{r}{a}\right) : f\left(\frac{r}{a}\right) & \text{ für } \frac{r}{a} = 0,8004 \quad \text{gleich } 0,373 \\ & \text{ „ „ } \frac{r}{a} = 0,5096 \quad \text{ „ } 0,201 \\ & \text{ „ „ } \frac{r}{a} = 0,3041 \quad \text{ „ } 0,072 \end{aligned}$$

Traube fand in diesen drei Versuchen experimentell für das Verhältnis des Meniskusvolumens zum Tropfenvolumen die Werte 0,376 bez. 0,235 und 0,091. Die Übereinstimmung ist in dem ersten Falle eine sehr gute, in den beiden letzten noch leidlich. Bei der Würdigung des letzten Versuches insbesondere ist zu berücksichtigen, daß der von Traube angegebene Wert des Röhrendurchmessers sicher zu klein (vielleicht durch Abrundung) angegeben ist; denn nur so ist der auffallend große für die Kapillaritätskonstante des Wassers aus diesem Versuche berechnete Wert zu erklären. Mit wachsendem r/a wird die Abweichung geringer; ferner ist zu bedenken, daß die Unsicherheit der an sich nur approximativen Beobachtungsmethode Traubes um so größer sein mußte, je kleiner der zu bestimmende Tropfenmeniskus war.

Diese wenigen Versuche würden an sich natürlich noch nicht ausreichen, um die hier entwickelte Theorie zu stützen. Es liegen aber in der Literatur viele andere Bestimmungen vor, die, im Sinne unserer Auffassung verwertet, befriedigende

Resultate ergeben. Wir wollen hier nur noch die Versuche erwähnen, die F. Eschbaum a. a. O. von mehr beschreibendem Gesichtspunkte aus an destilliertem Wasser, Alkohol, Äther und Glycerin angestellt hat, weil seine Bestimmungen mit einer gewissen Sorgfalt vorgenommen zu sein scheinen. Eschbaum fand:

Bei einem Durchmesser der Abtropffläche von			
$2r = 1,70$	mm	wiegt 1 Tropfen Wasser	0,0296 g
$2r = 2,48$	"	"	0,0424
$2r = 4,045$	"	"	0,0660
$2r = 5,06$	"	"	0,0795
$2r = 6,63$	"	"	0,1000
$2r = 11,41$	"	"	0,1900

Wenn man diese Bestimmungen nach der Formel $\alpha = G/2r\pi$ berechnet, so findet man der Reihe nach 5,543; 5,441; 5,191; 5,000; 4,801; 5,300 als Werte für die Kapillaritätskonstante, also Werte, die gegenüber der nach den sonstigen Methoden ermittelten viel zu klein sind. Man erkennt aber sofort, daß diese wachsenden r entsprechenden Zahlen genau den gleichen Gang zeigen, wie die Werte für $f(r/a)$ in unserer Tab. 2. Und in der Tat, rechnet man, unserer Theorie gemäß, nach der Gleichung

$$G = 2r\pi\alpha f\left(\frac{r}{a}\right) = r\pi\alpha^2 f\left(\frac{r}{a}\right),$$

wobei das spezifische Gewicht des Wassers der Einfachheit halber gleich 1 gesetzt ist und die Werte von $f(r/a)$ durch parabolische Interpolation aus der Tabelle zu gewinnen sind, so findet man der Reihe nach folgende Werte:

$$\alpha = 7,56; 7,75; 7,92; 7,85; 7,67; 8,04.$$

Das sind Zahlen, die in befriedigender Übereinstimmung mit den von den zuverlässigsten Forschern nach den bekannten sonstigen Methoden ermittelten Zahlenwerten für die Kapillaritätskonstante des Wassers stehen.

F. Eschbaum fand ferner unter Benutzung einer und derselben Röhre von 6,63 mm Durchmesser

Gewicht eines Tropfens	<i>Glycerin</i>	0,078 g
"	"	"	absol. <i>Alkohol</i> 0,0308
"	"	"	<i>Äther</i> 0,0244

Nach der Quinckeschen Formel berechnet würden diese Beobachtungen für die Kapillaritätskonstanten die viel zu niedrigen Werte 3,80 bez. 1,50 und 1,19 ergeben. Mit unserer Theorie finden wir annehmbare Zahlen, nämlich für:

$$\text{Glycerin: } \alpha = \frac{1}{2} a^2 \cdot \sigma = 6,16 \left(\alpha = 3,126 \text{ mm; } \sigma = 1,26, \quad f\left(\frac{r}{a}\right) = 0,6166 \right),$$

$$\text{Alkohol: } \alpha = \frac{1}{2} a^2 \cdot \sigma = 2,31 \left(\alpha = 2,416 \text{ ,, ; } \sigma = 0,7911, \quad f\left(\frac{r}{a}\right) = 0,6492 \right),$$

$$\text{Äther: } \alpha = \frac{1}{2} a^2 \cdot \sigma = 1,77 \left(\alpha = 2,223 \text{ ,, ; } \sigma = 0,717, \quad f\left(\frac{r}{a}\right) = 0,6614 \right)$$

Diese wenigen aus der reichhaltigen Literatur herausgegriffenen Versuche, die wir später durch Nachberechnung weiterer in den Zeitschriften zerstreuten Daten noch ergänzen zu können hoffen, mögen fürs erste genügen, um die im vorstehenden dargelegte Theorie der Tropfengewichte als den Tatsachen ziemlich entsprechend hinzustellen. Diese *Theorie enthält, wie man sieht, einen neuen physikalischen Erfahrungssatz, den Satz nämlich, daß eine einen Körper benetzende Flüssigkeit das Bestreben hat, den Winkel, den ihre Oberfläche an einer scharfen Kante mit dem Körper bildet, möglichst beizubehalten.* Daß dieser Satz unter gewissen Voraussetzungen als eine Folge des bekannten Gesetzes von der Konstanz des Randwinkels an glatten Flächen angesehen werden kann, wollen wir, ohne näher darauf einzugehen, hier nur andeuten.

VIII.

Da die Tab. 2 die Grundlage abgibt sowohl für die Berechnung der Tropfengrößen bei gegebener Kapillaritätskonstante als auch zur Ermittlung der letzteren aus Tropfenversuchen, so wollen wir zu ihrer Erläuterung und Ergänzung noch einige Ausführungen hinzufügen.

Der Wert $r/a = 2,2614$ entspricht dem von uns oben berechneten absoluten Maximaltropfen. Für diesen ist $u_m = 0$, und daher auch $\bar{v}_m(r/a) = 0$. Für größere r/a wird $u_m < 0$ und $\bar{v}_m(r/a)$ negativ, was in dem Falle der Röhren von endlicher Wandstärke eine physikalische Unmöglichkeit ergibt. Der Wert des Halbmessers $r = 2,2614 a$ stellt daher der

äußersten Wert dar, den der Halbmesser des äußeren Querschnittes eines kreiszylindrischen Rohres haben darf, wenn aus ihm noch tropfenweiser Ausfluß einer Flüssigkeit möglich sein soll. Für Wasser wäre das etwa 9 mm.

Für das Intervall von $r/a = 0,2$ bis $r/a = 1,4$ sind die Werte von $f(r/a)$ für die in der Tabelle nicht vertretenen Werte des Argumentes leicht durch parabolische Interpolation mit hinreichender Genauigkeit zu erhalten. Wir wollen das durch ein Zahlenbeispiel erläutern. Es sei $f(0,6)$ zu berechnen. Wir stellen in der Umgebung von $r/a = 0,5$ $f(r/a)$ dar durch folgenden Ausdruck:

$$f\left(\frac{r}{a}\right) = 0,6570 + A\left(\frac{r}{a} - 0,5\right) + B\left(\frac{r}{a} - 0,5\right)^2$$

und bestimmen A und B durch die Werte, die $f(r/a)$ für $r/a = 0,3$ und $r/a = 0,8$ hat. Schreiben wir noch für $A.0,1 \bar{A}$ und für $B.0,01 \bar{B}$, so gewinnen wir folgende einfachen Gleichungen

$$0,7079 - 0,6570 = 0,0509 = -2\bar{A} + 4\bar{B},$$

$$0,6294 - 0,6570 = -0,0276 = 3\bar{A} + 9\bar{B},$$

oder

$$0,0255 = -\bar{A} + 2\bar{B},$$

$$-0,0092 = \bar{A} + 3\bar{B},$$

somit

$$\bar{B} = 0,00326 \quad \text{und} \quad \bar{A} = -0,01898,$$

also

$$f(0,6) = 0,6570 - 0,01898 + 0,00326 = 0,6413.$$

Das Intervall $r/a = 0,2$ bis $r/a = 2,2614$ umfaßt die in der Praxis der tropfbaren Flüssigkeiten für gewöhnlich vorkommenden Fälle.

Der Vollständigkeit halber, sowie weil es bei den in der Einleitung erwähnten Versuchen Quinckes ein Rolle spielt, bedarf auch das noch verbleibende Intervall von $r/a = 0$ bis $r/a = 0,2$ der Besprechung. In diesem Intervall fällt $f(r/a)$ von 1 bis 0,7405, ändert sich also im Vergleich zu den übrigen Teilen der Kurve, durch die wir uns $f(x)$ als Funktion von x dargestellt denken, sehr schnell. Die Folge davon ist, daß

dieser Kurventeil nicht, wie der Rest, durch parabolische Interpolation berechnet werden darf. Um das hier einzuschlagende Verfahren zu finden, müssen wir $f(r/a)$ wieder als Differenz der oben erklärten Funktionen $V_m(r/a)$ und $\bar{V}_m(r/a)$ darstellen und das Verhalten von $V_m(r/a)$ und $\bar{V}_m(r/a)$ für kleine Werte des Argumentes studieren. In dieser Beziehung ist zunächst leicht einzusehen, daß, je kleiner r/a wird, um so mehr der zu dem oben erklärten Sinus u_m gehörige Neigungswinkel der Meridiankurve sich einem rechten Winkel nähert, und zwar ist der diesem u_m entsprechende Punkt der zugehörigen Kurve derjenigen Stelle der Kurve benachbart, wo deren Richtung zum zweiten Male vertikal wird. Bezeichnen wir den konstanten Wert r/a , für den wir V_m und \bar{V}_m ermitteln wollen, mit x_0 , den zugehörigen Wert des Parameters h wie früher mit h_m , so wird daher h_m wenig verschieden sein von demjenigen Werte h_0 , für den die zugehörige Meridiankurve in einem Punkte mit der Abszisse x_0 zum zweiten Male vertikal gerichtet ist. Der funktionale Zusammenhang zwischen den Werten dieser Abszissen und den entsprechenden Werten des Parameters h wird numerisch durch die Kolumne x_2 der Tab. 1 dargestellt, und auf diese Tabelle müssen wir uns daher bei unseren weiteren Entwicklungen stützen.

Wir bezeichnen x_2 als numerisch bekannte Funktion von h mit $\varphi(h)$, y_2 ebenso mit $\chi(h)$; ferner sei v_m der zu u_m komplementäre Kosinus, d. h. gleich $\sqrt{1 - u_m^2}$, y_m die zu u_m und x_0 gehörige Ordinate der Kurve (h_m), $\eta = y_m - \chi(h_m)$, d. h. die Höhe des Punktes (x_0, y_m) über der die Punkte der größten Einschnürung der Kurve verbindenden Geraden. Es gelten dann folgende Entwicklungen:

$$\begin{aligned} V_m(x_0) &= u_m + x_0(y_m - h_m) = 1 - \frac{1}{2}v_m^2 - \dots \\ &+ x_0(\chi(h_m) + \eta - h_m) = 1 - \frac{1}{2}v_m^2 - \dots \\ &+ x_0(y_0 + \chi(h_m) - \chi(h_0) + \eta - h_0 - (h_m - h_0)) = 1 \\ &+ x_0(y_0 - h_0) - \frac{1}{2}v_m^2 + x_0(\chi(h_m) - \chi(h_0) + \eta - (h_m - h_0)). \end{aligned}$$

Hierin ist y_0 die zu (x_0, h_0) gehörige Ordinate, d. h. gleich $\chi(h_0)$; $1 + x_0(y_0 - h_0)$ ist der in Tab. 1 mit ε bezeichnete Ausdruck.

Setzt man ferner

$$\kappa_0 = \frac{1}{x_0} - 2(h_0 - y_0),$$

$$\kappa_m = \frac{1}{\varphi(h_m)} - 2(h_m - \chi(h_m)),$$

so ist

$$v_m = \kappa_m \eta + \eta^2 + \dots$$

$$x_0 - \varphi(h_m) = \frac{1}{2} \kappa_m \eta^2 + \frac{1}{3} \eta^3 + \dots,$$

mithin schließlich

$$\begin{aligned} V_m(x_0) = \varepsilon(h_0) + x_0 \eta - \frac{1}{2} \left(\kappa_0^2 + x_0 \kappa_0 \frac{\chi'(h_0) - 1}{\varphi'(h_0)} \right) \eta^2 \\ - \left(\kappa_0 + \frac{1}{3} x_0 \frac{\chi'(h_0) - 1}{\varphi'(h_0)} \right) \eta^3 + \dots; \end{aligned}$$

man erhält dies, indem man κ_m und $x_0 - \varphi(h_m) = \varphi(h_0) - \varphi(h_m)$ sowie $\chi(h_m) - \chi(h_0)$ nach Potenzen von $h_m - h_0$ und $h_m - h_0$ seinerseits vermöge der Beziehung

$$x_0 - \varphi(h_m) = \frac{1}{2} \kappa_m \eta^2 + \frac{1}{3} \eta^3 + \dots$$

nach Potenzen von η entwickelt. — In dem Ausdruck für $V_m(x_0)$ ist η noch unbekannt; der Definition von $V_m(x_0)$ entsprechend ist dafür derjenige Wert einzusetzen, der $V_m(x_0)$ zu einem Maximum macht, d. h. es ist η bestimmt durch die Gleichung

$$x_0 = \left(\kappa_0^2 + x_0 \kappa_0 \frac{\chi'(h_0) - 1}{\varphi'(h_0)} \right) \eta + \left(3 \kappa_0 + \frac{x_0}{\varphi'(h_0)} (\chi'(h_0) - 1) \right) \eta^2 + \dots$$

Für kleine Werte von x_0 ist κ_0 wesentlich gleich $1/x_0$, $\chi'(h_0)$ und $\varphi'(h_0)$, wie noch gezeigt werden wird, nähern sich dabei den Werten

$$- 2 \left(\frac{3}{4} \right)^{2/3} x_0^{2/3} \quad \text{bez.} \quad - 4 \left(\frac{3}{4} \right)^{1/3} x_0^{1/3};$$

daraus folgt, daß für kleine x_0 η gleich x_0^3 bis auf Größen höherer Ordnung wird; und $V_m(x_0)$ nähert sich der Grenze $\varepsilon(h_0)$, wobei die vernachlässigten Größen von der vierten Ordnung in bezug auf x_0 sind. Für Werte von x_0 oder r/a , die kleiner als 0,2 sind, kann man daher mit einem Fehler, der 0,001 nicht erreicht, $V_m(x_0)$ durch $\varepsilon(h_0)$ ersetzen; man kann aber auch das Glied $+\frac{1}{2} x_0^4$ hinzufügen, so daß dann

$$V_m(x_0) = \varepsilon(h_0) + \frac{1}{2} x_0^4$$

bis auf Größen von höherer als der vierten Potenz in bezug auf x_0 wäre.

In ähnlicher Weise findet man, daß für kleine Werte von x_0

$$\bar{V}_m(x_0) = \frac{2}{3} x_0 \bar{\chi}(\bar{h}_0) + x_0^4$$

bis auf Größen höherer als der vierten Ordnung in bezug auf x_0 ist. $\bar{\chi}(\bar{h}_0)$ ist dabei der zu x_0 , wenn dieser Wert in der Kolonne x_1 der Tab. 1 aufgesucht wird, gehörige Wert der Kolonne y_1 ; für kleine Werte von x_0 ist $\bar{\chi}(\bar{h}_0)$ im wesentlichen gleich x_0 .

Wir sehen somit, daß für kleine Werte von x_0

$$f(x_0) = V_m(x_0) - \bar{V}_m(x_0) = \varepsilon(h_0) - \frac{2}{3} x_0 \bar{\chi}(\bar{h}_0) - \frac{1}{2} x_0^4$$

wird.

Es ist schließlich noch der Zusammenhang zwischen $\varepsilon(h_0)$ und x_0 zu erörtern. Es ist der Definition nach

$$\varepsilon(h_0) = 1 + x_0(y_0 - h_0),$$

worin y_0 und h_0 Funktionen von x_0 sind, deren numerischer Zusammenhang durch die erste, vierte und fünfte Kolonne der Tab. 1 gegeben ist. Für die Rechnung ist es am bequemsten, x_0 und y_0 als Funktionen von h_0 darzustellen, wozu für große Werte von h_0 , um die ausschließlich es bei dieser Betrachtung sich ja handelt, folgende Überlegung dient. Für unendlich große h nähert sich die Tropfenoberfläche mehr und mehr einer Kugel; erst in unendlicher Nähe des oberen Poles derselben ändert die Meridiankurve ihren Charakter, erhält ihren Wendepunkt und biegt dann schließlich unendlich nahe der Rotationsachse von dieser ab; daraus ergibt sich, daß das Volumen des Tropfens für unendlich große h gleich dem Volumen einer Kugel mit dem Halbmesser $1/h$ ist. Es ist somit dieses Volumen einerseits gleich

$$\frac{4}{3} \pi \frac{1}{h^3};$$

andererseits ist es aber gleich $x_2 \pi$, da sich $f(x_2)$ für unendlich kleine x_2 der Grenze 1 nähert. Wir haben also

$$x_2 \pi = \frac{4}{3} \pi \frac{1}{h^3} \quad \text{oder} \quad x_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{h^3}.$$

y_2 nähert sich, wie in derselben Weise folgt, für unendlich große h der Grenze $2/h$. Allerdings ist die Konvergenz, mit der x_2 und y_2 diesen Grenzwerten zustreben, eine ziemlich

langsame, denn für $h=4$ finden wir aus Tab. 1 für das Produkt $x_2 h^3$ anstatt 1,33.. den Wert 1,5923 und für das Produkt $y_2 h$ anstatt 2 den Wert 2,4032. Wir erhalten jedoch eine ausreichende Genauigkeit, wenn wir mit Rücksicht auf das soeben betreffs $h=\infty$ Dargelegte

$$x_2 = \frac{4}{h^3} + \frac{D}{h^4} + \frac{E}{h^5},$$

$$y_2 = \frac{2}{h} + \frac{B}{h^2} + \frac{C}{h^3}$$

setzen und die Koeffizienten B, C, D, E aus den Werten bestimmen, die x_2 und y_2 für $h=3$ und $h=4$ haben, welche, durch mechanische Integration gewonnen, in Tabelle 1 verzeichnet sind.

Wir finden auf diese Weise

$$x_2 = \frac{4}{3h^3} - \frac{3,714}{h^4} + \frac{19,0}{h^5},$$

$$y_2 = \frac{2}{h} - \frac{0,2457}{h^2} + \frac{7,434}{h^3}.$$

Um aus diesen beiden Gleichungen beispielshalber $f(0,1)$ zu berechnen, haben wir in die erste für x_2 0,1 einzuführen; wir finden damit $h=2,865$. Mit diesem Wert von h ergibt sich alsdann aus der zweiten Gleichung $y_2=0,9828$. Damit wird dann

$$f(0,1) = 1 + 0,1(0,9828 - 2,865) - \frac{2}{3} \cdot 0,1^2 = 0,8051,$$

wobei das Glied mit x^4 vernachlässigt und $\chi(\bar{h}_0)$ gleich 0,1 gesetzt ist, was einen merklichen Fehler nicht veranlaßt.

Für noch kleinere Werte von x , also für das Intervall von $x=0$ bis $x=0,1$ können wir aus den beiden Gleichungen für x_2 und y_2 einen expliziten Ausdruck für $f(x)$ ableiten, der eine für praktische Zwecke ausreichende Genauigkeit ergibt. Aus der ersten Gleichung folgt nämlich $1/h = x^{1/3} \mathfrak{P}(x^{1/3})$, wo \mathfrak{P} eine Potenzreihe mit absolutem Glied darstellt; und daraus ergibt sich wieder $y_2 = x^{1/3} \mathfrak{P}'(x^{1/3})$, wo \mathfrak{P}' eine Potenzreihe derselben Art ist. h andererseits ist $x^{-1/3} \mathfrak{P}^{-1}(x^{1/3})$, und schließlich wird somit

$$f(x) = 1 + \beta x^{2/3} + \gamma x + \delta x^{4/3} + \dots$$

Für das praktische Rechnen kann man sich damit begnügen, einen dreigliedrigen Ausdruck $1 + \beta x^{2/3} + \gamma x$ zugrunde zu

legen und die Koeffizienten β und γ mit Hilfe der letzten beiden Zahlen der Kolumne ε der Tab. 1 zu ermitteln. Tut man dies, so erhält man

$$f(x) = 1 - 1,1394 x^{2/3} + 0,4867 x.$$

Für $x = 0,1$ ergibt diese Gleichung $f(0,1) = 0,8032$, während die obige direktere Berechnung 0,8051 ergeben hatte. Man sieht also, daß sie für kleine Werte von x in der Tat ausreicht.

Die letzten Entwicklungen sollen nunmehr auf einige Versuche Quinckes angewendet werden. Quincke bestimmte, wie erwähnt, die Gewichte von zum Schmelzen gebrachten Metalltropfen, die er von dünnsten Drähten dieser Metalle abfallen ließ, und aus solchen Versuchen berechnete er nach der falschen Formel $\alpha = G/2 r \pi$ die Kapillaritätskonstante dieser Metalle im flüssigen Zustande. So fand er für Silber¹⁾:

Durchmesser $2r$ des Drahtes	Gewicht des Tropfens	$\frac{G}{2 r \pi} = \alpha$
0,2318 mm	0,0299 g	41,13
0,0993 „	0,0130	41,66
0,0775 „	0,0110	41,02 ²⁾

Berechnet man dagegen richtig nach den Gleichungen:

$$G = r \pi a^2 \sigma f\left(\frac{r}{a}\right), \quad \alpha = \frac{1}{2} a^2 \sigma,$$

wobei σ , das spezifische Gewicht des geschmolzenen Silbers, zu 10,0 angenommen wurde, so erhält man in den drei Versuchen für $f(r/a)$ die Werte:

$$f(0,0382) = 0,8897, \quad f(0,0166) = 0,9339, \quad f(0,0125) = 0,9446.$$

Als zugehörige Werte von α findet man hieraus die Zahlen
46,25 bez. 44,42 bez. 47,61 mg.

Man ersieht aus diesen Zahlen, daß selbst bei Drähten von nur wenige Millimeter betragendem Durchmesser die Benutzung der Quinckeschen Formel erhebliche Fehler verursacht.

1) Mit der Methode der großen flachen Tropfen auf horizontaler Unterlage erhielt Quincke später — beiläufig bemerkt — viel höhere Werte für die Kapillaritätskonstante des geschmolzenen Silbers.

2) Wohl Rechenfehler für 45,18.

IX.

In den vorstehenden Darlegungen ist das Problem des Tropfenabfallens als statisches behandelt worden. Streng genommen ist das nicht berechtigt, da ein Tropfen sich im allgemeinen durch Zufuß bildet und somit seine einzelnen Elemente Geschwindigkeitskomponenten besitzen. Man kann aber, wie auch J. Traube dies bei der von ihm mit dem Namen *Stalaktometer* belegten Versuchsanordnung durchgeführt hat, die Tropfenbildung so verlangsamen, daß der störende Einfluß der lebendigen Kraft der Flüssigkeitsteilchen auf die Gestaltung der Tropfenoberfläche praktisch vernachlässigt werden kann. Durch diesen Einfluß der Geschwindigkeit erklärt es sich vielleicht auch, daß die oben von uns aus Versuchen J. Traubes und Eschbaums berechneten Werte der Kapillaritätskonstanten des Wassers durchschnittlich etwas höher sind als man sie mit den bekannten anderen Methoden erhält; in der Tat ergibt die theoretische Überlegung, daß die erörterte Fehlerquelle in diesem Sinne wirken muß, und auch experimentell ist von mehreren Beobachtern, wie z. B. Eschbaum, festgestellt worden, daß das Tropfengewicht unter sonst gleichen Verhältnissen mit der Schnelligkeit des Abtropfens merkbar zunimmt. Wenn man die Tropfenmethode künftighin zur Bestimmung der Kapillaritätskonstante benutzen will, wird man diesen Punkt systematisch berücksichtigen müssen.

Fassen wir zum Schluß das Hauptresultat unserer Untersuchung kurz zusammen, so können wir folgendes sagen:

Das Gewicht G eines sich (unendlich langsam) an einer kreisförmigen Scheibe bez. einem solchen Rohr von dem Durchmesser $2r$ bildenden abfallenden Tropfens ist nicht, wie die älteren Autoren annahmen, gleich $2r\pi\alpha$, auch nicht, wie J. Traube nachweisen zu können glaubte, proportional dem Produkte aus der Kapillaritätskonstante und dem Kosinus des Randwinkels, sondern es ist

$$G = 2r\pi\alpha f\left(\frac{r}{a}\right),$$

wobei a und α durch die bekannte Relation $\alpha = \frac{1}{2}a^2\sigma$ (σ das spezifische Gewicht der Flüssigkeit) verbunden sind.

$f(x)$ ist darin eine Funktion, die sich durch einen einfachen analytischen Ausdruck nicht darstellen läßt und in dem in Betracht kommenden Bereiche ihres Argumentes erheblichen Schwankungen unterliegt, so daß also auch nicht, wie manche Autoren angeben, die Gewichte der von Röhren gleichen Durchmessers abfallenden Tropfen verschiedener Flüssigkeiten deren Kapillaritätskonstanten proportional sind. Die Werte von $f(x)$ sind durch die Tab. 2 gegeben, die für das Intervall von $x = 0$ bis $x = 0,2$ noch durch das im Abschnitt VIII Ausgeführte zu ergänzen ist. Man erkennt daraus, daß zwischen $x = 0$ und $x = 0,1$ $f(x)$ von 1 bis 0,805, von $x = 0,1$ alsdann erheblich langsamer abnimmt, bis es für einen Wert von x zwischen 1,0 und 1,4 seinen Minimalwert erreicht. Von letzterem aus steigt $f(x)$ dann wieder.¹⁾

Berlin, im März 1906.

1) Wie die weitere Berechnung mir ergeben hat, erreicht die Funktion $f(x)$ den Wert, den sie für $x = 2$ hat, nicht in ausschließlichem Steigen, sondern indem sie durch ein flaches Maximum hindurchgeht, auf das ein entsprechend wenig ausgeprägtes Minimum folgt. Ich hoffe die so vervollständigte Tabelle demnächst in einem kleinen Nachtrag zu obiger Arbeit bringen zu können, in der ich noch weitere Versuchsergebnisse früherer Beobachter vom Standpunkt der hier entwickelten Theorie zu verwerten gedenke.

(Eingegangen 17. März 1906.)
