Bemerkung zur Theorie der zahlentheoretischen Ableitungen.

Von R. Daublebsky von Sterneek in Wien.

Besteht zwischen den Functionen Θ und ψ die Relation:

$$\sum_n \theta(d) = \psi(n),$$

wobei sich das Summenzeichen über alle Theiler der ganzen Zahl n erstreckt, so bezeichnet Herr Bugajeff $\psi(n)$ als das zahlentheoretische Integral der Function $\theta(n)$. $\theta(n)$ ist dann die zahlentheoretische Ableitung der Function $\psi(n)$, wofür das Symbol gebraucht wird:

$$\theta(n) = D\psi(n).$$

Es handelt sich nun darum, bei gegebener Function $\psi(n)$ die Function $\theta(n)$ zu bestimmen.

Herr Bugajeff führt den Beweis des hierauf bezüglichen Theoremes successive, indem n zuerst als Primzahl, dann als Potenz einer Primzahl, endlich als beliebig zusammengesetzte Zahl angenommen wird. Ich versuche nun, für eine beliebig zusammengesetzte Zahl n den Beweis direct zu führen.

Bezeichnet $\left[\frac{n}{k} \right]$ die größte, in $\frac{n}{k}$ enthaltene ganze Zahl, so erhalten wir durch Summierung der Gleichung:

$$\sum_n \theta(d) = \psi(n)$$

über die Reihe der natürlichen Zahlen von 1 bis n den Ausdruck:

$$\psi(1) + \psi(2) + \dots + \psi(n) = \theta(1) \left[\frac{n}{1} \right] + \theta(2) \left[\frac{n}{2} \right] + \dots + \theta(n) \left[\frac{n}{n} \right].$$

Denn $\left[\frac{n}{k} \right]$ bezeichnet ja zugleich, wieviele Zahlen der Reihe 1, 2, $\dots$, n durch k theilbar sind.

Die Determinante sieht daher folgendermaßen aus:

$$\theta(n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & \psi(1) \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & \psi(2) \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & \psi(3) \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & \psi(4) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & \psi(5) \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 & \psi(6) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 & \psi(7) \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & 0 & \psi(8) \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & \psi(n-1) \\ 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & \psi(n) \end{vmatrix}$$

Diese Determinante lässt sich, wie nun gezeigt werden soll, leicht auswerten.

Betrachten wir irgend eine Horizontalzeile derselben, etwa die k^{te} . In derselben steht an allen jenen Stellen der Wert 1, deren Stellenzeiger Theiler von k sind, an allen übrigen Stellen der Wert 0; das letzte Glied der Zeile ist $\psi(k)$.

Nehmen wir an, n habe, in Primfactoren zerlegt, die Gestalt:

$$n = a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_v^{a_v}$$

und wird mit $d^{(\omega)}$ eine Zahl bezeichnet, welche aus n hervorgeht, wenn man darin ρ Exponenten α um eine Einheit erniedrigt, die übrigen $v - \rho$ Exponenten α ungeändert lässt, so ist die Anzahl der mit $d^{(\omega)}$ bezeichneten Zahlen $\binom{v}{\rho}$.

Subtrahieren wir nun in der Determinante von der letzten Zeile die sämtlichen $d^{(1)\text{ten}}$ Zeilen, addieren die sämtlichen $d^{(2)\text{ten}}$ Zeilen, subtrahieren die sämtlichen $d^{(3)\text{ten}}$ Zeilen, u. s. f.

In der letzten Zeile steht an allen jenen Stellen, deren Stellenzeiger Theiler von n sind, der Wert 1; ein Theiler von n hat die Gestalt $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \dots a_v^{\varepsilon_v}$, und es seien etwa μ der Größen ε gleich, die übrigen $v - \mu$ kleiner als die entsprechenden α ; die Anzahl der Größen $d^{(\omega)}$, welche durch diesen ins Auge gefassten Theiler von n theilbar sind, ist dann offenbar $\binom{v-\mu}{\rho}$.

Es tritt somit nach Ausführung unseres Processes an die dem betreffenden Theiler entsprechende Stelle der letzten Zeile:

$$1 - \binom{\nu-\mu}{1} + \binom{\nu-\mu}{2} - \binom{\nu-\mu}{3} + \dots + (-1)^{\nu-\mu-1} \binom{\nu-\mu}{\nu-\mu-1} + (-1)^{\nu-\mu} \binom{\nu-\mu}{\nu-\mu} = 0.$$

Die Determinante reducirt sich daher auf das letzte Glied der letzten Zeile, multipliciert mit dessen Subdeterminante, die den Wert $+1$ hat. Wir erhalten somit:

$$\theta(n) = \psi(n) - \sum \psi(d^{(1)}) + \sum \psi(d^{(2)}) - \sum \psi(d^{(3)}) + \dots + (-1)^r d^{(r)},$$

wofür Herr Bugajeff die symbolische Bezeichnung verwendet:

$$\theta(n) = \psi[\varphi(n)].$$