Sugli sviluppi in serie

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos \lambda_n x + b_n \operatorname{sen} \lambda_n x)$$

dove le λ_n sono radici della equazione trascendente

$$F(z) \cos \pi z + F_1(z) \operatorname{sen} \pi z = 0.$$

(Di ULISSE DINI, a Pisa.)

1. Nel mio libro sulla *Serie di Fourier, ecc.* (*), alla pag. 190 e segg. allo scopo principalmente di dare una dimostrazione rigorosa della possibilità degli sviluppi per le funzioni $f(x)$ date arbitrariamente fra $-\pi$ e π in serie della forma

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos \lambda_n x + b_n \operatorname{sen} \lambda_n x), \quad (1)$$

dove le λ_n sono radici della equazione

$$z \cos \pi z + a \operatorname{sen} \pi z = 0, \quad (a \text{ cost.}), \quad (2)$$

che si presentano nella fisica matematica, presi in modo più generale a considerare il caso in cui le λ_n sono radici della equazione

$$F(z) \cos \pi z + F_1(z) \operatorname{sen} \pi z = 0, \quad (3)$$

e dimostrai la detta possibilità sotto certe condizioni per le funzioni $f(x)$ e $F(z)$ e $F_1(z)$ che comprendono il caso della equazione (2), venendo allora i coefficienti a_n e b_n dati sotto la forma

$$a_n = \mu_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \lambda_n x \, dx, \quad b_n = \nu_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} \lambda_n x \, dx,$$

(*) *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale* (Pisa, Tip. T. Nistri e C.), 1880.

le μ_n essendo quantità costanti che nel detto libro vennero completamente determinate, e che dipendono dai valori di $F(z)$ e $F_1(z)$ e dalle loro derivate nei punti λ_n .

In quello studio supposi che $F(z)$ e $F_1(z)$ fossero la prima una funzione dispari e la seconda una funzione pari almeno sull'asse delle y , e che la equazione (2) sull'asse delle y non avesse altro che la radice semplice $z=0$, e almeno a destra dell'asse delle y la equazione (2) non avesse altro che radici reali e queste fossèro in numero infinito e tutte semplici e fossèro le $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$; e aggiunsi infine (§ 89, pag. 209) che ove la stessa equazione avesse avuto anche alcune radici complesse a destra dell'asse delle y , o ne avesse avute altre su quest'asse oltre alla radice semplice $z=0$, allora per la possibilità degli sviluppi sarebbe stato necessario di aggiungere negli sviluppi (1) altri termini corrispondenti a queste radici.

Nel caso della equazione (2) essendo dimostrato che le sue radici sono tutte reali e semplici e in numero infinito quando non sia $1 + a\pi \leq 0$, la possibilità degli sviluppi (1) risultò così dimostrata in modo rigoroso e completo; negli altri casi, pure rilevando come potesse darsi che talvolta si presentassero le dette particolarità, lasciai la questione a decidersi nei singoli casi che si fossero presentati; e così in generale restò sempre l'incertezza sulla necessità o meno di aggiungere dei termini agli sviluppi (1), non sapendosi se e in quali casi la equazione (3) avesse altre radici oltre alle radici reali, e quante queste radici potessero essere.

Ci proponiamo ora di rispondere almeno in parte a questa questione relativa alle radici della equazione (2) limitatamente al caso in cui $F(z)$ e $F_1(z)$ sono polinomi razionali interi di z primi fra loro e a coefficienti reali, ma senza porre dapprima alcuna condizione rispetto ai loro gradi e alla parità o disparità di quelli dei loro varii termini.

2. Indicando perciò con $w(z)$ il primo membro della stessa equazione (1), prenderemo a studiare il suo indicatore logaritmico, cioè l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{w'(z)}{w(z)} dz \quad (4)$$

esteso ad un contorno rettangolare formato:

a) da due rette orizzontali sopra e sotto all'asse delle x ambedue alla distanza λ da questo asse, essendo λ un numero che dovrà poi crescere indefinitamente;

b) da due rette verticali condotte una a destra e l'altra a sinistra del-

l'asse delle y a una stessa distanza k , essendo k un numero che supporremo poi grandissimo, che non corrisponde a una radice reale della equazione (3), e pel quale potremo quindi prendere sempre un numero intero μ , o il numero $\mu + \frac{1}{2}$ in mezzo a due numeri interi μ e $\mu + 1$, perchè a distanza assai grande dell'origine, non annullandosi più allora certamente nè $F(z)$ nè $F_1(z)$, nè μ nè $\mu + \frac{1}{2}$ potranno essere radici della equazione (3).

E si intenderà che se su questo contorno venissero per avventura a cadere radici della stessa equazione (3), i punti corrispondenti debbano venire esclusi con piccoli semicerchi col centro in quei punti e volti verso l'interno del campo.

Questo integrale (4) dovrà, come è noto, essere un numero intero, e questo numero quando, come si fa sempre, si contino come m radici i punti d'infinitesimo di $w(z)$ d'ordine m , darà precisamente il numero delle radici della nostra equazione $w(z) = 0$ che saranno contenute entro il detto rettangolo.

3. Per determinare questo numero, distinguiamo il caso in cui $F(z)$ è di grado superiore o uguale a quello di $F_1(z)$ da quello in cui è di grado inferiore, per quanto col mutare z in $z + \frac{1}{2}$ l'un caso si muta nell'altro; e nel primo caso poniamo

$$w(z) = F(z) w_1(z), \quad \text{con} \quad w_1(z) = \cos \pi z + \gamma \sin \pi z, \quad (5)$$

essendo $\gamma = \frac{F_1(z)}{F(z)} = a + ib$; e allora quando $\text{mod } z$ sia superiore al massimo modulo M delle radici della equazione $F(z) = 0$ γ sarà sempre finito, e al crescere indefinito di $\text{mod } z$, e quindi su tutto il contorno del nostro rettangolo quando i suoi lati si allontaneranno all'infinito, γ e così a e b tenderanno a zero quando $F(z)$ sarà di grado superiore a $F_1(z)$, mentre quando $F(z)$ e $F_1(z)$ siano dello stesso grado γ tenderà verso il rapporto $\frac{b_0}{a_0}$ dei coefficienti b_0 e a_0 dei primi termini di $F_1(z)$ e di $F(z)$, che sarà reale e che indicheremo con τ , per modo che in questo caso a tenderà verso τ , e b tenderà ancora verso zero. In ogni caso poi, avendosi

$$\gamma'(z) = \frac{F_1'(z)}{F(z)} - \frac{F_1(z) F'(z)}{F^2(z)},$$

coll'allontanarsi all'infinito dei lati del rettangolo questa derivata $\gamma'(z)$ tenderà a zero; e tutto questo avverrà sempre in modo uniforme per ciascun lato del rettangolo.

Colla posizione (5) avremo $\frac{w'(z)}{w(z)} = \frac{F'(z)}{F(z)} + \frac{w'_1(z)}{w_1(z)}$, e quindi se p sarà il grado di $F(z)$ l'indicatore logaritmico (4) di $w(z)$ si ridurrà a

$$p + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{w'_1(z)}{w_1(z)} dz,$$

perchè, essendo

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{F'(z)}{F(z)} dz$$

l'indicatore logaritmico di $F(z)$, esso è uguale al numero delle radici di $F(z) = 0$ entro il rettangolo e quindi è uguale precisamente a p .

4. Rimarrà così a studiarsi l'altra parte dell'indicatore logaritmico di $w(z)$ che corrisponde precisamente a quello di $w_1(z)$, e per questo osserviamo che tralasciando per ora il fattore $\frac{1}{2\pi i}$ essa potrà scriversi così

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-k}^k \frac{w'_1(x - i\lambda)}{w_1(x - i\lambda)} dx + \int_k^{-k} \frac{w'_1(x + i\lambda)}{w_1(x + i\lambda)} dx + \\ & + i \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{w'_1(k + iy)}{w_1(k + iy)} dy + i \int_{\lambda}^{-\lambda} \frac{w'_1(-k + iy)}{w_1(-k + iy)} dy, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

salvo, come dicemmo sopra, ad avere riguardo al caso degli infinitesimi di $w(z)$ o di $w_1(z)$, o degli infiniti di $\frac{w'_1(z)}{w_1(z)}$ che cadessero sul contorno del rettangolo, quando ce ne fossero.

Per studiare ora il primo e il secondo di questi integrali si osservi che il rapporto $\frac{w'_1(z)}{w_1(z)}$ può scriversi sotto la forma

$$\frac{\pi \gamma + (\gamma' - \pi) \operatorname{tg} \pi z}{1 + \gamma \operatorname{tg} \pi z}, \quad (7)$$

e si osservi inoltre che col sostituire in $\operatorname{tg} \pi z$ a $\operatorname{sen} \pi z$ e a $\operatorname{cos} \pi z$ le loro espressioni per esponenziali si vede che $\operatorname{tg} \pi(x - i\lambda)$ e $\operatorname{tg} \pi(x + i\lambda)$ al crescere indefinito di λ per valori positivi tendono rispettivamente verso $-i$ e verso i per qualunque valore di x fra $-k$ e k e vi tendono in modo uniforme.

Tenendo conto di questo, si riscontra subito che al crescere indefinito di λ il rapporto $\frac{w'_1(z)}{w_1(z)}$ quando $F(z)$ è di grado superiore a quello di $F_1(z)$, nel primo integrale tende in modo uniforme verso πi per tutti i valori di x fra $-k$ e k e nel secondo integrale tende verso $-\pi i$, e sui due lati orizzontali del rettangolo non verranno allora certamente a cadere punti d'infinito di $\frac{w'_1(z)}{w_1(z)}$. Lo stesso poi accadrà se $F(z)$ e $F_1(z)$ saranno dello stesso grado, perchè allora il rapporto precedente (7) tenderà verso $\pi \frac{\tau+i}{1-i\tau}$ cioè ancora verso πi sul lato inferiore del rettangolo, e verso $\pi \frac{\tau-i}{1+i\tau}$ cioè verso $-\pi i$ sul lato superiore; e si può quindi concludere che le parti dell'indicatore logaritmico di $w_1(z)$ relative ai due lati orizzontali del rettangolo prese insieme tenderanno sempre verso $2k$ al crescere indefinito di λ .

5. Restano ora a studiarsi i due ultimi integrali della espressione (6), e per questo incominciando dall'integrale $\int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{w'_1(k+iy)}{w_1(k+iy)} dy$, si osserverà che posto

$$w_1(k+iy) = P + iQ, \quad \text{sarà } w_1(k-iy) = P - iQ,$$

e si avrà

$$w'_1(k+iy) = \frac{1}{i} \frac{dw_1(k+iy)}{dy} = \frac{1}{i} (P'_y + iQ'_y) = -iP'_y + Q'_y,$$

e similmente sarà

$$w'_1(k-iy) = iP'_y + Q'_y,$$

e quindi il detto integrale che può scriversi sotto la forma

$$\int_0^{\lambda} \left\{ \frac{w'_1(k+iy)}{w_1(k+iy)} + \frac{w'_1(k-iy)}{w_1(k-iy)} \right\} dy,$$

si potrà ridurre all'altro

$$\int_0^{\lambda} \left\{ \frac{-iP'_y + Q'_y}{P + iQ} + \frac{iP'_y + Q'_y}{P - iQ} \right\} dy = 2 \int_0^{\lambda} \frac{Q'_y P - P'_y Q}{P^2 + Q^2} dy,$$

e se P non sarà mai zero per $x=k$ e pei valori zero e positivi di y , lo

stesso integrale si potrà scrivere anche sotto la forma

$$2 \int_0^\lambda \frac{d\left(\frac{Q}{P}\right)}{1 + \left(\frac{Q}{P}\right)^2} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{Q_\lambda}{P_\lambda} - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{Q_0}{P_0}.$$

Ma, preso ora $K = \mu$, con μ intero e positivo che non annulli $F(z)$ e tale quindi che per $z = \mu + i y$ non siano mai infiniti nè a nè b , come potrà sempre farsi prendendo μ al di là del massimo modulo M delle radici della equazione $F(z) = 0$, avremo

$$\begin{aligned} P + i Q &= \cos \pi (\mu + i y) + (a + i b) \operatorname{sen} \pi (\mu + i y) = \\ &= \cos \pi \mu \cosh \pi y + i (a + i b) \cos \pi \mu \operatorname{senh} \pi y, \end{aligned}$$

e quindi sarà

$$P = \cos \pi \mu \cosh \pi y (1 - b \operatorname{tgh} \pi y), \quad Q = a \cos \pi \mu \operatorname{senh} \pi y;$$

e ora, osservando che $\operatorname{tgh} \pi y$ per qualunque valore finito e positivo di y è sempre positivo e inferiore ad uno e solo tende ad uno al crescere indefinito di y , e che, per quanto già dicemmo, b al crescere indefinito di $\operatorname{mod} z$ tende a zero e esisterà quindi certamente un numero positivo ν superiore a M e tale che per $z = x + i y$ con $|x| \geq \nu$ si abbia sempre $|b| < 1$, si vede che sulle verticali $x = \pm \mu$ il P , pei valori interi di μ non inferiori a questo numero ν , sarà sempre discosto da zero; e per questo e perchè per $y = 0$ si ha $Q = 0$, avremo $\int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{w'_1(x + i y)}{w_1(x + i y)} dy = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a_\lambda \operatorname{tgh} \pi \lambda}{1 - b_\lambda \operatorname{tgh} \pi \lambda}$; e al limite per $x = \infty$ questo integrale sarà zero se $F(z)$ sarà di grado superiore a quello q di $F_1(z)$ perchè allora a_λ e b_λ al crescere indefinito di λ tenderanno entrambi a zero e $\operatorname{tgh} \pi \lambda$ tenderà verso l'unità; mentre se $F(z)$ e $F_1(z)$ saranno dello stesso grado, siccome allora a_λ al crescere indefinito di λ tenderà verso τ , il limite dello stesso integrale sarà $2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \tau$, essendo $\tau = \frac{b_0}{a_0}$; e questo per qualunque valore del numero intero e positivo μ non inferiore al numero sopra indicato ν (superiore ad M) a partire dal quale b resta sempre numericamente inferiore ad uno.

Similmente, considerando l'ultimo integrale della espressione (6) e osservando che esso può scriversi $-\int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{w'_1(-k + i y)}{w_1(-k + i y)} dy$ e non differisce dal precedente altro che per esservi cambiato k in $-k$ e pel cambiamento di segno

dell'integrale, si vede che esso sarà uguale a zero o a $-2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \tau$ secondochè $F(z)$ sarà di grado superiore o di grado uguale a quello di $F_1(z)$, e si conclude quindi che il valore dell'indicatore logaritmico di $w(z)$ quando il rettangolo si estende all'infinito in basso e in alto restando fermi i lati verticali e alla distanza μ dall'asse delle y sarà $p + 2\mu$, cioè il numero delle radici della equazione (3) che cadono nella striscia di piano compresa fra le due verticali alla distanza μ dall'asse delle y sarà precisamente $p + 2\mu$, essendo p il grado di $F(z)$ e μ un numero intero qualsiasi non inferiore a quel numero ν superiore al massimo modulo M delle radici della equazione $F(z) = 0$ e tale che pei punti $z = x + iy$ pei quali $|x| \geq \nu$ si ha sempre $|b| < 1$ nella espressione di $\gamma = a + ib$.

6. Questo quando $F(z)$ è di grado superiore o uguale a quello di $F_1(z)$. Quando poi $F(z)$ è di grado inferiore a quello q di $F_1(z)$, allora o col cambiare z in $z + \frac{1}{2}$, o col ripetere i calcoli precedenti prendendo

$k = \mu + \frac{1}{2}$ si trova che le radici della equazione (4) comprese nella striscia di piano limitata dalle verticali $x = -\left(\mu + \frac{1}{2}\right)$ e $x = \mu + \frac{1}{2}$ è $q + 2\mu + 1$,

essendo ancora μ un numero intero; e posto ora $\frac{F(z)}{F_1(z)} = \gamma_1 = a_1 + ib_1$, bisognerà che $\mu + \frac{1}{2}$ non sia inferiore a quel numero ν_1 superiore al massimo modulo M_1 delle radici della equazione $F_1(z) = 0$ e tale che quando $|x| \geq \nu_1$ si ha sempre $|b_1| < 1$ nella espressione di $\gamma_1 = a_1 + ib_1$.

7. Così prendendo nel primo o nel secondo caso

$$k = \pm \mu, \text{ o } k = \pm \left(\mu + \frac{1}{2}\right),$$

essendo μ un numero intero qualsiasi tale che μ o $\mu + \frac{1}{2}$ non siano inferiori rispettivamente ai numeri ν o ν_1 sopra indicati, si vede che col crescere μ di una unità il numero delle radici della equazione (3) che cadono nella striscia di piano così aumentata si accresce di 2.

Osservando poi che al di là di quei numeri ν e ν_1 la $F(z)$ nel primo caso, e la $F_1(z)$ nel secondo non si annullano più, si vede subito che nel passare sull'asse reale da $x = \pm \mu$ a $x = \pm (\mu + 1)$ o da $x = \pm \left(\mu + \frac{1}{2}\right)$ a

$x = \pm \left(\mu + \frac{1}{2} + 1 \right)$ la funzione $w(x)$ cambia segno e si annulla quindi in questo passaggio; e così si può ora evidentemente affermare che le radici della nostra equazione (3) al di là delle verticali $x = \pm \mu_0$ e $x = \pm \left(\mu_0 + \frac{1}{2} \right)$ con μ_0 numero intero e μ_0 e $\mu_0 + \frac{1}{2}$ uguali o immediatamente superiori ai numeri sopra indicati ν e ν_1 , saranno sempre reali e semplici e compresa ciascuna fra i numeri μ e $\mu + 1$ e $-\mu$ e $-(\mu + 1)$ nel primo caso, e fra i numeri $\mu + \frac{1}{2}$ e $\mu + \frac{1}{2} + 1$, e $-\left(\mu + \frac{1}{2} \right)$ e $-\left(\mu + \frac{1}{2} + 1 \right)$ nel secondo; e conseguentemente le radici immaginarie quando vi saranno cadranno tutte nella striscia di piano compresa fra le verticali $x = -\mu_0$ e $x = \mu_0$ nel primo caso e fra le altre $x = -\left(\mu_0 + \frac{1}{2} \right)$ e $x = \mu_0 + \frac{1}{2}$ nel secondo e saranno quindi in numero finito non superiore a $p + 2\mu_0$ o $q + 2\mu_0 + 1$, essendo μ_0 il primo numero intero non inferiore a ν nel primo caso, e tale invece che $\mu_0 + \frac{1}{2}$ non sia inferiore a ν_1 nel secondo caso.

E si può del resto anche aggiungere che se k_0 sarà un numero reale e positivo eguale o superiore all'ultima radice reale e positiva della equazione $F(z) = 0$ o dell'altra $F_1(z) = 0$, allora anche fra due numeri interi consecutivi qualsiasi h e $h + 1$ nel primo caso, e fra due numeri $h + \frac{1}{2}$ e $h + \frac{1}{2} + 1$ nel secondo (con h intero e compreso fra k_0 e μ_0) la nostra equazione (3) avrà sempre almeno una radice reale perchè $w(h)$ e $w(h + 1)$ nel primo caso e $w\left(h + \frac{1}{2}\right)$ e $w\left(h + \frac{1}{2} + 1\right)$ nel secondo saranno di segno contrario.

Una osservazione simile può farsi per le radici reali e negative.

8. La determinazione dei numeri ν e ν_1 e quindi dei due μ_0 e $\mu_0 + \frac{1}{2}$ che servono a limitare le striscie di piano entro le quali cadono le radici complesse della nostra equazione quando ve ne sono, potrà farsi caso per caso.

In generale però ponendoci ad es. nel caso in cui $F(z)$ è di grado p superiore a quello q di $F_1(z)$ si può osservare che se sarà

$$\begin{aligned} F(z) &= a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_{p-1} z + a_p, \\ F_1(z) &= b_0 z^q + b_1 z^{q-1} + \dots + b_{q-1} z + b_q, \end{aligned}$$

e se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ saranno le radici (reali o complesse) della equazione $F(z)=0$ dei rispettivi ordini di molteplicità $p_1, p_2, \dots, p_k$ (essendo quindi $p_1 + p_2 + \dots + p_k = p$), avremo

$$\frac{F_1(z)}{F(z)} = \frac{1}{a_0 z^{p-q}} \frac{b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots + \frac{b_q}{z^q}}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{z}\right)^{p_1} \left(1 - \frac{\alpha_2}{z}\right)^{p_2} \dots \left(1 - \frac{\alpha_k}{z}\right)^{p_k}},$$

e indicando con g un limite superiore dei moduli delle radici della $F(z)=0$ (*) e con $\bar{b}$ il massimo fra i valori assoluti dei coefficienti di $F_1(z)$, e intendendo, come può sempre supporre, che a_0 sia positivo, si vede subito che quando sia $\text{mod } z \geq g+1$ avremo

$$\left| \frac{F_1(z)}{F(z)} \right| \leq \frac{\bar{b}}{a_0 m^p |z|^{p-q}} \left\{ 1 + \frac{1}{g+1} + \frac{1}{(g+1)^2} + \dots + \frac{1}{(g+1)^q} \right\}, \quad (8)$$

ovvero se non sarà $g=0$

$$\left| \frac{F_1(z)}{F(z)} \right| \leq \frac{\bar{b}(g+1)}{a_0 g m^p |z|^{p-q}} \left\{ 1 - \frac{1}{(g+1)^{q+1}} \right\},$$

essendo m il minimo modulo delle differenze $1 - \frac{\alpha_1}{z}, 1 - \frac{\alpha_2}{z}, \dots, 1 - \frac{\alpha_k}{z}$ quando $\text{mod } z \geq g+1$.

Osservando ora che per ogni radice α_t di $F(z)=0$ quando $\text{mod } z \geq g+1$ si ha $\left| \frac{\alpha_t}{z} \right| \leq \frac{g}{g+1}$, si vede che le differenze $1 - \frac{\alpha_t}{z}$ avranno un modulo che non sarà inferiore a $1 - \frac{g}{g+1}$ o a $\frac{1}{g+1}$, quindi sarà $m \geq \frac{1}{g+1}$ e

$$\left| \frac{F_1(z)}{F(z)} \right| \leq \frac{\bar{b}(g+1)^{p+1}}{a_0 g |z|^{p-q}} \left\{ 1 - \frac{1}{(g+1)^{q+1}} \right\}, \quad (9)$$

(*) Il numero g sarà naturalmente superiore o eguale al massimo modulo delle radici della equazione $F(z)=0$ che indicammo sopra con M , e per esso potrà prendersi ad es. la radice positiva della equazione

$$a_0 z^p - a'_1 z^{p-1} - a'_2 z^{p-2} - \dots - a'_{p-1} z - a'_p = 0$$

essendo $a'_1, a'_2, \dots, a'_{p-1}, a'_p$ i valori assoluti dei coefficienti di $F(z)$ (V. mia Nota *Sui limiti superiori e inferiori dei moduli delle radici di una equazione algebrica*. Annali di Mat., tom. I, serie III, pag. 77 e seg.).

sempre nel supposto che non sia $g=0$; e se vorremo che il modulo di $\frac{F_1(z)}{F(z)}$, e quindi anche il valore assoluto di b in $\gamma = \frac{F_1(z)}{F(z)} = a + ib$ sia inferiore ad uno, basterà che oltre ad essere $\text{mod } z \geq g+1$ sia

$$\text{mod } z > \sqrt[p-q]{\frac{\bar{b} \{ (g+1)^{p+1} - (g+1)^{p-q} \}}{a_0 g}},$$

ovvero

$$\text{mod } z > (g+1) \sqrt[p-q]{\frac{\bar{b}}{a_0 g} \{ (g+1)^{q+1} - 1 \}};$$

cioè potremo prendere per v un numero superiore ma vicino quanto si vuole a

$$(g+1) \sqrt[p-q]{\frac{\bar{b}}{a_0 g} \{ (g+1)^{q+1} - 1 \}},$$

o più semplicemente

$$v = (g+1)^{\frac{p+1}{p-q}} \sqrt[p-q]{\frac{\bar{b}}{a_0 g}}$$

quando questo valore di v non risulti inferiore a $g+1$, mentre se risulterà inferiore a $g+1$ potremo prendere senz'altro $v = g+1$.

E nel caso che sia $g=0$, il che avverrà quando sia $F(z) = a_0 z^p$, e le $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ si ridurranno a una sola che sarà zero, allora venendo ad essere $m=1$ la (8) si ridurrà all'altra

$$\left| \frac{F_1(z)}{F(z)} \right| \leq \frac{\bar{b} (q+1)}{a_0 |z|^{p-q}}, \quad (10)$$

e quindi basterà prendere per v il maggiore dei due numeri $\sqrt[p-q]{\frac{\bar{b}}{a_0}} (q+1)$ e 1.

Se poi $F(z)$ e $F_1(z)$ saranno dello stesso grado p , osservando che il coefficiente dell'immaginario è lo stesso in γ e in $\gamma - \frac{b_0}{a_0}$ e si ha

$$\frac{F_1(z)}{F(z)} - \frac{b_0}{a_0} = \frac{(a_0 b_1 - a_1 b_0) z^{p-1} + (a_0 b_2 - a_2 b_0) z^{p-2} + \dots + (a_0 b_p - a_p b_0)}{a_0 F(z)}, \quad (11)$$

indicando con A il massimo fra i valori assoluti dei determinanti $a_0 b_1 - a_1 b_0, a_0 b_2 - a_2 b_0, \dots, a_0 b_p - a_p b_0$ e applicando i risultati precedenti si vede che se g e $a_0 b_1 - a_1 b_0$ non saranno zero basterà prendere per v il maggiore dei

due numeri $\frac{A}{\alpha_0^2 g}(g+1)^{g+1}$ e $g+1$, e se g sarà zero basterà prendere per v il maggiore dei due numeri $\frac{A}{\alpha_0^2} p$ e 1 o $\frac{\bar{b} p}{\alpha_0}$ e 1 perchè in questo caso $A = \alpha_0 \bar{b}$, essendo ancora $\bar{b}$ il massimo fra i valori assoluti dei coefficienti di $F_1(z)$; e se il coefficiente $\alpha_0 b_1 - \alpha_1 b_0$ solo o insieme ad alcuni altri dei primi coefficienti del secondo membro delle (11) saranno zero, questi numeri potranno leggermente cambiarsi.

Valori simili possono trovarsi per v_1 quando il grado p di $F(z)$ è inferiore a quello q di $F_1(z)$.

9. Così è determinata la striscia di piano tutta a distanza finita e compresa fra le due verticali $x = -\mu_0$ e $x = \mu_0$ o $x = -\left(\mu_0 + \frac{1}{2}\right)$ e $x = \mu_0 + \frac{1}{2}$ entro la quale verranno a cadere le radici complesse della nostra equazione quando ve ne siano.

Volendo poi, possiamo trovare anche due numeri $-y_0$ e y_0 fra i quali sarà sempre compreso il coefficiente dell'immaginario delle radici complesse della nostra equazione (3) quando ci siano, e per questo osserveremo prima che essendo $F(z)$ e $F_1(z)$ polinomi primi fra loro, queste radici non potranno annullare nè l'uno nè l'altro di questi polinomi, perchè altrimenti dovrebbero annullare $\sin \pi z$ o $\cos \pi z$ e questo è inammissibile; quindi basterà trovare un numero positivo y_0 tale che per $|y| \geq y_0$ la quantità

$$1 + \gamma \operatorname{tg} \pi (x + i y)$$

quando $F(z)$ è di grado superiore o uguale a quello di $F_1(z)$, o l'altra $1 + \operatorname{tg} \pi (x + i y)$ quando $F(z)$ è di grado inferiore a quello di $F_1(z)$ hanno sempre moduli discosti da zero qualunque sia x .

Ora osservando che con y diverso da zero pel quadrato del modulo di $\operatorname{tg} \pi (x + i y)$ si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \pi (x + i y) \operatorname{tg} \pi (x - i y) &= \frac{\operatorname{sen}^2 \pi x \cosh^2 \pi y + \cos^2 \pi x \operatorname{senh}^2 \pi y}{\cos^2 \pi x \cosh^2 \pi y + \operatorname{sen}^2 \pi x \operatorname{senh}^2 \pi y} = \\ &= \frac{\cosh^2 \pi y - \cos^2 x}{\cosh^2 \pi y - \operatorname{sen}^2 x} \leq \frac{\cosh^2 \pi y}{\cosh^2 \pi y - 1}, \end{aligned}$$

si vede subito che per qualunque valore di x sarà

$$|\operatorname{tg} \pi (x + i y)| \leq \frac{1}{\operatorname{tgh} |\pi y|},$$

mentre per $x = 0$ o multiplo intero di π sarà anche $|\operatorname{tg} \pi(x + i y)| = \operatorname{tgh} |\pi y|$; quindi ponendoci nel caso di $F(z)$ di grado superiore a quello di $F_1(z)$ e osservando che allora al crescere indefinito di y il prodotto $\gamma \operatorname{tg} \pi(x + i y)$ tende a zero, e quindi da un certo valore di y in poi ha sempre il modulo < 1 , si vede che basterà che y non sia numericamente inferiore a un valore y_0 dopo il quale si ha $\frac{\gamma}{\operatorname{tgh} |\pi y|} < 1$, perchè $w(z)$ non sia mai zero.

Ma nel caso di $F(z)$ di grado p superiore a quello q di $F_1(z)$, colle notazioni del paragrafo precedente quando sia $\operatorname{mod} z \geq g + 1$ e g non sia zero si ha per la (9)

$$|\gamma| < \frac{\bar{b}(g+1)^{p+1}}{a_0 g (x^2 + y^2)^{\frac{p-q}{2}}} \text{ e anche, qualunque sia } x, |\gamma| < \frac{\bar{b}(g+1)^{p+1}}{a_0 g |y|^{p-q}};$$

quindi perchè le condizioni che vogliamo riescano soddisfatte basterà che sia $|y| \geq g + 1$ e al tempo stesso

$$|y|^{p-q} \operatorname{tgh} |\pi y| \geq \frac{\bar{b}(g+1)^{p+1}}{a_0 g}; \quad (12)$$

e dovendo essere $|y| \geq g + 1$ basterà che sia

$$|y|^{p-q} \geq \frac{\bar{b}(g+1)^{p+1}}{a_0 g \operatorname{tgh} \pi(g+1)}.$$

Ora se effettivamente il numero $\left[\frac{\bar{b}(g+1)^{p+1}}{a_0 g \operatorname{tgh} \pi(g+1)} \right]^{\frac{1}{p-q}}$ risulterà superiore o uguale a $g + 1$, prendendo per $|y|$ questo numero o un numero maggiore la condizione (12) verrà soddisfatta e potremo prendere per y_0 questo numero; se poi lo stesso numero risulterà inferiore a $g + 1$ la (11) verrà certamente soddisfatta quando per $|y|$ si prenda $g + 1$ o un numero maggiore: talchè si può ora affermare che quando $F(z)$ sia di grado superiore a quello di $F_1(z)$ e g non sia zero, basterà prendere per y_0 il più grande dei due numeri $\left[\frac{\bar{b}(g+1)^{p+1}}{a_0 g \operatorname{tgh} \pi(g+1)} \right]^{\frac{1}{p-q}}$ e $g + 1$ per essere certi che per $|y|$ uguale o superiore a y_0 la $w(z)$ non si annullerà mai.

Se poi g sarà zero allora poichè per la (10) si ha $|\gamma| < \frac{\bar{b}(g+1)}{a_0 (x^2 + y^2)^{\frac{p-q}{2}}}$,

si vede al modo stesso che basterà prendere per y_0 il più grande dei due numeri $\left[\frac{\bar{b}(q+1)}{a_0 \operatorname{tgh} \pi} \right]^{\frac{1}{p-q}}$ e 1 per essere sicuri che per $|y|$ uguale o superiore a y_0 la $w(z)$ non si annullerà mai.

Con leggere modificazioni tenendo conto della formola (12) si troverà il numero y_0 pel caso che $F(z)$ e $F_1(z)$ siano dello stesso grado; e così con procedimenti simili potrà trattarsi il caso in cui $F(z)$ è di grado inferiore a quello di $F_1(z)$.

E così trovati in ogni caso, coi processi indicati nei due ultimi paragrafi, i numeri μ_0 e y_0 saremo certi che le radici complesse della nostra equazione (3) quando vi siano saranno tutte comprese nel rettangolo R limitato dalle due orizzontali $y = -y_0$ e $y = y_0$ e dalle due verticali $x = -\mu_0$ e $x = \mu_0$ nel caso di $F(z)$ di grado p superiore o uguale a quello q di $F_1(z)$, e dalle due orizzontali $y = -y_0$ e $y = y_0$ e dalle due verticali $x = -\left(\mu_0 + \frac{1}{2}\right)$ e $x = \mu_0 + \frac{1}{2}$ nel caso di $F(z)$ di grado inferiore a quello di $F_1(z)$; e il numero delle radici fra reali e complesse (quando anche di queste ve ne siano) che cadranno nello stesso rettangolo sarà $p + 2\mu_0$ nel primo caso e $q + 2\mu_0 + 1$ nel secondo.

Applicazione ad alcune equazioni particolari.

10. I risultati ottenuti permettono almeno in molti casi di determinare effettivamente il numero delle radici complesse della equazione data (3) quando ve ne sono.

Fermandoci in particolare sul caso in cui dei due polinomi $F(z)$ e $F_1(z)$ uno ha tutti i suoi termini di grado pari, e l'altro li ha tutti di grado dispari, si vede subito che allora per ogni radice α diversa da zero (reale o complessa) si avrà anche la radice $-\alpha$, e quindi il numero delle radici diverse da zero e comprese nel detto rettangolo R dovrà essere un numero pari.

Ora, se il polinomio $F(z)$ sarà tutto di grado dispari p superiore a quello (pari) di $F_1(z)$, si vede che la nostra equazione (3) avrà certamente la radice zero, e questa dovrà essere di un ordine di molteplicità dispari, e pre-

cisamente — essendo $w'(0) = F'(0) + \pi F_1(0)$ e $w''(0) = 0$ — sarà di primo ordine se questa quantità $F'(0) + \pi F_1(0)$ sarà diversa da zero, e sarà almeno del terz'ordine se la stessa quantità sarà zero: e in generale essendo t l'ordine (dispari) di molteplicità della radice zero, il numero delle altre radici contenute nel detto rettangolo sarà il numero pari $p - t + 2\mu_0$.

Invece se $F(z)$ sarà tutta di grado pari, e quindi $F_1(z)$ sarà tutta di grado dispari, allora poichè, annullandosi $F_1(z)$ per $z = 0$ non potrà annullarsi $F(z)$ perchè questi due polinomi devono naturalmente supporsi primi fra loro, la nostra equazione (3) in questo caso non ammetterà la radice $z = 0$, e il numero delle radici di essa nel detto rettangolo R sarà precisamente il numero pari $p + 2\mu_0$, ma potrà ancora rappresentarsi con $p - t + 2\mu_0$ intendendo che in questo caso sia $t = 0$; e così i due casi di $F(z)$ tutta di grado dispari o $F(z)$ tutta di grado pari potranno trattarsi insieme.

Per determinare ora il numero delle radici complesse che potranno trovarsi fra le $p - t + 2\mu_0$ radici diverse da zero che cadranno nel rettangolo R , si determineranno prima quelle reali e positive che cadono fra 0 e μ_0 (0 e μ_0 escl.) e quelle puramente immaginarie che cadono fra 0 e iy_0 (0 e iy_0 escl.), cioè le radici reali e positive delle equazioni

$$F(x) \cos \pi x + F_1(x) \sin \pi x = 0, \quad (13)$$

e

$$F(iy) \cosh \pi y + i F_1(iy) \sinh \pi y = 0, \quad (14)$$

e se si troverà che il numero delle radici reali fra 0 e μ_0 (0 escl.) della prima di queste equazioni è r e se questo numero sarà precisamente $\frac{p-t}{2} + \mu_0$ la equazione (3) avrà soltanto radici reali, mentre se r sarà inferiore a $\frac{p-t}{2} + \mu_0$ vi saranno certamente anche radici puramente immaginarie, o radici effettivamente complesse (cioè colle parti reale e immaginaria entrambe diverse da zero).

Allora se il numero pari $p - t + 2\mu_0 - 2r$ sarà un numero non divisibile per 4 vi saranno certamente anche radici puramente immaginarie, e in particolare se sarà $p - t + 2\mu_0 - 2r = 2$ vi sarà una radice $i\bar{y}$ fra 0 e iy_0 (*), e una uguale e di segno contrario, e $\bar{y}$ si troverà cercando la radice

(*) Ordinariamente le radici reali e positive della equazione (14) saranno assai inferiori al numero y_0 che si determinò coi processi del paragrafo precedente, perchè, come già allora

positiva della equazione (14) fra 0 e y_0 ; e più generalmente se $p - t + 2\mu_0 - 2r$ sarà il numero pari $2s$, allora quando s sia pari queste $2s$ radici potranno essere tutte o parte puramente immaginarie, o tutte o parte assolutamente complesse, mentre se s sarà un numero dispari allora 2 almeno delle stesse radici saranno puramente immaginarie, e le altre potranno essere anche tutte assolutamente complesse, le radici assolutamente complesse in ogni caso quando vi sono dovendo essere in numero multiplo di 4 perchè due a due saranno uguali e di segno contrario e due a due saranno conjugate, mentre quelle puramente immaginarie dovranno sempre trovarsi metà sulla parte superiore dell'asse delle y e l'altra metà sulla parte inferiore nei punti simmetrici.

E quando la equazione (14) venga ad avere radici diverse da zero e positive in numero precisamente uguale a $\frac{p-t}{2} + \mu_0 - r$, allora la nostra equazione (3) non avrà affatto radici assolutamente complesse.

E in generale si può dire che, in questo caso in cui $F(z)$ è di grado p superiore a quello di $F_1(z)$, se t sarà l'ordine di molteplicità della radice $z=0$ della equazione (3), r sarà il numero delle radici reali e positive della stessa equazione inferiori a μ_0 e r_i quello delle radici puramente immaginarie che cadono sulla parte positiva dell'asse delle y allora il numero delle radici assolutamente complesse che cadranno nella striscia di piano compresa fra le verticali $x = -\mu$ e $x = \mu$ sarà precisamente $p + 2\mu_0 - t - 2r - 2r_i$, e questo numero dovrà risultare zero o essere divisibile per 4, e quindi il numero delle radici assolutamente complesse a destra dell'asse delle y (cioè colla parte reale diversa da zero e positiva) quando vi siano sarà $\frac{p-t}{2} + \mu_0 - r - r_i$ e questo numero dovrà essere un numero pari.

11. Applichiamo ora i risultati ottenuti a qualche esempio, con che apparirà anche meglio l'importanza dei risultati medesimi.

1.º Supponiamo in primo luogo che la equazione data (3) sia la se-

notammo, il modulo di $\operatorname{tg} \pi (x + iy)$ sull'asse delle y è $\operatorname{tgh} |\pi y|$, mentre negli altri punti può dirsi soltanto inferiore a $\frac{1}{\operatorname{tgh} |\pi y|}$, e allora dovemmo tenere conto di questo limite assai superiore per trovare y_0 . Propriamente per le radici puramente immaginarie basterà prendere y_0 maggiore della massima radice reale e positiva della equazione $F(iy) = 0$, e al tempo stesso in modo che sia $\gamma \operatorname{tgh} |\pi y| < 1$, o anche più semplicemente $|\gamma| > 1$ se $F(z)$ è di grado superiore a quello di $F(z)$, ecc.

guente

$$w(z) = z \cos \pi z + \alpha \operatorname{sen} \pi z = 0 \quad (15)$$

che capita nella fisica matematica, con α costante reale diversa da zero qualsiasi.

In questo caso sarà $p=1$, e la equazione ammetterà la radice $z=0$ che sarà una radice semplice se $1+\alpha\pi$ sarà diverso da zero, mentre sarà multipla e del terz'ordine se sarà $1+\alpha\pi=0$ per modo che avremo $t=1$ quando $1+\alpha\pi \geq 0$ e $t=3$ quando $1+\alpha\pi=0$.

Il numero μ_0 per quanto dicemmo nel § 8 sarà il primo numero intero non inferiore al maggiore dei due numeri $|\alpha|$ e 1, e le radici assolutamente complesse a destra dell'asse delle y quando ve ne siano avranno la parte reale inferiore a μ_0 e il loro numero sarà $\frac{1-t}{2} + \mu_0 - r - r_i$ (con $t=1$ o $t=3$) che dovrà essere un numero pari, e quando non ve ne siano questo numero sarà zero.

Ora per quanto dicemmo in fine del § 8 fra 1 e μ_0 vi saranno almeno $\mu_0 - 1$ radici reali, quindi dovrà essere intanto $r \geq \mu_0 - 1$ e conseguentemente se $t=3$ cioè nel caso di $1+\alpha\pi=0$ bisognerà che sia necessariamente $r=\mu_0 - 1$ e $r_i=0$ e le radici della nostra equazione (15) in questo caso di $1+\alpha\pi=0$ saranno tutte reali essendo però tripla la radice $z=0$ e le altre essendo tutte semplici e essendovene sempre una e una sola fra due numeri interi consecutivi positivi o negativi, cioè fra 1 e 2, fra 2 e 3, fra 3 e 4, ... e fra -1 e -2 , fra -2 e -3 , fra -3 e -4 , ... senza che ve ne siano fra 0 e 1 nè fra 0 e -1 all'infuori della radice zero.

Se poi $1+\alpha\pi > 0$ sarà $t=1$, e poichè $w(x)$ per x positivo e prossimo a zero sarà positivo mentre per $x=1$ è negativo avremo una radice reale diversa da zero anche fra zero e 1 e quindi sarà $r=\mu_0$, $r_i=0$ e la nostra equazione (15) avrà tutte le radici reali e semplici, essendo semplice ora anche la radice zero, e essendovene ora una anche fra 0 e 1 e una fra 0 e -1 , e le altre essendo ancora comprese ciascuna fra due numeri interi consecutivi qualsiasi e diversi da questi numeri.

Infine se $1+\alpha\pi < 0$, allora, siccome $w(x)$ per x positivo e piccolissimo è negativo come è negativo per $x=1$, fra 0 e 1 non vi potrebbero essere che un numero pari di radici o nessuna, mentre dalla considerazione del solito numero $\frac{1-t}{2} + \mu_0 - r - r_i$ si vede che non ve ne potrebbe essere che una, quindi fra 0 e 1 non ve ne sarà nessuna, e riducendosi così il

numero stesso a $1 - r_i$ dovrà essere $r_i = 1$, e si avrà una radice puramente immaginaria sull'asse positivo delle y e una nel punto simmetrico sullo stesso asse, le altre radici essendo una semplice nel punto zero e le altre ancora reali e semplici e comprese come nel caso di $1 + a\pi = 0$ fra ± 1 e ± 2 , fra ± 2 e ± 3 , fra ± 3 e ± 4 , ecc. . . .

E del resto in questo caso, riducendosi la equazione (14) alla seguente

$$y \cosh \pi y + a \sinh \pi y = 0$$

e il primo membro di questa equazione per y positivo e piccolissimo essendo negativo perchè $1 + a\pi < 0$ mentre per y positivo e sufficientemente grande è positivo, si vede anche da questo che essa avrà effettivamente una radice positiva e non ne ha che una perchè la derivata del suo primo membro per $y > 0$ è sempre negativa.

E la radice secondo quanto dicemmo nella nota del paragrafo precedente sarà inferiore ad $|a|$, come del resto apparisce subito anche dall'esame del primo membro della stessa equazione.

3.º Consideriamo ora il caso più generale della equazione

$$z^{2m+1} \cos \pi z + a \sin \pi z = 0 \quad (16)$$

con m intero e positivo, e a diverso da zero. Si vedrà subito intanto che per $z = 0$ avremo soltanto una radice semplice e quindi sarà $t = 1$, e il solito numero $\frac{p-t}{2} + \mu_0 - r - r_i$ si ridurrà a $m + \mu_0 - r - r_i$ essendo ora μ_0

il primo numero intero non inferiore al maggiore dei due numeri $|\sqrt[2m+1]{a}|$ e 1.

Ora se $a > 0$ essendovi certamente almeno una radice reale fra 0 e 1, si vede subito che avremo almeno μ_0 radici reali diverse da zero e positive comprese fra 0 e 1, fra 1 e 2, fra 2 e 3, . . . , fra $\mu_0 - 1$ e μ_0 , e sarà quindi $r \geq \mu_0$, mentre se $a < 0$, non potendo assicurare che vi siano radici fra 0 e 1 potremo soltanto affermare che $r \geq \mu_0 - 1$, e quando ve ne siano anche altre, queste dovranno essere un numero pari $\overline{2r}$, per modo che avremo $r = \mu_0 + \overline{2r}$ per $a > 0$ e avremo $r = \mu_0 - 1 + \overline{2r}$ per $a < 0$.

Il numero $m + \mu_0 - r - r_i$ nel caso di $a > 0$ si ridurrà dunque a $m - \overline{2r} - r_i$ e nel caso di $a < 0$ si ridurrà a $m + 1 - \overline{2r} - r_i$, e questi numeri dovranno essere zero o essere numeri pari; e quindi le radici effettivamente complesse della nostra equazione (16) a destra dell'asse delle y in questi rispettivi casi di $a > 0$ e $a < 0$ saranno $m - \overline{2r} - r_i$ e $m + 1 - \overline{2r} - r_i$ quando questi numeri siano diversi da zero.

In particolare dunque per $m = 1$, cioè per la equazione

$$z^3 \cos \pi z + a \sin \pi z = 0 \quad (17)$$

quando $a > 0$, riducendosi il numero precedente a $1 - \overline{2r} - r_i$, non potrà essere che $\overline{2r} = 0$ con $r_i = 1$, cioè avremo per questa equazione la radice semplice zero e le radici pure semplici e reali sopra indicate compresa una fra 0 e ± 1 , una fra ± 1 e ± 2 , una fra ± 2 e ± 3 , una fra ± 3 e $\pm 4, \dots$ e avremo una radice puramente immaginaria sull'asse positivo delle y e una nel punto simmetrico sullo stesso asse, e per queste il coefficiente dell'immaginario, per quanto dicemmo nella nota al paragrafo precedente, è inferiore in valore assoluto al numero $|\sqrt[3]{a}|$. Ciò del resto risulta anche dall'osservare che in questo caso la equazione (14) si riduce all'altra

$$-y^3 \cosh \pi y + a \sinh \pi y = 0 \quad (18)$$

che ha appunto una radice positiva inferiore a $\sqrt[3]{a}$, e non ne ha che una sola perchè la derivata del suo primo membro per $y > 0$ è sempre negativa, ecc. . . .

Invece, sempre per la equazione (17) quando $a < 0$, riducendosi allora il numero $m + 1 - \overline{2r} - r_i$ a $2 - \overline{2r} - r_i$, e in questo caso essendo certamente $r_i = 0$ perchè la corrispondente equazione (18) non ha radici positive, si vede subito che ora o vi saranno altre due radici reali, o vi saranno due radici assolutamente complesse e conjugate a destra dell'asse delle y .

Ponendo $a = -a_1$ con $a_1 > 0$ e scrivendo la equazione (17) per z reale sotto la forma $\cos \pi x (x^3 - a_1 \operatorname{tg} \pi x) = 0$ si può osservare in particolare che se sarà $a_1 < \frac{1}{4^3}$, il primo membro di questa equazione, che per x positivo e piccolissimo è negativo, per $x = \sqrt[3]{a_1} < \frac{1}{4}$ sarà positivo e quindi fra 0 e $\sqrt[3]{a_1}$ avremo una radice, e fra $\sqrt[3]{a_1}$ e 1 o anche fra $\sqrt[3]{a_1}$ e $\frac{1}{2}$ ne avremo una altra, e quindi la nostra equazione

$$z^3 \cos \pi z - a_1 \sin \pi z = 0 \quad (19)$$

con $0 < a_1 < \frac{1}{4^3}$ avrà la radice zero e tutte le altre sue radici saranno reali e semplici e comprese due fra 0 e $\frac{1}{2}$ e due fra 0 e $-\frac{1}{2}$ e le altre fra ± 1 e ± 2 , fra ± 2 e $\pm 3, \dots$

In modo simile potremmo studiare altri casi.

4.º Per accennare anche a un caso in cui nella equazione (3) $F(z)$ è di grado pari, e $F_1(z)$ è di grado dispari, consideriamo la equazione

$$(z^2 + b) \cos \pi z + a z \sin \pi z = 0 \quad (20)$$

con a e b diversi da zero.

Allora sarà $t = 0$, e μ_0 per quanto dicemmo al § 8 sarà il primo numero intero non inferiore al maggiore dei due numeri $(\sqrt{|b|} + 1)^2 \sqrt{\frac{|a|}{\sqrt{|b|}}}$ e $\sqrt{|b|} + 1$;

e il solito numero $\frac{p-t}{2} + \mu_0 - r - r_i$ si ridurrà a $1 + \mu_0 - r - r_i$; e se b sarà positivo avremo almeno μ_0 radici positive poste fra 0 e 1, fra 1 e 2, fra 2 e 3, ..., fra $\mu_0 - 1$ e μ_0 per modo che potremo porre $r = \mu_0 + \overline{2r}$ e il detto numero si ridurrà a $1 - \overline{2r} - r_i$.

Ne segue che dovrà essere $\overline{2r} = 0$ e $r_i = 1$, e quindi la nostra equazione (20) in questo caso di $b > 0$ non avrà radici assolutamente complesse ma avrà una radice puramente immaginaria sull'asse positivo delle y e una nel punto simmetrico sullo stesso asse, e le altre radici saranno tutte reali e semplici e comprese fra 0 e ± 1 , fra 1 e ± 2 , fra 2 e ± 3 , ...

Il coefficiente dell'immaginario nella radice puramente immaginaria situata sull'asse positivo delle y sarà la radice positiva della equazione

$$(-y^2 + b) \cosh \pi y - a y \sinh \pi y = 0,$$

e per quanto dicemmo nella nota al paragrafo precedente sarà inferiore alla radice positiva della equazione

$$y^2 - |a| y - b = 0, \quad \text{cioè a} \quad \frac{|a| + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Nel caso poi di $b < 0$, ponendo $b = -b_1$ con che b_1 sarà positivo, la nostra equazione (20) considerata per z reale e $= x$ si potrà scrivere sotto la forma

$$(x^2 - b_1) \cos \pi x + a x \sin \pi x = 0 \quad (21)$$

e poichè essendo μ_0 uguale o superiore a $\sqrt{b_1} + 1$ sarà $b_1 \leq (\mu_0 - 1)^2$, se si considerano i quadrati $0, 1^2, 2^2, 3^2, \dots, (\mu_0 - 1)^2$ dei numeri interi da 0 fino

a $\mu_0 - 1$ inclusive, b_1 sarà compreso fra due di questi quadrati o sarà uguale ad uno di essi.

Riservandoci ora di esaminare il caso in cui b_1 è il quadrato di un numero intero, osserviamo intanto che se b_1 sarà compreso fra 0 e 1, per x positivo e piccolissimo il primo membro della equazione precedente (21) sarà negativo e lo stesso accadrà anche per $x = 1$, mentre per gli altri valori interi e positivi di x i segni verranno alternati, e così intanto quando b_1 è compreso fra 0 e 1 la nostra equazione (20) o (21) fra 0 e 1 non avrà radici o ne avrà un numero pari, mentre fra due altri numeri interi successivi ne avrà sempre almeno una, e quindi sarà $r = \mu_0 - 1 + \overline{2r}$.

Se poi b_1 sarà compreso fra i due quadrati successivi h^2 e $(h+1)^2$ con $h \geq 1$ e $h+1 \leq \mu_0 - 1$ avremo almeno una radice della equazione (21) fra 0 e 1, e così una fra 1 e 2, fra 1 e 3, ..., fra $h-1$ e h , fra $h+1$ e $h+2$, ... e fra $\mu_0 - 1$ e μ , mentre non ne avremo affatto o ne avremo un numero pari fra h e $h+1$, e quindi sarà ancora $r = \mu_0 - 1 + \overline{2r}$, e così per ogni valore di b_1 che non sia il quadrato di un numero intero il solito numero $\frac{p-t}{2} + \mu_0 - r - r_i$ si ridurrà ora a $2 - \overline{2r} - r_i$.

Ne segue che o vi saranno altre due radici reali oltre a quelle che qui abbiamo indicato, essendo allora $\overline{2r} = 2$ e $r_i = 0$, e in tal caso le radici della nostra equazione (20) saranno tutte reali, o vi saranno due radici puramente immaginarie sull'asse positivo delle y e quindi anche due in punti simmetrici sull'asse stesso negativo, essendo allora $\overline{2r} = 0$ e $r_i = 2$; o vi saranno due radici assolutamente complesse a destra dell'asse delle y per essere allora $\overline{2r} = 0$, $r_i = 0$, e allora ve ne saranno anche due, uguali e di segno contrario a queste, a sinistra dello stesso asse delle y .

Ora quando b_1 sia compreso fra h^2 e $(h+1)^2$ con h intero e $0 \leq h < \mu_0 - 1$, osservando che $w(h) = (h^2 - b_1) \cos \pi h$, $w\left(h + \frac{1}{2}\right) = a\left(h + \frac{1}{2}\right) \cos \pi h$, e $w(h+1) = -\{(h+1)^2 - b_1\} \cos \pi h$ e $h^2 < b_1 < (h+1)^2$ si vede subito che se a sarà positivo avremo sempre una radice fra h e $h + \frac{1}{2}$, e una fra $h + \frac{1}{2}$ e $h+1$, talchè si può ora affermare che la nostra equazione (20) in questo caso di a positivo e b negativo $= -b_1$ con b_1 compreso fra i due quadrati h^2 e $(h+1)^2$ essendo h un numero intero con $0 \leq h < \mu_0 - 1$, avrà tutte le radici reali; e queste radici saranno tutte semplici e saranno comprese ciascuna fra due numeri consecutivi meno nel caso dei numeri $\pm h$ e

$\pm (h+1)$ fra i quali ve ne saranno due e comprese una fra $\pm h$ e $\pm h + \frac{1}{2}$,
e una fra $\pm \left(h + \frac{1}{2}\right)$ e $\pm (h+1)$.

Resta ora da considerare il caso di a negativo sempre con $b = -b_1$,
e poichè allora posto $a = -a_1$ con $a_1 > 0$ la equazione (14) si riduce alla
forma

$$(y^2 + b_1) \cosh \pi y - a_1 y \sinh \pi y = 0$$

ovvero

$$(y^2 + b_1) \cosh \pi y \left(1 - \frac{a_1 y}{y^2 + b_1} \operatorname{tgh} \pi y\right) = 0$$

così per vedere se in questo caso la nostra equazione potrà avere radici
puramente immaginarie sull'asse positivo della y basterà considerare la
equazione

$$1 - \frac{a_1 y}{y^2 + b_1} \operatorname{tgh} \pi y = 0, \quad (22)$$

il cui primo membro per $y=0$ si riduce ad 1 e per y crescente all'infinito
tende pure a uno, per modo che radici positive, se ne avrà, non potrà averne
che in numero pari, che allora, per quanto dicemmo sopra, dovranno essere
appunto due.

Ora presa la derivata del primo membro di questa equazione si trova
che all'infuori del fattore positivo $\frac{a_1}{y^2 + b_1}$ essa è

$$\frac{y^2 - b_1}{y^2 + b_1} \operatorname{tgh} \pi y - \frac{y \pi}{\cosh^2 \pi y}, \quad (23)$$

e per $y^2 \leq b_1$ è sempre negativa, ciò che porta che il primo membro della
equazione (22) è sempre decrescente pei valori di y fra 0 e $\sqrt{b_1}$ e sarà de-
crescente per un certo tratto anche dopo che y avrà passato $\sqrt{b_1}$ per dive-
nire poi positiva perchè per y crescente all'infinito è positiva; e quindi lo
stesso primo membro della detta equazione (22) dovrà avere un minimo
per un valore η di y superiore a $\sqrt{b_1}$.

Questo valore η sarà indipendente da a_1 perchè dovrà essere quello che
annulla la espressione (23) per modo che per questo valore η si avrà

$$\pi (\eta \operatorname{tgh} \pi \eta)^2 + \frac{\eta^2 - b_1}{\eta^2 + b_1} (\eta \operatorname{tgh} \pi \eta) - \pi \eta^2 = 0$$

ovvero

$$\begin{aligned} \eta \operatorname{tgh} \pi \eta &= \frac{-(\eta^2 - b_1) + \sqrt{(\eta^2 - b_1)^2 + 4\pi^2 \eta^2 (\eta^2 + b_1)^2}}{2\pi(\eta^2 + b_1)} = \\ &= \frac{2\pi \eta^2 (\eta^2 + b_1)}{\eta^2 - b_1 + \sqrt{(\eta^2 - b_1)^2 + 4\pi^2 \eta^2 (\eta^2 + b_1)^2}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{2\eta \operatorname{tgh} \pi \eta}{(\eta^2 + b_1)\pi} &= \frac{4\eta^2}{\eta^2 - b_1 + \sqrt{(\eta^2 - b_1)^2 + 4\pi^2 \eta^2 (\eta^2 + b_1)^2}} < \\ &< \frac{4\eta^2}{2\pi \eta (\eta^2 + b_1)} < \frac{1}{2\pi \eta} < \frac{1}{2\pi \sqrt{b_1}}, \end{aligned}$$

e quindi $\frac{a_1 \eta \operatorname{tgh} \pi \eta}{\eta^2 + b_1} < \frac{a_1}{4\sqrt{b_1}}$.

Di qui risulta che quando sia $\frac{a_1}{4\sqrt{b_1}} > 1$ il valore η che rende minimo

il primo membro della equazione (22) potrà essere tale da avere $\frac{a_1 \eta \operatorname{tgh} \pi \eta}{\eta^2 + b_1} > 1$ e allora evidentemente la nostra equazione (20) sull'asse positivo delle y avrà due radici puramente immaginarie iy_1 e iy_2 con y_1 comprese fra 0 e η e y_2 superiore ad η che si ridurranno ambedue ad una stessa radice doppia che sarà appunto η quando sarà $\frac{a_1 \eta \operatorname{tgh} \pi \eta}{\eta^2 + b_1} = 1$. In questi casi poi le altre radici della nostra equazione (20) saranno tutte reali e semplici e comprese ciascuna fra due numeri interi consecutivi meno fra i numeri $\pm h$ e $(h+1)$ fra i quali non ve ne sarà nessuna, essendo h un numero intero tale che b_1 sia compreso fra h^2 e $(h+1)^2$ (questi estremi ora esclusi). E così l'incertezza rimarrà solo quando sia $\frac{a_1 \eta \operatorname{tgh} \pi \eta}{\eta^2 + b_1} < 1$ e in particolare quando sia

$$\frac{a_1}{4\sqrt{b_1}} \leq 1.$$

Infine nel caso che ci riservammo di esaminare a parte di b_1 uguale al quadrato h^2 di un numero intero h compreso fra 0 e μ_0 (0 e μ_0 escl.), osserveremo che h sarà una radice della nostra equazione (21) che ora diviene

$$w(x) = (x^2 - h^2) \cos \pi x + a x \sin \pi x = 0,$$

e poichè da questa si ha

$$v(h-1) = \{h^2 - (h-1)^2\} \cos \pi h, \quad v\left(h - \frac{1}{2}\right) = -a\left(h - \frac{1}{2}\right) \cos \pi h,$$

$$v(h) = 0, \quad v\left(h + \frac{1}{2}\right) = a\left(h + \frac{1}{2}\right) \cos \pi h,$$

$$v(h+1) = -\{(h+1)^2 - h^2\} \cos \pi h,$$

si vede subito che se a è positivo avremo una radice fra $h-1$ e $h - \frac{1}{2}$, e una fra $h + \frac{1}{2}$ e $h+1$ oltre alla radice h , e quindi in questo caso la nostra equazione avrà tutte le sue radici reali e semplici, perchè ora sarà $r = \mu_0 + 1$.

Se poi a sarà negativo, allora poichè calcolando $v'(h)$ e $v''(h)$ si ha per la formola di TAYLOR

$$v(x) = \cos \pi h \{ (2 + a\pi)h + (1 + a\pi)(x-h) + \dots \} (x-h),$$

cercando anche i segni di $v(h-\varepsilon)$ e $v(h+\varepsilon)$ con ε piccolissimo si vede che se con a negativo sarà $2 + a\pi > 0$ avremo una radice fra $h - \frac{1}{2}$ e h e una fra h e $h + \frac{1}{2}$ sempre oltre alla radice h , e se sarà $2 + a\pi = 0$ avremo una radice doppia in h e una fra $h - \frac{1}{2}$ e h talchè anche nel caso di a negativo ma con $2 + a\pi \geq 0$ la nostra equazione (20) per $b_1 = h^2$ avrà ancorà tutte le sue radici reali e semplici meno nel caso di $2 + a\pi = 0$ nel qual caso la radice h sarà doppia; e così in questo caso di $b_1 = h^2$ e a negativo, non potranno esservi radici puramente immaginarie o assolutamente complesse altro che quando sia $2 + a\pi < 0$ o, col porre come facemmo sopra $a = -a_1$, quando sia $\frac{a_1\pi}{2} > 1$.

In questo caso dunque tenendo conto anche di quanto trovammo sopra si può dire che se insieme ad $\frac{a_1\pi}{2} > 1$ si avrà anche $\frac{a_1\eta \operatorname{tgh} \pi \eta}{\eta^2 + h^2} > 1$ o $\frac{a_1\pi}{2} \frac{2\eta \operatorname{tgh} \pi \eta}{(\eta^2 + h^2)\pi} \geq 1$ si avranno sempre due radici puramente immaginarie

sull'asse positivo delle y che si ridurranno ad una sola, che allora però sarà doppia, quando sia $\frac{a_1 \pi}{2} \frac{2 \eta \operatorname{tgh} \pi y}{(\eta^2 + h^2) \pi} = 1$; ma quando, pure essendo $\frac{a_1 \pi}{2} > 1$, sia $\frac{a_1 \pi}{2} \frac{2 \eta \operatorname{tgh} \pi \eta}{(\eta^2 + h^2) \pi} < 1$, non vi saranno radici puramente immaginarie e dovranno esservi invece a destra dell'asse delle y altre due radici reali semplici o una doppia o una delle altre radici reali dovrà essere tripla, o vi dovranno essere due radici assolutamente complesse e conjugate; e lo stesso dovrà avvenire a sinistra dello stesso asse delle y .

Tenendo conto dei risultati ora ottenuti, ci riserviamo di completare in altro lavoro gli studii che nel libro citato in principio facemmo sugli sviluppi (1) nel caso in cui le λ_n sono le radici delle equazioni qui considerate in modo speciale, cioè delle equazioni (15), (16), (17) e (20).

Pisa, Gennaio 1917.