Ueber Fadenconstructionen des Ellipsoides*).

Von

OTTO STAUDE in Leipzig.

(Mit einer lithograph. Tafel.)

Einleitung.

Die Auffindung von Focaleigenschaften der Flächen 2. Grades, welche den Focaleigenschaften der Kegelschnitte analog sind, ist der Zielpunkt zahlreicher Untersuchungen gewesen. Aus dieser Quelle ist einerseits Jacobi's**) auf das *Ivory'sche Theorem* gegründete Theorie der Flächen 2. Grades geflossen, welche von Joachimsthal***) in einem Punkte ergänzt und von Darboux†) weiter ausgeführt wurde, und ist anderseits die *modulare Erzeugungsweise* der Flächen 2. Grades hervorgegangen, welchesich an die Namen Mac Cullagh††), Chasles†††) und Amiot*†) knüpft. Neben diese ausgeführten Theorien stellen

*) Die Resultate dieser Abhandlung wurden am 6. März 1882 durch Herrn Scheibner der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig vorgelegt (vgl. die Berichte der Gesellschaft, Jahrg. 1882, S. 5).

**) Vgl. den Auszug aus einem Schreiben von Jacobi an Steiner im Crelle'schen Journale, Band XII, S. 137; ferner die geometrischen Theoreme aus dem Nachlasse Jacobi's, mitgetheilt von Hermes in Crelle's Journal, Bd. LXXIII, S. 179; auch Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, Th. I, Art. 191.

***) Vgl. die Mittheilung von Hermes aus Joachimsthal's hinterlassenen Papieren in Crelle's Journal, Bd. LXXIII, S. 207.

†) Darboux, Sur les théorèmes d'Ivory relatifs aux surfaces homofocales du second degré, Paris 1872.

††) Mac Cullagh, Proceedings of the R. Irish Academy, Bd. II, S. 446 und The collected Works of James Mac Cullagh, Dublin 1880, S. 260.

†††) Chasles, Notes des Aperçu historique.

*†) Amiot, Liouville's Journal, I. Serie, Bd. VIII, S. 161; Bd. X, S. 109. Vgl. überdies Salmon-Fiedler a. a. O., Capitel VIII und Literaturnachweisungen dazu.

sich eine grosse Anzahl von Sätzen mit ähnlicher Tendenz von Mac Cullagh, Chasles*), Plücker**) und andern, welche die Analogie der Focalcurven der Flächen 2. Grades mit den Brennpunkten der Kegelschnitte hervorheben, darunter ein Satz von Mac Cullagh***), der 'die 4 Schnittlinien der beiden Fokalkegel†) eines Punktes auf einer Fläche 2. Grades in Parallele stellt mit den beiden Brennstrahlen eines Punktes auf einem Kegelschnitt.

Die analytischen Hilfsmittel der namhaft gemachten Untersuchungen sind wesentlich *algebraischer* Natur, wie die entsprechenden Betrachtungen der ebenen Geometrie. Man wird aber in erweiterter Auffassung der Theorie der Focaleigenschaften der Kegelschnitte unter diese Theorie auch Constructionen, wie die Graves'sche Construction††) der Ellipse aus einer confocalen Ellipse mittels eines geschlossenen Fadens unterstellen dürfen, insofern aus ihr durch Specialisirung der Satz von der constanten Summe der Brennstrahlen hervorgeht. Die Graves'sche Construction, welche als eine *transscendente* zu bezeichnen ist, indem sie ihrer Natur nach mit der Längenbestimmung des Ellipsenbogens operirt, hat ihrerseits zu ähnlichen Sätzen für die Geometrie der Flächen 2. Grades Anlass gegeben. Bekannt ist die Construction der Krümmungscurve auf dem Ellipsoid aus einer andern Krümmungscurve derselben Art durch einen geschlossenen Faden†††), aus welcher die Brennpunkteigenschaft*†) der Kreispunkte des Ellipsoides für die Krümmungscurven desselben hervorgeht. Ausserdem giebt Chasles eine Construction der Krümmungscurve auf einer von 2 gegebenen confocalen Flächen 2. Grades mittels eines Fadens, dessen Enden auf der andern befestigt sind**†).

An diese transscendenten Constructionen schliesst sich der Gegenstand der vorliegenden Abhandlung an: *Die Fadenconstruction des Ellipsoides aus zwei gegebenen confocalen Flächen*. Die bei der analytischen Behandlung dieses Thema's zu verwendenden Transscendenten sind hyperelliptische Integrale vom Geschlecht $p = 2$. Als Specialfälle 1. Stufe reihen sich Fadenconstructionen des Ellipsoides aus einer

*) Vgl. besonders Note XXXI des *Aperçu historique*.

**) Vgl. Plücker, *Crelle's Journal*, Bd. XXXV, S. 100.

***) Salmon-Fiedler a. a. O., Art. 181. Vgl. auch Mac Cullagh, *Proceedings of the R. Irish Acad.*, Bd. II, S. 501; Liouville in *Liouville's Journal*, I. Serie, Bd. XII, S. 423; W. Roberts, *Annali di Matematica pura ed applicata*, Bd. IV, S. 142 ff.

†) Salmon-Fiedler a. a. O., Art. 170.

††) Salmon-Fiedler, *Anal. Geometrie der Kegelschnitte*, Art. 266. Hesse, *Anal. Geometrie des Raumes*, Vorlesung XXI.

†††) Vgl. Chasles, *Liouville's Journal*, I. Serie, Bd. XI, S. 15.

*†) Vgl. M. Roberts, *ibid.*, S. 2.

**†) Vgl. die unter †††) citirte Stelle bei Chasles, S. 16.

gegebenen confocalen Fläche und einem gleichzeitig gegebenen Focalkegelschnitt derselben an, welche auf elliptische Integrale führen. Als Specialfall 2. Stufe geht eine Fadenconstruction des Ellipsoides aus seinen beiden Focalkegelschnitten hervor, welche den transscendenten Charakter der allgemeineren Fälle verloren hat, übrigens aber zu denselben in dem analogen Verhältnisse steht, wie die Fadenconstruction der Ellipse aus den Brennpunkten zu der Fadenconstruction aus einer confocalen Ellipse.

Was die nachfolgende Behandlung des Gegenstandes angeht, so ist die Fadenconstruction des Ellipsoides aus einem gegebenen confocalen Ellipsoid und einschaligen Hyperboloid in § 8 abgeleitet. Die §§ 1 bis 5 sind dazu bestimmt, die zu dieser Ableitung nöthigen Hilfsmittel, die elliptischen Coordinaten (§ 1) und verschiedene im Wesentlichen bekannte Sätze über die Krümmungscurven (§ 2) und geodätischen Linien (§ 4) auf den Flächen 2. Grades, sowie über die gemeinsamen Tangenten zweier confocaler Flächen (§ 3) einzuführen.

In § 5 sind die über die Bestimmung der Bogenlängen der 3 genannten Liniengattungen in den §§ 2 bis 4 gewonnenen Resultate als Hauptgrundlage für die Beweisführung des § 8 nochmals zusammengestellt. Die §§ 6 und 7 sind aus einem Bedürfniss entsprungen, welches die Theorie der Fadenconstruction des Ellipsoides aus 2 confocalen Flächen im Vergleich zu der entsprechenden Construction der Ellipse wesentlich complicirt. Während nämlich die Lage, welche ein geschlossener, um eine Ellipse geschlungener Faden, der in der Ebene durch einen Stift gespannt wird, annimmt, sich unmittelbar selbst unzweideutig bestimmt, muss die Lage eines um die Combination zweier confocaler Flächen geschlungenen geschlossenen Fadens, der etwa durch ein Häkchen gespannt wird, noch gewissen Bedingungen genügen, damit der Punkt, wo der Faden über das Häkchen gleitet, bei der Bewegung des letzteren ein Ellipsoid beschreibt. Dass aber diese Bedingungen erfüllbar sind, ist nicht unmittelbar evident; es zu beweisen, ist die Aufgabe der §§ 6 und 7.

In § 9 wird aus dem Resultate des § 8 die oben erwähnte Chasles'sche Fadenconstruction der Krümmungscurve auf einer von zwei gegebenen confocalen Flächen, allerdings nicht in ihrer allgemeinen Fassung, abgeleitet, ferner abgeleitet ein Satz über die Länge eines aus Stücken einer Krümmungscurve und geodätischer Tangenten derselben zusammengesetzten geschlossenen Curvenzuges auf dem Ellipsoid, endlich das Graves'sche Theorem. Die §§ 10 und 11 behandeln die Fadenconstruction des Ellipsoides aus einem confocalen Ellipsoid und seiner Focalhyperbel (§ 10) und die Fadenconstruction des Ellipsoides aus einem confocalen einschaligen Hyperboloid und seiner Focalellipse (§ 11) und zwar deshalb in ausführ-

licherer Weise, weil diese Specialfälle des allgemeineren Resultates des § 8 ihrerseits besondere Eigenthümlichkeiten darbieten. Im Anschluss sodann an den § 12, welcher die Fadenconstruction des Ellipsoides aus seinen Focalcurven in Kürze ableitet, giebt § 13 eine Uebersicht über diejenigen Focaleigenschaften der 3 centriscen Flächen 2. Grades, auf welche die Construction des § 12 unmittelbar überleitet.

§ 1.

Bezeichnung der elliptischen Coordinaten und andere Festsetzungen.

Unter Anwendung der gewöhnlichen elliptischen Coordinaten wird ein Punkt des Raumes, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z sind, bestimmt durch die Parameter $t = \lambda, \mu, \nu$ der 3 Flächen des confocalen Systems:

$$\frac{x^2}{\alpha - t} + \frac{y^2}{\beta - t} + \frac{z^2}{\gamma - t} = 1,$$

welche durch ihn hindurchgehen. Von diesen 3 Flächen ist eine (λ) ein Ellipsoid, eine andere (μ) ein einschaliges und eine dritte (ν) ein zweischaliges Hyperboloid. Nimmt man die Constanten α, β, γ als positiv und der Grösse nach geordnet an, so bewegen sich λ, μ, ν innerhalb gewisser, durch das folgende System von Ungleichungen bestimmter Grenzen:

$$\alpha > \nu > \beta > \mu > \gamma > \lambda > -\infty.$$

Den Grenzwerten $\nu = \alpha, \frac{\nu}{\mu} = \beta, \frac{\mu}{\lambda} = \gamma, \lambda = -\infty$ entsprechen in bekannter*) Weise die Ebenen $x = 0, y = 0, z = 0$ und die unendlich ferne Ebene.

Für die vorliegenden Betrachtungen wird die Combination zweier Flächen des confocalen Systems, eines Ellipsoides λ_0 und eines einschaligen Hyperboloides μ_0 , als gegeben gedacht. In dem Raume ausserhalb dieser Flächen, d. h. in dem Raume, welcher die Focalellipse und die Focalhyperbel des Systems nicht enthält, kommen nur solche Werthe der Variabeln λ und μ in Betracht, die den Ungleichungen entsprechen:

$$\lambda_0 \geq \lambda \geq -\infty, \quad \mu_0 \geq \mu \geq \gamma.$$

Dieser Raum (R) wird durch die Ebenen $\nu = \beta$ und $\nu = \alpha$ in

*) Vgl. z. B. Chasles, Résumé d'une Théorie des coniques sphériques homofocales et des surfaces du second ordre homofocales vom Jahre 1860 in Liouville's Journal, II. Serie, Bd. V, S. 439.

4 Fächer getheilt, die den Quadranten des Ebenenstückes $\mu = \gamma$ entsprechend (Fig. 1) mit den Nummern 1 bis 4 bezeichnet werden sollen.

Für gewisse Functionen der elliptischen Coordinaten, die bei der folgenden Untersuchung beständig gebraucht werden, seien von vorn herein folgende Abkürzungen eingeführt: Es sollen Λ, M, N die positiven Werthe der in dem Raume R überall reellen Quadratwurzeln:

$$\Lambda = \sqrt{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)(\mu_0 - \lambda)(\lambda_0 - \lambda)},$$

$$M = \sqrt{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\mu_0 - \mu)(\mu - \lambda_0)},$$

$$N = \sqrt{(\alpha - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \gamma)(\nu - \mu_0)(\nu - \lambda_0)}$$

bedeuten und soll weiter zur Abkürzung gesetzt werden:

$$\frac{2\Lambda}{(\lambda_0 - \lambda)(\mu_0 - \lambda)} = L,$$

$$\frac{2M}{(\mu - \lambda_0)(\mu_0 - \mu)} = M,$$

$$\frac{2N}{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)} = N,$$

wo L, M, N , wie Λ, M, N , positiv sind.

§ 2.

Das Längenelement der Durchdringungscurve $(\lambda_0 \mu_0)$.

Aus der bekannten Formel für das Linienelement des Raumes in elliptischen Coordinaten*):

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{1}{4} \frac{(\mu - \lambda)(\nu - \lambda) d\lambda^2}{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)} + \frac{1}{4} \frac{(\nu - \mu)(\lambda - \mu) d\mu^2}{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\gamma - \mu)} \\ + \frac{1}{4} \frac{(\lambda - \nu)(\mu - \nu) d\nu^2}{(\alpha - \nu)(\beta - \nu)(\gamma - \nu)}$$

folgt für das Element $d\hat{s}$ der Durchdringungscurve der Flächen λ_0 und μ_0 :

$$d\hat{s} = \pm \frac{d\nu}{N}.$$

Durch die Nummerirung der Fächer des Raumes R ist den beiden Zweigen K_1 und K_2 der Durchdringungscurve $(\lambda_0 \mu_0)$ eine bestimmte „positive“ Durchlaufungsrichtung aufgeprägt (Fig. 3); in Bezug auf diese bezeichne K_1 den rechten und K_2 den linken Zweig der Durchdringungscurve. Im Sinne der positiven Richtung der beiden Zweige

*) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, herausgegeben von Clebsch, S. 205; 210.

gemessen ist $d\nu$ längs beider Zweige positiv im 1. und 3., negativ im 2. und 4. Fache. Um durch Ausführung der Integration $\int \pm \frac{d\nu}{N}$ längs irgend eines Stückes der Durchdringungscurve in der positiven Richtung derselben den positiven Werth der betreffenden Länge zu erhalten, muss man daher der in $\pm N$ enthaltenen Quadratwurzel $\pm N$ das positive Vorzeichen im 1. und 3., das negative im 2. und 4. Fache ertheilen, sodass $\pm \frac{d\nu}{N}$ immer positiv bleibt. Es ist wegen des Folgenden zweckmässig, jedem Punkte λ, μ, ν des Raumes R einen Index beigelegt zu denken, der durch $\tilde{N}$ bezeichnet sei und den Werth der Quadratwurzel $\pm N$ in dem Punkte einschliesslich des bei der erwähnten Integration anzuwendenden Vorzeichens angiebt; es ist also $\tilde{N} = +N$ im 1. und 3., $\tilde{N} = -N$ im 2. und 4. Fache. In entsprechendem Sinne soll für die Function $\pm N$, die sich von $\pm N$ nur um einen positiven Factor unterscheidet, das Symbol $\tilde{N}$ gebraucht werden.

Diesen Festsetzungen nach ist der positive Werth des Linien-elementes der Curvenzweige K_1 und K_2 in positiver Richtung gemessen immer:

$$d\tilde{s} = \frac{d\nu}{\tilde{N}}.$$

§ 3.

Differentialgleichungen und Längenelement der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 .

Indem man in der Gleichung des Berührungskegels vom Punkte $x'y'z'$ an die Fläche λ_0 :

$$(\beta - \lambda_0)(\gamma - \lambda_0)(x - x')^2 + (\gamma - \lambda_0)(\alpha - \lambda_0)(y - y')^2 + (\alpha - \lambda_0)(\beta - \lambda_0)(z - z')^2 - (\alpha - \lambda_0)(y z' - z y')^2 - (\beta - \lambda_0)(z x' - x z')^2 - (\gamma - \lambda_0)(x y' - y x')^2 = 0$$

und der analogen Gleichung für die Fläche μ_0

$$x' = x + dx, \quad y' = y + dy, \quad z' = z + dz$$

setzt, erhält man als Differentialgleichungen, denen die Projectionen dx, dy, dz des Elementes einer gemeinsamen Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 gleichzeitig genügen müssen:

$$\begin{aligned} (\beta - \lambda_0)(\gamma - \lambda_0) dx^2 + \dots & - (\gamma - \lambda_0)(x dy - y dx)^2 = 0, \\ (\beta - \mu_0)(\gamma - \mu_0) dx^2 + \dots & - (\gamma - \mu_0)(x dy - y dx)^2 = 0. \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichungen lauten, in elliptische Coordinaten übertragen:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)(\mu-\lambda_0)(\nu-\lambda_0)}{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)} d\lambda^2 + \frac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)(\nu-\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)} d\mu^2 \\ & \quad + \frac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)(\lambda-\lambda_0)(\mu-\lambda_0)}{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)} d\nu^2 = 0, \\ & \frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)(\mu-\mu_0)(\nu-\mu_0)}{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)} d\lambda^2 + \frac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)(\nu-\mu_0)(\lambda-\mu_0)}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)} d\mu^2 \\ & \quad + \frac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)(\lambda-\mu_0)(\mu-\mu_0)}{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)} d\nu^2 = 0 \end{aligned} \right.$$

und können, indem einmal $d\mu^2$ und einmal $d\lambda^2$ eliminirt, sodann die Abkürzungen M^2 und $\tilde{N}^2 = N^2$ eingeführt und schliesslich die Wurzeln ausgezogen werden, auf die Form:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} 1. & \quad \mp (\mu - \lambda) \frac{d\lambda}{\Lambda} + (\nu - \mu) \frac{d\nu}{\tilde{N}} = 0, \\ 2. & \quad \pm (\mu - \lambda) \frac{d\mu}{M} + (\nu - \lambda) \frac{d\nu}{\tilde{N}} = 0. \end{aligned} \right.$$

gebracht werden. Aus dieser geht durch einfache Combination die weitere Form:

$$(3)^*) \quad \left\{ \begin{aligned} & \pm \frac{d\lambda}{\Lambda} \pm \frac{d\mu}{M} + \frac{d\nu}{\tilde{N}} = 0, \\ & \pm \frac{\lambda d\lambda}{\Lambda} \pm \frac{\mu d\mu}{M} + \frac{\nu d\nu}{\tilde{N}} = 0, \end{aligned} \right.$$

hervor, wobei die obern und untern Vorzeichen von $\frac{d\lambda}{\Lambda}$ und $\frac{d\mu}{M}$ in (2) und (3) beziehungsweise zusammengehören.

Da es nicht möglich ist, dass eine gemeinsame Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 noch eine dritte Fläche des confocalen Systems berührt, weil die Complexgleichung des letzteren in dem Parameter t (§ 1) quadratisch ist**), so schliesst man leicht, dass sich das Vorzeichen von $d\nu$ längs einer gemeinsamen Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 innerhalb eines und desselben Faches des Raumes R nicht umkehren kann. Eine solche Umkehr findet nur beim Uebergange aus einem Fache in das andere statt. Es verhält sich daher das Differential $\frac{d\nu}{\tilde{N}}$ auf einer solchen Tangente analog, wie auf einem Zweige der Durchdringungscurve $(\lambda_0\mu_0)$ (vgl. § 2), und man ist berechtigt, die

*) Es ist dies die Form der Differentialgleichungen des Abel'schen Theorems für den Fall der hyperelliptischen Differentiale $p=2$, wie sie Jacobi giebt (Vorlesungen über Dynamik, S. 234). Auf die hier benutzte geometrische Bedeutung dieser Differentialgleichungen bin ich durch Herrn Klein aufmerksam gemacht worden.

**) Vgl. auch Salmon-Fiedler, Anal. Geom. d. R., Th. I, Art. 176.

positive Richtung einer solchen Tangente als diejenige zu definiren, in der $\frac{d\nu}{N}$ positiv ist.

Zugleich sei bemerkt, dass fernerhin die Differentiale $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ längs der Tangente überall im positiven Sinne derselben gemessen werden sollen. Da alsdann in den Differentialgleichungen (2) der 2. Term immer positiv ist, so hängt die Auswahl des + oder — Zeichens für den 1. Term allein davon ab, ob $d\lambda$ und $d\mu$ für das betreffende Element der Tangente positiv oder negativ ist. Wie nun wieder aus dem eben benutzten Satze, dass eine gemeinsame Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 keine dritte Fläche des confocalen Systems berührt, gefolgert wird, findet ein Wechsel des Vorzeichens von $d\mu$ nur an 2 Stellen statt, nämlich wo die Tangente die Ebene $\mu = \gamma$ schneidet und wo sie die Fläche $\mu = \mu_0$ berührt, und findet ein Wechsel des Vorzeichens von $d\lambda$ nur an 2 Stellen statt, nämlich wo die Tangente die Ebene $\lambda = -\infty$ schneidet und wo sie die Fläche $\lambda = \lambda_0$ berührt. Diesen Erwägungen zu Folge können an jeder gemeinsamen Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 , wenn man dieselbe als im Unendlichen in sich zurücklaufend ansieht, 4 Abschnitte unterschieden werden, für welche in den Differentialgleichungen (2) und (3) verschiedene Vorzeichencombinationen gelten und zwar:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{in (1) u. folglich in (2)} \\ \text{a) } \left. \begin{array}{l} - + \\ + + \end{array} \right\} \begin{array}{l} + + + \\ + + + \end{array} \right\}, & \text{so lange die Tangente von } \lambda = -\infty \\ & \text{fort nach } \lambda = \lambda_0 \text{ hin und von } \mu = \mu_0 \\ & \text{fort nach } \mu = \gamma \text{ hinläuft;} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} + + \\ + + \end{array} \right\} \begin{array}{l} - + + \\ - + + \end{array} \right\}, & \text{so lange sie von } \lambda = \lambda_0 \text{ fort nach} \\ & \lambda = -\infty \text{ hin und von } \mu = \mu_0 \text{ fort} \\ & \text{nach } \mu = \gamma \text{ hinläuft;} \\ \text{c) } \left. \begin{array}{l} - + \\ - + \end{array} \right\} \begin{array}{l} + - + \\ + - + \end{array} \right\}, & \text{so lange sie von } \lambda = -\infty \text{ fort nach} \\ & \lambda = \lambda_0 \text{ hin und von } \mu = \gamma \text{ fort nach} \\ & \mu = \mu_0 \text{ hinläuft;} \\ \text{d) } \left. \begin{array}{l} + + \\ - + \end{array} \right\} \begin{array}{l} - - + \\ - - + \end{array} \right\}, & \text{so lange sie von } \lambda = \lambda_0 \text{ fort nach} \\ & \lambda = -\infty \text{ hin und von } \mu = \gamma \text{ fort} \\ & \text{nach } \mu = \mu_0 \text{ hinläuft.} \end{array} \right.$$

Indem man die Gleichungen (2) benutzt, um in dem Ausdrucke für das Linienelement (§ 2) die Variabeln zu separiren*), ergibt sich für den positiven Werth des in positiver Richtung gemessenen Längenelementes ds einer gemeinsamen Tangente der Flächen λ'_0 und μ_0 ,

*) Vgl. über die Methode z. B. Hesse, Anal. Geom. d. Raumes, Vorl. 23, zu Formel 19.

jenachdem demselben die Vorzeichencombinationen (4) a), b), c) oder d) zukommen:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} ds = + \frac{d\lambda}{L} - \frac{d\mu}{M} + \frac{d\nu}{\widetilde{N}}, \\ ds = - \frac{d\lambda}{L} - \frac{d\mu}{M} + \frac{d\nu}{\widetilde{N}}, \\ ds = + \frac{d\lambda}{L} + \frac{d\mu}{M} + \frac{d\nu}{\widetilde{N}}, \\ ds = - \frac{d\lambda}{L} + \frac{d\mu}{M} + \frac{d\nu}{\widetilde{N}}. \end{array} \right.$$

Die Vorzeichen in diesen Ausdrücken (5) bestimmen sich also durch die Bedingung, dass alle 3 Differentiale rechter Hand für sich einen positiven Werth erhalten müssen.

Die 4 verschiedenen Vorzeichencombinationen in den Differentialgleichungen (2) und (3), welche einerseits 4 verschiedenen Abschnitten einer gemeinsamen Tangente der beiden Flächen λ_0 und μ_0 zukommen, entsprechen anderseits den Richtungen der 4 gemeinsamen Tangenten, die von jedem Punkte λ, μ, ν des Raumes R an die beiden Flächen gelegt werden können. Diese 4 Tangenten ordnen sich bekanntlich*) mit Bezug auf die 3 Normalen N_λ, N_μ, N_ν , der durch den Punkt gehenden Flächen λ, μ, ν auf 3 verschiedene Weisen in 2 Paare, so dass bei jeder der 3 Anordnungen eine der 3 Normalen gleichzeitig die beiden von je zwei Tangenten desselben Paares gebildeten Winkel halbirt. So giebt es beispielsweise eine Anordnung der 4 Tangenten in 2 Paare „in Bezug auf λ conjugirter Tangenten“, bei der die Normale N_λ des Ellipsoides λ die Winkel der beiden Paare halbirt. In der Gleichungsform (3) entspricht, wie man sich leicht überzeugt, den Vorzeichencombinationen

$$\left. \begin{array}{ccc} + & + & + \\ + & + & + \end{array} \right\} \text{ und } \left. \begin{array}{ccc} - & + & + \\ - & + & + \end{array} \right\} \quad \text{oder} \quad \left. \begin{array}{ccc} + & - & + \\ + & - & + \end{array} \right\} \text{ und } \left. \begin{array}{ccc} - & - & + \\ - & - & + \end{array} \right\}$$

*) Die Gleichungen der 4 Tangenten in Bezug auf die Normalen als Axen giebt Mac Cullagh in den Proceedings of the R. Irish Academy, Bd. II, S. 501. Die Cosinus der Winkel $\partial_\lambda, \partial_\mu, \partial_\nu$, welche die Tangenten mit den Normalen N_λ, N_μ, N_ν bilden, finden sich bei Liouville, in Liouville's Journal, I. Serie, Bd. XII, S. 423. Die betreffenden Formeln lauten in der hier eingeführten*Bezeichnung:

$$\cos^2 \partial_\lambda = \frac{(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \mu_0)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}, \quad \cos^2 \partial_\mu = \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu - \mu_0)}{(\mu - \nu)(\mu - \lambda)},$$

$$\cos^2 \partial_\nu = \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)}{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)}.$$

ein Paar in Bezug auf λ conjugirter Tangenten. Es kehrt sich daher, wenn man an der Stelle λ, μ, ν von einer gemeinsamen Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 auf die in Bezug auf λ conjugirte Tangente übergeht und nach wie vor die positive Durchlaufungsrichtung einhält, bei diesem Uebergange in den gleichzeitig geltenden Differentialgleichungen (2) oder (3) allein das Vorzeichen von $\frac{d\lambda}{\Lambda}$ um. Die analoge Anordnung der 4 Tangenten in andere Paare mit Bezug auf die Normalen der Hyperboloide μ und ν im Punkte $\lambda\mu\nu$ findet in den Vorzeichencombinationen der Differentialgleichungen (2) und (3) einen entsprechenden Ausdruck.

§ 4.

Differentialgleichung und Längenelement der geodätischen Tangenten der Durchdringungscurve der Flächen λ_0 und μ_0 auf diesen Flächen.

Die Differentialgleichung der geodätischen Tangente der Durchdringungscurve ($\lambda_0\mu_0$) ist in den eingeführten Bezeichnungen auf dem Ellipsoid λ_0^*):

$$(6) \quad \frac{(\mu - \lambda_0) d\mu^2}{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\mu_0 - \mu)} - \frac{(\nu - \lambda_0) d\nu^2}{(\alpha - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \gamma)(\nu - \mu_0)} = 0$$

und auf dem Hyperboloid μ_0 :

$$(7) \quad \frac{(\mu_0 - \lambda) d\lambda^2}{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)(\lambda_0 - \lambda)} - \frac{(\nu - \mu_0) d\nu^2}{(\alpha - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \gamma)(\nu - \lambda_0)} = 0.$$

Man erkennt unmittelbar, wie diese Gleichungen aus den Gleichungen (1) des § 3 hervorgehen. Setzt man nämlich dort $\lambda = \lambda_0$, so giebt die erste Gleichung (1) $d\lambda = 0$ und geht folglich die zweite in die Gleichung (6) über; ebenso leitet sich (7) mit $\mu = \mu_0$ aus (1) ab. Es folgt daraus der von Chasles**) auf anderem Wege bewiesene Satz:

I. *Die gemeinsamen Tangenten der beiden Flächen λ_0 und μ_0 sind in ihren Berührungspunkten mit diesen Flächen zugleich Tangenten von geodätischen Linien, welche auf den Flächen durch jene Berührungspunkte gehen und ihrerseits geodätische Tangenten der Durchdringungscurve ($\lambda_0\mu_0$) sind.*

Da hiernach jedes Element einer geodätischen Tangente von ($\lambda_0\mu_0$) auf λ_0 oder μ_0 zugleich ein Element einer gemeinsamen Tangente der beiden Flächen λ_0 und μ_0 ist, so kann man, wie auf diesen Tangenten, so auch auf den geodätischen Linien der Flächen λ_0 und μ_0 , welche die

*) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, S. 214. — Hesse, Anal. Geom. des Raumes, Vorl. XXIII, Formel 16.

**) Chasles, Liouville's Journal, I. Série, Bd. XI, S. 11.

Durchdringungscurve ($\lambda_0 \mu_0$) berühren, eine positive Richtung dadurch *definiren*, dass in derselben $\frac{dv}{N}$ immer positiv bleibt. Mit den in

§ 1 eingeführten Abkürzungen können unter gleichzeitiger Ausziehung der Quadratwurzeln die Gleichungen (6) und (7) geschrieben werden:

$$(6) \quad \pm (\mu - \lambda_0) \frac{d\mu}{M} + (v - \lambda_0) \frac{dv}{N} = 0,$$

$$(7) \quad \pm (\mu_0 - \lambda) \frac{d\lambda}{\Lambda} + (v - \mu_0) \frac{dv}{N} = 0.$$

Ueber die Vorzeichen von $d\lambda$ und $d\mu$ gilt nach Satz I bei den geodätischen Linien dasselbe, wie bei den gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 und man erhält ähnlich, wie dort, die Regeln: Es gelten für die geodätischen Tangenten der Durchdringungscurve ($\lambda_0 \mu_0$)

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{auf dem Ellipsoid } \lambda_0 \text{ in der Differentialgleichung (6) die Vorzeichen:} \\ - +, \text{ so lange die Tangente von } \mu = \gamma \text{ weg auf } \mu = \mu_0, \\ + +, \text{ so lange sie von } \mu = \mu_0 \text{ weg auf } \mu = \gamma \text{ zuläuft;} \\ \text{auf dem Hyperboloid } \mu_0 \text{ in (7) die Vorzeichen:} \\ - +, \text{ so lange die Tangente von } \lambda = -\infty \text{ weg auf } \lambda = \lambda_0, \\ + +, \text{ so lange sie von } \lambda = \lambda_0 \text{ auf } \lambda = -\infty \text{ zuläuft.} \end{array} \right.$$

Indem man die Gleichungen (6) und (7) benutzt, um in dem Ausdrücke für das Linienelement auf den Flächen λ_0 und μ_0 (§ 2) die Variablen zu separiren, so erhält man für den positiven Werth des in positiver Richtung gemessenen Längenelements der geodätischen Linie bezüglich den Vorzeichencombinationen (8) der Differentialgleichungen entsprechend:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\sigma = \pm \frac{d\mu}{M} + \frac{dv}{N}, \\ d\sigma = \pm \frac{d\lambda}{L} + \frac{dv}{N}. \end{array} \right.$$

Es müssen also auch hier, wie bei den Ausdrücken (5) in § 3, die einzelnen Terme rechter Hand je für sich positiv ausfallen.

Die geodätischen Tangenten der Krümmungscurve $\mu = \mu_0$ auf λ_0 winden sich bekanntlich ohne Ende auf der Zone ($\mu_0 \mu_0$) zwischen den beiden Zweigen K_1 und K_2 der Krümmungscurve in der Weise herum, dass sie immer abwechselnd K_1 und K_2 berühren. Ein zwischen zwei aufeinanderfolgenden Berührungspunkten mit dem einen und dem andern Zweige gelegenes Stück einer geodätischen Tangente sei als *ein geodätischer Halbbogen der Zone* ($\mu_0 \mu_0$) bezeichnet. Mit Bezug auf die festgesetzte positive Durchlaufungsrichtung der geodätischen

Linien zerfallen die geodätischen Halbbogen der Zone ($\mu_0 \mu_0$) in 2 Classen, solche die von K_1 nach K_2 , und solche die von K_2 nach K_1 laufen; jene sollen *geodätische Halbbogen 1. Art*, diese *2. Art* heissen.

Die beiden Vorzeichencombinationen der Differentialgleichungen (6) und (7), welche sich nach (8) auf verschiedene Strecken der geodätischen Linien vertheilen, entsprechen ausserdem den Richtungen der beiden geodätischen Tangenten der Durchdringungscurve, welche durch jeden Punkt der Fläche hindurchgehen und, was das Ellipsoid betrifft, immer von verschiedener Art sind.

§ 5.

Das Längenelement der kürzesten Linien.

Das für die Folge wichtigste Resultat der §§ 2 bis 4 ist das folgende:

II. *Das Längenelement dreier verschiedener Liniengattungen: der geradlinigen Tangenten der beiden Flächen λ_0 und μ_0 , der geodätischen Tangenten der Durchdringungscurve auf den Flächen und der Durchdringungscurve selbst, kann durch ein und dieselbe Formel:*

$$dS = \pm \frac{d\lambda}{L} \pm \frac{d\mu}{M} + \frac{dv}{N}$$

gegeben werden.

Für die Durchdringungscurve ist nämlich $\frac{d\lambda}{L} = 0$ und $\frac{d\mu}{M} = 0$, sodass $dS = d\tilde{s}$ wird (§ 2); für die geodätischen Linien ist $\frac{d\lambda}{L} = 0$ oder $\frac{d\mu}{M} = 0$, sodass $dS = d\sigma$ wird (§ 4, 9); im Uebrigen umfasst der Ausdruck für dS die Formeln (5) des § 3. *Die Vorzeichen sind so zu bestimmen, dass die beiden ersten Differentiale, soweit sie nicht verschwinden, positiv ausfallen, wie das dritte.*

Die Integrale, durch welche sich die Bogenlänge S nach Satz II ausdrückt, sind hyperelliptische Integrale 2. Gattung*) vom Geschlecht $p = 2$. Dieselben würden beiläufig Integrale 3. Gattung werden bei Anwendung der allgemeinen projectivischen Maassbestimmung mit einer eigentlichen Fläche des confocalen Systems als Fundamentalfläche. Bedient man sich der projectivischen Verallgemeinerung und der homogenen Schreibweise der elliptischen Coordinaten in der Bezeichnungsweise meiner Inauguraldissertation**), so sind die betreffenden Integrale 3. Gattung von der Form:

*) Vgl. Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen, I. Abth., Art. 4.

**) Leipziger Dissertationen 1881.

$$C \int \frac{(\tau_1 \lambda_2 - \tau_2 \lambda_1) (\tau_1' \lambda_2 - \tau_2' \lambda_1) (\lambda_1 d\lambda_2 - \lambda_2 d\lambda_1)}{(\omega_1 \lambda_2 - \omega_2 \lambda_1) \Lambda};$$

darin ist:

$$\Lambda = \sqrt{(\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1)(\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)(\gamma_1 \lambda_2 - \gamma_2 \lambda_1)(\delta_1 \lambda_2 - \delta_2 \lambda_1)(\tau_1 \lambda_2 - \tau_2 \lambda_1)(\tau_1' \lambda_2 - \tau_2' \lambda_1)},$$

$\tau_1 : \tau_2$ und $\tau_1' : \tau_2'$ die dem obigen λ_0 und μ_0 entsprechenden Parameter und $\omega_1 : \omega_2$ der Parameter der Fundamentalfäche der Maassbestimmung, endlich C eine von diesen Parametern abhängige Constante.

Man mag bemerken, dass die 3 Liniengattungen, von denen in Satz II die Rede ist, sämmtlich als kürzeste Linien im Raume von 3 Dimensionen betrachtet werden können. Die gemeinsamen Tangenten zweier confocaler Flächen sind absolut kürzeste Linien dieses Raumes und zwar die allgemeinsten, weil jede gerade Linie 2 Flächen des confocalen Systems berührt. Die geodätischen Tangenten einer Krümmungcurve sind kürzeste Linien, die auf einer Fläche 2. Grades liegen, und zwar die allgemeinsten, weil jede geodätische Linie auf einer Fläche 2. Grades eine Krümmungcurve berührt. Die Durchdringungscuren endlich sind die einzigen und also auch die kürzesten Linien, die gleichzeitig auf zwei Flächen 2. Grades liegen.

In diesem Sinne können im Raume von n Dimensionen kürzeste Linien*) von n verschiedenen Arten mit Bezug auf ein System confocaler Flächen 2. Grades untersucht und für dieselben ein ähnlicher Satz, wie der Satz II, bewiesen werden.

§ 6.

Ueber den Verlauf der geodätischen Halbbogen der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ des Ellipsoides.

Integrirt man die Differentialgleichung der geodätischen Linien auf dem Ellipsoid λ_0 , welche die Krümmungcurve μ_0 berühren:

$$(6) \quad \pm (\mu - \lambda_0) \frac{d\mu}{M} + (\nu - \lambda_0) \frac{d\nu}{N} = 0$$

längs eines beliebigen geodätischen Halbbogens etwa 1. Art der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ von dem Berührungspunkte $B_1 = \lambda_0 \mu_0 \nu_1$ desselben mit dem rechten Zweige K_1 der Durchdringungscure bis zu dem nächsten Berührungspunkt $B_2 = \lambda_0 \mu_0 \nu_2$ mit dem linken Zweige K_2 in positiver Richtung unter Bezugnahme auf die Vorzeichenbestimmung (8) in § 4, so erhält man zwischen ν_1 und ν_2 die Relation:

*) Vgl. hierzu Schläffli, Crelle's Journal, Bd. XLIII, S. 23; ferner Lüröth, Schlämilch's Zeitschrift für Math. u. Physik, Bd. 13, S. 156.

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} (\nu - \lambda_0) \frac{d\nu}{\tilde{N}} = 2 \int_{\gamma}^{\mu_0} (\mu - \lambda_0) \frac{d\mu}{M}.$$

Der Werth des Integrals linker Hand bleibt in Folge der Eigenschaften des Differentials $\frac{d\nu}{\tilde{N}}$ der nämliche, wenn das Integral, anstatt längs der geodätischen Linie von B_1 bis B_2 , längs des Zweiges K_1 von B_1 bis B_2' hin erstreckt wird, wofern B_2' derjenige der 4 Punkte $\lambda_0 \mu_0 \nu_2$ auf K_1 ist, der mit B_2 in demselben Fache des Raumes R liegt (vgl. Fig. 2, welche die Zone $(\mu_0 \mu_0)$ in schematischer Ausbreitung auf die Ebene darstellt). Nun erhält ν bei einer Durchlaufung des Zweiges K_1 in positiver Richtung von B_1 aus den Werth ν_1 in 4 Punkten B_1, B_1', B_1'', B_1''' (Fig. 2) und das Integral $\int_{\nu_1}^{\nu} (\nu - \lambda_0) \frac{d\nu}{\tilde{N}}$, welches bei positiver Bewegung von ν beständig wächst, hat, falls es im Punkte B_1 mit dem Werthe 0 ausging, im Punkte B_1'' den Werth $2 \int_{\beta}^{\alpha} (\nu - \lambda_0) \frac{d\nu}{\tilde{N}}$; die Punkte B_1 und B_1'' theilen den Umfang des Zweiges K_1 , und entsprechend die Stücke von Curven $\nu = \nu_1$, welche die Punkte B_1 und B_1'' bezüglich mit den gegenüberliegenden Punkten des Zweiges K_2 verbinden, die Zone $(\mu_0 \mu_0)$ in 2 gleiche Theile. Nach diesen Bemerkungen ist offenbar:

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} (\nu - \lambda_0) \frac{d\nu}{\tilde{N}} = 2 \int_{\gamma}^{\mu_0} (\mu - \lambda_0) \frac{d\mu}{M} < \text{oder} > 2 \int_{\beta}^{\alpha} (\nu - \lambda_0) \frac{d\nu}{\tilde{N}},$$

jenachdem der geodätische Halbbogen $B_1 B_2$ weniger oder mehr als eine Hälfte der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ spannt, und folgt umgekehrt aus der Ausdehnung des Halbbogens die Richtigkeit der einen oder andern Ungleichung:

$$2 \int_{\gamma}^{\mu_0} (\mu - \lambda_0) \frac{d\mu}{M} \leq 2 \int_{\beta}^{\alpha} (\nu - \lambda_0) \frac{d\nu}{\tilde{N}}.$$

Da diese Bedingung von der Lage des beliebig gewählten geodätischen Halbbogens $B_1 B_2$ ganz unabhängig ist, so folgt:

Sobald man von irgend einem geodätischen Halbbogen der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ weiss, dass er weniger oder mehr als die halbe Zone spannt, so gilt das Gleiche von allen Halbbogen der Zone.

Wenn daher durch die folgende*) Betrachtung für einen geodätischen Halbbogen von ausgezeichneter Lage bewiesen wird, dass er weniger als eine Halbzone spannt, so gilt dies allgemein.

*) Diesen Beweis verdanke ich Herrn Klein.

Durch die x -Axe des Coordinatensystems, welche das Ellipsoid λ_0 im Punkte $P = \lambda_0, \gamma, \beta$ trifft, seien 2 Ebenen E und E' gelegt, welche die 4 Schnittpunkte $S_1 S_2, S'_1 S'_2 = \lambda_0 \mu_0 \alpha$ der Durchdringungscurve $(\lambda_0 \mu_0)$ mit der Ebene $x = 0$ ($\nu = \alpha$) enthalten. Die Ebene E schneidet das Flächenpaar λ_0, μ_0 in 2 sich in S_1 und S_2 berührenden Ellipsen, von denen die eine die andre einschliesst, die also ausser in den Punkten S_1 und S_2 gemeinsame Tangenten nicht besitzen. Demnach kann, von den Tangenten in S_1 und S_2 abgesehen, keine Tangente der Schnittcurve $S_1 S_2$ der Ebene E und des Ellipsoides λ_0 gemeinsame Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 , und daher in Folge von Satz I (§ 4) kein Element der Schnittcurve $S_1 S_2$, von den Endelementen abgesehen, zugleich Element einer geodätischen Tangente der Durchdringungscurve $(\lambda_0 \mu_0)$ sein. Da überdies jede Ebene durch die x -Axe, die mit der Ebene $\nu = \beta$ einen grösseren Winkel bildet als E , die Flächen λ_0 und μ_0 in 2 Ellipsen schneidet, die sich umschliessen, ohne nur einen Punkt gemein zu haben, so bilden diejenigen 2 unter den Tangenten des Ellipsoides λ_0 im Punkte P , welche zugleich μ_0 berühren, mit der Ebene $\nu = \beta$ nothwendig einen kleineren Winkel als die Ebene E . Diese Tangenten bezeichnen aber die Richtungen der beiden geodätischen Halbbogen der Zone $(\mu_0 \mu_0)$, die durch den Punkt P laufen. Diese Bogen, ein Bogen 1. Art G_1 und ein Bogen 2. Art G_2 haben also in P eine Richtung, die mit der Ebene $\nu = \beta$ einen kleineren Winkel bildet, als die Schnittcurven $S_1 S_2$ und $S'_1 S'_2$. Nimmt man hierzu noch, dass $\frac{dv}{N}$ längs der geodätischen

Linien immer positiv ist, so gelangt man zu dem Schlusse: Der geodätische Bogen G_1 tritt bei P in das dreiseitig begrenzte Gebiet $PS_2 R$ (vgl. Fig. 3), G_2 in das Gebiet $PS'_1 R'$ ein. Markirt man nun für alle Punkte des Weges PS_2 , den der ebene Schnitt E auf λ_0 bezeichnet, die Richtung des hindurchlaufenden geodätischen Bogens 1. Art, so müssen die bezeichneten Richtungen durch stetige Aenderung aus der Richtung von G_1 in P hervorgehen, was mit Rücksicht auf Satz I unmittelbar aus den Formeln für $\cos \partial_\mu$ und $\cos \partial$, in der letzten Anm. des § 3 folgt. Da insbesondere die Richtung von G_1 in P von der rechten zur linken Seite des Weges PS_2 führt, so wird dasselbe gelten von den Richtungen geodätischer Bogen 1. Art, die in benachbarten Punkten den Weg PS_2 schneiden, und es könnte eine der Richtungen in entfernteren Punkten des Weges nur dann den Weg von links nach rechts kreuzen, wenn zuvor einmal eine jener Richtungen d. h. ein Element eines geodätischen Bogens mit einem Elemente des Weges PS_2 selbst zusammengefallen wäre, was nach dem oben Bemerkten nicht möglich ist. Demnach laufen alle geodätischen Bogen 1. Art, wo sie den Weg PS_2 schneiden, von der

rechten zur linken Seite desselben. Was nun den geodätischen Bogen G_1 betrifft, so muss derselbe das Gebiet PS_2R , in welches er bei P eingetreten, nothwendig wieder verlassen, da er nirgends abbricht und, weil längs desselben innerhalb des Gebietes $d\nu$ sein Vorzeichen beibehält, nirgends umkehrt. Aus dem letzteren Umstande und der Beziehung der geodätischen Linien zur Krümmungscurve μ_0 folgt zugleich, dass G_1 das Gebiet PS_2R nur verlassen kann mit Durchschneidung des Weges PS_2 . Da nun alle geodätischen Bogen 1. Art, welche den Weg PS_2 schneiden, ihn von rechts nach links schneiden, G_1 aber, um das Gebiet PS_2R zu verlassen, ihn von links nach rechts durchsetzen muss, so muss G_1 vor seinem Austritt aus diesem Gebiet in einen geodätischen Bogen 2. Art übergegangen sein, d. h. die Krümmungscurve μ_0 berührt haben in einem Punkte B_2 , der auf der Strecke RS_2 liegt. Ergänzt man nun das geodätische Linienstück PB_2 durch das symmetrische Stück B_1P (vgl. Fig. 3), so erhält man in B_1B_2 einen geodätischen Halbbogen der Zone $(\mu_0\mu_0)$, der sicher nicht von einer auf die andere der beiden Hälften hinüberreicht, in welche die Ebene $x = 0$ die Zone theilt. Der Halbbogen muss überdies immer weniger als die halbe Zone spannen; denn wenn er gerade bis an die Grenzen S_1 und S_2 reichte, so würde sich die betrachtete geodätische Linie mit 2 Halbbogen schliessen und Gleiches müsste von allen geodätischen Linien der Zone $(\mu_0\mu_0)$ gelten, was im Allgemeinen nicht der Fall sein kann. Bei diesen Betrachtungen wurde über die beiden Flächen λ_0 und μ_0 des confocalen Systems nichts vorausgesetzt und es folgt daher allgemein: *Keiner der geodätischen Halbbogen, welche auf dem Ellipsoid λ_0 die beiden Zweige der Durchdringungscurve desselben mit dem einschaligen Hyperboloide μ_0 verbinden, spannt mehr als die Hälfte der von beiden Zweigen begrenzten Zone.* Zugleich folgt mit Bezug auf den analytischen Ausdruck dieser Eigenschaft der geodätischen Bogen:

$$(10) \quad 2 \int_{\gamma}^{\mu_0} (\mu - \lambda_0) \frac{d\mu}{M} < 2 \int_{\beta}^{\alpha} (\nu - \lambda_0) \frac{d\nu}{N}.$$

Analoge Betrachtungen, wie die in diesem Paragraphen angestellten, bei der Combination eines Ellipsoides λ_0 und eines *zweischaligen* Hyperboloides ν_0 angewandt, führen zu dem gegentheiligen Resultate: *Keiner der geodätischen Halbbogen, welche auf dem Ellipsoid λ_0 die beiden Zweige der Durchdringungscurve desselben mit dem zweischaligen Hyperboloide ν_0 verbinden, spannt weniger als die Hälfte der von den beiden Zweigen begrenzten Zone des Ellipsoides.*

§ 7.

Ueber den Verlauf gewisser Combinationen der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 mit den geodätischen Tangenten der Durchdringungcurve.

Durch jeden Punkt $P = \lambda_0 \mu \nu$ der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ des Ellipsoides λ_0 läuft nach § 4 ein geodätischer Bogen 1. Art und ein solcher 2. Art; dementsprechend mag auch von den beiden gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 , welche in $\lambda_0 \mu \nu$ das Ellipsoid berühren, die eine als eine Tangente 1. Art, die andre als eine Tangente 2. Art bezeichnet werden. Eine jede dieser Tangenten spaltet sich, wenn der Punkt P , etwa auf einer Curve $\mu = \text{const.}$, $\nu = \text{const.}$ von dem Ellipsoid λ_0 sich entfernend, in den Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$ übergeht, in ein Paar in Bezug auf λ conjugirter Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 ; die beiden entstehenden Paare mögen wiederum in Rücksicht auf die angedeutete Entstehungsweise, auf die man immer recurriren kann, als ein Paar 1. Art und ein Paar 2. Art unterschieden werden. Legt man von einem Punkte $P = \lambda \mu \nu$ des Raumes R an die beiden Flächen λ_0 und μ_0 ein Paar in Bezug auf λ_0 conjugirter Tangenten etwa 1. Art (alle folgenden Betrachtungen gelten ebenfalls für den Fall der 2. Art), so berühren dieselben, wie man sich leicht überzeugt, entweder beide zuerst das Ellipsoid λ_0 und dann das Hyperboloid μ_0 , oder aber die eine zuerst das Ellipsoid, die andere zuerst das Hyperboloid, sofern man sie für den Augenblick im Sinne der wachsenden λ durchläuft. Seien, was zunächst den 1. Fall angeht, Q_1 und Q_2 die Berührungspunkte der Tangenten mit dem Ellipsoid λ_0 . Dann berührt, wie die oben erwähnte Entstehungsweise des Tangentenpaares 1. Art erkennen lässt, PQ_1 einen geodätischen Bogen 1. Art, der von seinem Berührungspunkt B_1 mit dem Zweige K_1 der Durchdringungcurve her nach K_2 zustrebt, und PQ_2 einen geodätischen Bogen 1. Art, der von K_1 her nach Q_2 kommt und etwa in B_2 den Zweig K_2 berührt. Die positive Durchlaufung des Weges $B_1 Q_1 P Q_2 B_2$ führt von dem Zweige K_1 her über P nach dem Zweige K_2 (vgl. die schematische Darstellung Fig. 4). Der Weg besteht theils aus Elementen geodätischer Linien auf λ_0 , welche der Gleichung (6):

$$\pm (\mu - \lambda_0) \frac{d\mu}{M} + (\nu - \lambda_0) \frac{d\nu}{N} = 0$$

genügen, theils aus Elementen geradliniger Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 , welche unter andern der aus § 4, 3 folgenden Gleichung:

$$(11) \quad \mp (\lambda_0 - \lambda) \frac{d\lambda}{\Lambda} \pm (\mu - \lambda_0) \frac{d\mu}{M} + (\nu - \lambda_0) \frac{d\nu}{N} = 0$$

entsprechen. Die letztere Gleichung gilt demnach für alle Elemente des Weges und zwar, wie man mit Rücksicht auf die Regeln (4) und (8) findet (dabei ist nur zu bemerken, dass in (11) $\frac{d\lambda}{\Lambda}$ das entgegengesetzte Zeichen hat, wie in den einzelnen Gleichungen (3)), in den der Fig. 4 beigefügten Vorzeichencombinationen. Demnach liefert die Integration längs des Weges B_1PB_2 die Relation:

$$2 \int_{\lambda_0}^{\lambda} (\lambda_0 - \lambda) \frac{d\lambda}{\Lambda} + 2 \int_{\mu_0}^{\mu} (\mu - \lambda_0) \frac{d\mu}{M} + \int_{\nu_1}^{\nu} (\nu - \lambda_0) \frac{d\nu}{N} = 0$$

oder:

$$\int_{\nu_1}^{\nu} (\nu - \lambda_0) \frac{d\nu}{N} = 2 \int_{\lambda}^{\lambda_0} (\lambda_0 - \lambda) \frac{d\lambda}{\Lambda} + 2 \int_{\mu}^{\mu_0} (\mu - \lambda_0) \frac{d\mu}{M}.$$

Man schliesst daraus ebenso, wie in § 5, dass der Linienzug B_1PB_2 weniger als eine halbe Zone $(\mu_0\mu_0)$ des Ellipsoides λ_0 überspannt, wenn

$$(12) \quad 2 \int_{\lambda}^{\lambda_0} (\lambda_0 - \lambda) \frac{d\lambda}{\Lambda} + 2 \int_{\mu}^{\mu_0} (\mu - \lambda_0) \frac{d\mu}{M} < 2 \int_{\beta}^{\alpha} (\nu - \lambda_0) \frac{d\nu}{N}.$$

Diese Bedingung ist unabhängig von der Lage des Punktes P auf dem Ellipsoid λ und bei ihrer Ableitung ist nur vorausgesetzt, dass die beiden in Bezug auf λ conjugirten Tangenten PQ_1 und PQ_2 beide zuerst λ_0 berühren, dann erst μ_0 . Es folgt daher:

Wenn man von allen Punkten $P = \lambda\mu\nu$ des Ellipsoides λ , von denen 2 in Bezug auf λ conjugirte Tangenten 1. Art an die beiden Flächen λ_0 und μ_0 laufen, die beide zuerst λ_0 berühren, diese Tangenten construirt und auf λ_0 geodätisch bis zur Berührung mit der Durchdringungscurve $(\lambda_0\mu_0)$ fortsetzt, so spannt der erhaltene Weg von einer dieser Berührungen bis zur andern immer weniger als eine halbe Zone $(\mu_0\mu_0)$, wenn er es bei einer Lage des Punktes P thut.

Im Folgenden soll für eine specielle Lage von P die Voraussetzung des Satzes bewiesen werden.

Man wähle den Punkt P auf der x -Axe des Coordinatensystems und betrachte wieder das Ebenenpaar EE' des vorigen Paragraphen. Dann treten die Schnittlinien der von P über λ_0 und μ_0 errichteten Berührungskegel nicht aus dem die z -Axe enthaltenden doppelten Winkelraum zwischen diesen Ebenen heraus. Demnach verlaufen insbesondere die beiden Tangenten PQ_1 und PQ_2 innerhalb dieses Raumes; dieselben berühren auch beide zuerst das Ellipsoid λ_0 ; denn sie haben diese Eigenschaft, wenn P unendlich wenig von λ_0 entfernt auf der x -Axe liegt und können sie bei fortschreitender Bewegung von P auf der Axe erst verlieren, wenn sie einmal die Durchdringungscurve

($\lambda_0 \mu_0$) berührt haben, was gerade erst für $\lambda = -\infty$ eintritt. Somit liegt einer der beiden Berührungspunkte mit λ_0, Q_2 , in dem Gebiete PS_2R (Fig. 3) und beginnt daher auch die geodätische Fortsetzung Q_2B_2 innerhalb dieses Gebietes. Da dieselbe überdies von der 1. Art ist, so schliesst man wie in § 6, dass sie bereits innerhalb des Gebietes die Durchdringungscurve berührt. Analoges gilt natürlich für Q_1B_1 . Damit ist bewiesen, dass bei der angenommenen Lage des Punktes P der Weg B_1PB_2 nicht mehr als eine halbe Zone spannt. Er spannt sogar weniger als eine solche, weil die Weite des von ihm überspannten Zonentheils mit der Entfernung des Punktes P auf der x -Axe von der Fläche λ_0 wächst und doch erst, wenn P unendlich weit rückt, genau die halbe Zone gespannt wird*).

Damit ist zugleich die Gültigkeit der Ungleichung (12) für jedes endliche λ bewiesen.

Wenn man daher die 2 von einem Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$ des Raumes R an die Flächen λ_0 und μ_0 gelegten gemeinsamen Tangenten 1. Art, falls dieselben beide zuerst λ_0 berühren, jeweils geodätisch bis zu dem entsprechenden Zweige der Durchdringungscurve ($\lambda_0 \mu_0$) bis B_1 und B_2 fortsetzt, so kann man stets durch 2 Curvenstücke $\nu = \text{const.}$ die Zone ($\mu_0 \mu_0$) so halbiren, dass die Punkte B_1 und B_2 in derselben Halbzone liegen, ohne deren Grenzen zu erreichen; man kann ferner nach § 6 in der andern Halbzone einen geodätischen Halbbogen 2. Art construiren, dessen beide Berührungspunkte B_1' und B_2' mit der Durchdringungscurve beide innerhalb der letzteren Halbzone liegen.

Unter Einfügung der Stücke $B_1'B_1$ und $B_2'B_2$ der Durchdringungscurve erhält man dann einen geschlossenen Weg $PQ_2B_2B_2'B_1'B_1Q_1P$ (vgl. Fig. 4), welcher die Gleichgewichtslage eines geschlossenen Fadens bezeichnet, der in entsprechender Weise um die Combination der Flächen λ_0 und μ_0 geschlungen und durch den Punkt P gespannt ist (vgl. § 8).

Es bleibt der im Anfange dieses Paragraphen erwähnte 2. Fall zu betrachten. Der Punkt $P = \lambda \mu \nu$ liegt im Raume R so, dass von den beiden conjugirten Tangenten 1. Art, die von ihm an λ_0 und μ_0 laufen, die eine zuerst λ_0 , die andere zuerst μ_0 berührt. Seien wieder Q_1 und Q_2 die Berührungspunkte der Tangenten mit λ_0 ; alsdann liegt

*) An Stelle von (12) hat man dann:

$$\int_{-\infty}^{\lambda_0} (\lambda_0 - \lambda) \frac{d\lambda}{\Lambda} + \int_{\gamma}^{\mu_0} (\mu - \lambda_0) \frac{d\mu}{M} = \int_{\beta}^{\alpha} (\nu - \lambda_0) \frac{d\nu}{N}.$$

Ueber derartige Relationen zwischen den Perioden überall endlicher Integrale $p=2$ vgl. z. B. Prym, Neue Theorie der ultraeiliptischen Functionen, Denkschriften der Wiener Akademie, Bd. XXIV, S. 15; ferner Rosenhain, Mémoires présentés à l'Académie des Sciences, Bd. XI, S. 381.

auf einer der Strecken PQ_1 und PQ_2 , etwa auf PQ_1 , ein Berührungspunkt R_1 mit dem Hyperboloid μ_0 . Man setzt, wie vorhin, PQ_2 auf λ_0 geodätisch fort bis zur Berührung B_2 mit dem Zweige K_2 der Durchdringungscurve (vgl. Fig. 5). Die Tangente PQ_1 berührt nun jetzt, da sie mit dem Stücke R_1Q_1 bereits den Zweig K_1 der Durchdringungscurve überspannt hat, einen geodätischen Bogen 2. Art, der seinerseits den Weg PQ_1 auf λ_0 bis zur Berührung B_2' mit dem Zweige K_2 weiterführt. Indem man nun längs des Weges $B_2'Q_1R_1PQ_2B_2$ (Fig. 5) mit den der Figur beigefügten Vorzeichen die Differentialgleichung (11) hin integriert, ergibt sich:

$$2 \int_{\lambda_0}^{\lambda} (\lambda_0 - \lambda) \frac{d\lambda}{\Lambda} + 4 \int_{\mu_0}^{\mu} (\mu - \lambda_0) \frac{d\mu}{M} + \int_{\nu_2}^{\nu} (\nu - \lambda_0) \frac{d\nu}{N} = 0.$$

Es spannt nun der gesammte Weg weniger als die ganze Zone $(\mu_0\mu_0)$ des Ellipsoides (λ_0) , wenn:

$$(13) \quad 2 \int_{\lambda}^{\lambda_0} (\lambda_0 - \lambda) \frac{d\lambda}{\Lambda} + 4 \int_{\nu}^{\mu_0} (\mu - \lambda_0) \frac{d\mu}{M} < 4 \int_{\beta}^{\alpha} (\nu - \lambda_0) \frac{d\nu}{N}.$$

Die Richtigkeit dieser Ungleichung folgt aber aus den Formeln (10) und (12). Demnach ist die entsprechende Eigenschaft des Weges $B_2'PB_2$ ebenfalls wieder unbeschränkt gültig.

Wenn man daher die 2 von einem Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$ des Raumes R an die Flächen λ_0 und μ_0 gelegten Tangenten, falls die eine zuerst λ_0 , die andere zuerst μ_0 berührt, auf λ_0 geodätisch fortsetzt und zwar beide bis zu ihrer Berührung in B_2' und B_2 mit demselben Zweige der Durchdringungscurve, so überspannt der ganze Weg $B_2'PB_2$ noch nicht die ganze Zone $(\mu_0\mu_0)$. Unter Einfügung des Stückes B_2B_2' (vgl. Fig. 5) der Durchdringungscurve erhält man jetzt einen geschlossenen Weg $PQ_2B_2B_2'Q_1R_1P$, welcher die Gleichgewichtslage eines geschlossenen Fadens bezeichnet, der in entsprechender Weise um die Combination der Flächen λ_0 und μ_0 herumgeschlungen und durch den Punkt P gespannt wird (vgl. § 8).

Das Resultat dieses Paragraphen ist folgendes:

III. *Es gehören zu jedem Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$ des Raumes R zwei geschlossene Wege, entsprechend den beiden Tangentenpaaren 1. und 2. Art, welche folgende Eigenschaften haben:*

1. *Jeder derselben stellt die Gleichgewichtslage eines geschlossenen Fadens dar, der durch die Combination der Flächen λ_0 und μ_0 einerseits und durch den Punkt P anderseits gespannt wird.*

2. *Jeder derselben berührt einmal das Ellipsoid λ_0 (nämlich längs eines ganzen Curvenzuges, $Q_2B_2B_2'B_1'Q_1$ in Fig. 4 und $Q_2B_2B_2'Q_1$ in Fig. 5).*

3. Jeder derselben berührt je einmal jede der beiden Hälften des durch die Zone $(\mu_0 \mu_0)$ des Ellipsoides getheilten Hyperboloides μ_0 . (nämlich entweder längs eines Curvenzuges $B_2 B_2'$, $B_1' B_1$ in Fig. 4, $B_2 B_2'$ in Fig. 5, oder in einem Punkte, R_1 in Fig. 5).

Dass sich umgekehrt alle Gleichgewichtslagen eines geschlossenen Fadens, der von einem beweglichen Punkte P beständig gespannt wird und dabei immer den Bedingungen (2) und (3) entspricht, *im Wesentlichen* unter die geschilderten beiden Formen (Fig. 4 und 5) subsumiren, wird am Schluss des folgenden Paragraphen weiter entwickelt werden.

§ 8.

Fadenconstruction des Ellipsoides aus 2 gegebenen confocalen Flächen.

Die Combination zweier confocaler Flächen, eines Ellipsoides λ_0 und eines einschaligen Hyperboloides μ_0 , mag irgendwo im Raume festgelegt sein. Die sichtbare Zone $(\mu_0 \mu_0)$ des Ellipsoides λ_0 trennt den sichtbaren Theil des Hyperboloides μ_0 in 2 Hälften H_1 und H_2 , die sich bezüglich längs der Zweige K_1 und K_2 der Krümmungscurve μ_0 an das Ellipsoid ansetzen. Es soll nun ein geschlossener, unausdehnbarer Faden, der vorerst um die Zone $(\mu_0 \mu_0)$ des Ellipsoides λ_0 herumgeschlungen ist, durch einen beweglichen Punkt $P = \lambda \mu \nu$ des Raumes ausserhalb der beiden Flächen beständig gespannt werden und bei der Bewegung des Punktes P fortwährend den beiden Bedingungen III, (2) und (3) des vorigen Paragraphen entsprechen: *nämlich einmal das Ellipsoid λ_0 und je einmal jede der beiden Hälften H_1 und H_2 des Hyperboloides μ_0 berühren.*

Dabei ist unter einer *einmaligen Berührung* des Fadens mit einer der beiden Flächen die Aufeinanderfolge eines Ueberganges vom Raume ausserhalb der Fläche auf diese und eines Ueberganges von der Fläche in den Raum ausserhalb verstanden, gleichviel ob der Faden zwischen beiden Uebergängen nur in einem Punkte oder längs eines ganzen Curvenzuges auf die Fläche sich aufgelegt hat.

In irgend einer den gestellten Anforderungen genügenden Gleichgewichtslage des Fadens werden an diesem einzelne Stücke von verschiedener Gestalt zu unterscheiden sein. Da der Faden gespannt sein soll, wird ein solches durch seine geometrische Gestalt individualisirtes Fadenstück entweder geradlinig im Raume verlaufen oder sich geodätisch auf einer der Flächen λ_0 und μ_0 auflegen oder gleichzeitig beiden Flächen d. i. ihrer Durchdringungscurve sich anschmiegen. Was den Uebergang der einzelnen Fadenstücke ineinander betrifft, so wird sich derselbe wegen des geforderten Gleichgewichts so vollziehen, dass die Richtung einer geradlinigen Tangente der Fadencurve

längs derselben sich überall stetig ändert mit alleiniger Ausnahme des Punktes P , in welchem zwei im Allgemeinen geradlinige Stücke des Fadens unter einem kleineren Winkel als 180° zusammenstossen. Wo daher ein geradliniges Stück in ein geodätisches oder in ein der Durchdringungscurve angehöriges Stück übergeht, wird es der geradlinigen Tangente desselben im Uebergangspunkt angehören, und wo ein geodätisches Stück an ein in der Durchdringungscurve gelegenes Stück sich anschliesst, wird das erstere eine geodätische Tangente der Durchdringungscurve im Uebergangspunkt vorstellen. Zugleich bewirkt die Forderung III, 3, der zufolge immer wenigstens einer der beiden Zweige der Durchdringungscurve ein nicht verschwindendes Stück des Fadens in sich aufnehmen muss, dass die auf λ_0 oder μ_0 durch den Faden verzeichneten geodätischen Linien geodätische Tangenten der Durchdringungscurve und also die dieselben berührenden geradlinigen Fadenstücke gemeinsame Tangenten beider Flächen sind. Der Faden setzt sich daher seiner geometrischen Gestalt nach aus keinen andern als den 3 Arten von Linien zusammen, von denen in den §§ 2 bis 5 gehandelt wurde und besitzt, wie diese Linien, eine bestimmte positive Richtung. Es stellt sich demnach auch das Längenelement des Fadens allgemein durch den Ausdruck II des § 5 dar:

$$dS = \pm \frac{d\lambda}{L} \pm \frac{d\mu}{M} + \frac{d\nu}{\tilde{N}}$$

und ist also die Länge des Fadens, ausgedrückt als Function des Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$, der den Faden gerade spannt:

$$S = \int_{\lambda}^{\lambda} \left(\pm \frac{d\lambda}{L} \right) + \int_{\mu}^{\mu} \left(\pm \frac{d\mu}{M} \right) + \int_{\nu}^{\nu} \left(\frac{d\nu}{\tilde{N}} \right).$$

Hier ist jedes der 3 Integrale vom Punkte λ, μ, ν aus in positiver Richtung längs des Fadens bis wieder zu λ, μ, ν zurück zu erstrecken und dabei die Vorzeichenregel des Satzes II in § 5 dahin anzuwenden, dass bei der Integration für alle Längenelemente die positiven Werthe in Rechnung gezogen werden. Ueber die Integrationswege, welche der geschlossene Faden für die Integrationsvariablen λ, μ, ν bezeichnet, ist nun Folgendes zu bemerken:

Längs des ganzen Fadens von P aus bis wieder zu P zurück behält $\frac{d\nu}{\tilde{N}}$ einen positiven Werth, während allerdings $d\nu$ und $\tilde{N}$ 4 mal gleichzeitig ihr Vorzeichen wechseln, nämlich wo der Faden die Ebenen $\nu = \beta$ und $\nu = \alpha$ schneidet. Der Faden muss nämlich, wenn er einmal, wie vorausgesetzt, von Anfang an um die Zone (μ_0, μ_0) herum-

geschlungen ist, im gespannten Zustande immer die beiden genannten Ebenen je 2mal und zwar abwechselnd durchsetzen. Der Fadenweg ist daher für das dritte der obigen Integrale ein doppelter Periodenweg und zwar ist:

$$\int_{\gamma}^{\nu} \frac{d\nu}{N} = 4 \int_{\beta}^{\alpha} \frac{d\nu}{N}.$$

Da ferner kein Fadenstück eine andere Fläche μ berührt als $\mu = \mu_0$, so kehrt sich in dem Differential $\pm \frac{d\mu}{M}$ das Vorzeichen nur an 4 Stellen um, nämlich an den 2 Stellen, wo der Faden die Ebene $\mu = \gamma$ durchsetzt, und an den 2 Stellen, wo er das Hyperboloid $\mu = \mu_0$ berührt, gleichviel ob dies in einem Punkte oder längs eines Curvenzuges stattfindet. Die beiden kritischen Stellen trennen sich auf dem Faden gerade gegenseitig, weil die Berührungen mit dem Hyperboloid verschiedenen Hälften H_1 und H_2 des letzteren angehören. Demnach ist auch für das zweite der obigen Integrale der Fadenweg ein doppelter Periodenweg und zwar ist:

$$\int_{\mu}^{\mu} (\pm \frac{d\mu}{M}) = 4 \int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{d\mu}{M}.$$

Da endlich der Faden das Ellipsoid λ_0 nur einmal berührt und andere kritische Stellen für das Differential $\pm \frac{d\lambda}{L}$, vom Punkte P selbst abgesehen, nicht vorkommen, so wechselt dasselbe nur einmal das Vorzeichen und ist:

$$\int_{\lambda}^{\lambda} (\pm \frac{d\lambda}{L}) = 2 \int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{L}.$$

Für die Länge S des Fadens ergibt sich daher der allein von der Coordinate λ des Punktes λ, μ, ν abhängige Ausdruck:

$$S = 2 \int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{L} + 4 \int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{d\mu}{M} + 4 \int_{\beta}^{\alpha} \frac{d\nu}{N}.$$

Zugleich folgt aus dem Umstande, dass auf dem Fadenwege $d\lambda$ einmal, $d\mu$ und $d\nu$ je viermal das Zeichen wechseln, dass die im Punkte P zusammenstossenden, im Allgemeinen geradlinigen, Stücke des Fadens ein Paar in Bezug auf λ conjugirter Tangenten von λ_0 und μ_0 bilden (vgl. § 3). Fasst man das erhaltene Resultat zusammen, indem man bemerkt, dass die Bedingung III, 2, wenn der gespannte Faden einmal von Anfang an um die beiden Flächen

λ_0 und μ_0 herumgeschlungen ist, von selbst erfüllt bleibt, und schliesslich nur die Bedingung III, 3 die Bewegung des Punktes P wesentlich charakterisirt, so erhält man den Satz:

IV. Wenn ein geschlossener Faden, der um die Combination zweier confocaler Flächen, eines Ellipsoides λ_0 und eines einschaligen Hyperboloides μ_0 , herumgeschlungen ist, durch einen beweglichen Punkt P gespannt wird und zwar derart, dass er beständig jede der beiden durch das Ellipsoid getrennten Stücke des Hyperboloides berührt, so beschreibt der Punkt ein den gegebenen Flächen confocales Ellipsoid und die Halbierungslinie des Winkels der bei P zusammenstossenden Fadenteile ist die Normale des Ellipsoides*).

Zugleich besteht zwischen der Länge S des Fadens und dem Parameter λ des zu construierenden Ellipsoides die Relation:

$$S = 2 \int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{(\lambda_0 - \lambda) (\mu_0 - \lambda) d\lambda}{2V(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)(\lambda_0 - \lambda)(\mu_0 - \lambda)} \\ + 4 \int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{(\mu - \lambda_0) (\mu_0 - \mu) d\mu}{2V(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)(\mu_0 - \mu)} \\ + 4 \int_{\beta}^{\alpha} \frac{(\nu - \lambda_0) (\nu - \mu_0) d\nu}{2V(\alpha - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \gamma)(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)},$$

wo die Integrale mit positiver Quadratwurzel auf reellem Wege zu nehmen sind.

Natürlich kann die durch Satz IV gegebene Fadenconstruction eines Ellipsoides λ nur die ausserhalb der beiden gegebenen Flächen λ_0 und μ_0 gelegene Zone des Ellipsoides λ liefern. Dass aber für jeden Punkt dieser Zone eine den Bedingungen des Satzes entsprechende Gleichgewichtslage des gespannten Fadens existirt, ist durch den in § 7 bewiesenen Satz III ausgesprochen. Alle den Bedingungen des Satzes IV entsprechenden Gleichgewichtslagen werden sich überdies nach den im Eingange des vorliegenden Paragraphen gemachten Bemerkungen unter die typische Form der in § 7 geschilderten Lagen subsumiren, sofern man von unwesentlichen Verschiedenheiten absieht. Diese Verschiedenheiten haben ihren Grund darin, dass die betrachteten Gleichgewichtslagen des Fadens nicht in allen Stücken eindeutig bestimmt sind. Ohne nämlich die einem gegebenen Punkte λ, μ, ν nach § 7 entsprechende Gleichgewichtslage des Fadens zu stören, kann man im 1. Falle des § 7 (vgl. Fig. 4) den geodätischen Halbbogen $B_2'B_1'$ soweit verschieben, dass noch

*) Das letztere folgt auch unmittelbar aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

keiner der beiden Berührungspunkte B_2' und B_1' bezüglich die Grenzen B_2 und B_1 erreicht, und kann man im 2. Falle des § 7 (vgl. Fig. 5) das Stück $B_2 R_1$ dahin modificiren, dass der Faden von R_1 nicht in der geradlinigen Fortsetzung $R_1 Q_1$ von PR_1 weitergeht, sondern sich erst längs eines Stückes $R_1 R_1'$ geodätischer Tangente der Durchdringungscurve an μ_0 anschmiegt und erst dann in der früheren Weise nach dem Zweige K_2 der Durchdringungscurve hinstrebt, den er etwa in B_2'' berührt. Das geodätische Stück $R_1 R_1'$ kann sich eventuell auch bis zu dem Zweige K_1 der Durchdringungscurve hinstrecken, denselben etwa in B_1' berühren und noch längs eines Stückes $B_1' B_1''$ in demselben verlaufen (vgl. Fig. 6), um dann mit einem vollen geodätischen Halbbogen von B_1'' aus den Zweig K_2 , etwa in B_2'' , zu erreichen. Die einzige Beschränkung, welcher diese Modificationen des Fadenstückes $B_2 R_1$ unterworfen sind, ist die, dass der Punkt B_2'' im Sinne der positiven Durchlaufungsrichtung des Zweiges K_2 dem Punkte B_2 immer nachfolgen muss.

§ 9.

Einige Specialfälle.

Lässt man, ausgehend von dem Falle der Fig. 5, den Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$ auf die Fläche des Hyperboloides μ_0 fallen, so fällt nicht nur der Berührungspunkt R_1 der Tangente PQ_1 und des Hyperboloides mit P zusammen, sondern es rückt auch der Berührungspunkt der Tangente PQ_2 und des Hyperboloides, auf der Verlängerung der Tangente über P hinaus herankommend, in den Punkt P hinein. Die beiden gemeinsamen Tangenten PQ_2 und PQ_1 der Flächen λ_0 und μ_0 vom Punkte $P = \lambda \mu_0 \nu$ setzen sich von Q_2 und Q_1 aus auf λ_0 je bis zur Berührung B_2 und B_2' mit K_2 geodätisch fort und werden durch das zwischen B_2 und B_2' gelegene Stück des Zweiges K_2 verbunden. Der geschlossene Weg $PQ_2 B_2 B_2' Q_1 P$ ist die dem Punkte P entsprechende Gleichgewichtslage des geschlossenen Fadens; bewegt sich der Punkt P nunmehr auf μ_0 , indem er den Faden beständig spannt, so beschreibt er die Krümmungscurve $\lambda = \lambda$ auf dem Hyperboloid μ_0 . Hält man zwei innerhalb des Stückes $B_2 B_2'$ gelegene Punkte des Fadens fest und bewegt den Punkt P auf μ_0 nur soweit, als die Berührungspunkte B_2 und B_2' der Fadenstrecken $PQ_2 B_2$ und $PQ_1 B_2'$ mit dem Zweige K_2 der Durchdringungscurve die beiden festen Punkte noch zwischen sich einschliessen, so hat man einen besonderen Fall der von Chasles*) angegebenen, aber nur innerhalb gewisser Grenzen gültigen Construction der Krümmungscurve.

*) Chasles, Liouville's Journal, I. Serie, Bd. XI, S. 16. — Salmon-Fiedler, Anal. Geom. des Raumes II, Art. 155.

Nimmt man in dem allgemeinen Resultate IV des § 8 $\lambda = \lambda_0$, so geht der folgende Satz hervor:

V. Die Summe der Längen zweier sich nicht schneidender geodätischer Halbbogen verschiedener Art auf der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ des Ellipsoides λ_0 , diese Summe noch vermehrt um die Längen der beiden Stücke der Krümmungcurve μ_0 , welche je zwei auf demselben Zweige der Krümmungcurve gelegene Endpunkte der geodätischen Halbbogen verbinden, ist von dem constanten Werthe:

$$S = 4 \int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{d\mu}{M} + 4 \int_{\beta}^{\alpha} \frac{d\nu}{N}.$$

Hieraus fließt für $\mu_0 = \beta$ der bekannte Satz*):

Die Summe der Längen zweier geodätischer Linien auf dem Ellipsoid, welche beide zwei diametral gegenüberliegende Kreispunkte verbinden, ist constant, vgl. § 10.

Für $\mu_0 = \gamma$ geht aus IV das Graves'sche Theorem hervor:

Wenn ein um die Ellipse λ_0 in der xy -Ebene ($\mu = \gamma$) geschlungener geschlossener Faden durch einen in der Ebene beweglichen Punkt P gespannt wird, so beschreibt der bewegliche Punkt eine der gegebenen confocale Ellipse. Zugleich besteht zwischen der Fadenlänge S und dem Parameter λ der zu construierenden Ellipse die Relation**):

$$S = 2 \int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{(\lambda_0 - \lambda) d\lambda}{2V(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)(\lambda_0 - \lambda)} + 4 \int_{\beta}^{\alpha} \frac{(\nu - \lambda_0) d\nu}{2V(\alpha - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \lambda_0)}.$$

Eine nähere Betrachtung erfordern diejenigen Specialfälle des allgemeinen Satzes IV, bei denen mit den Annahmen $\lambda_0 = \gamma$ oder $\mu_0 = \beta$ das gegebene Ellipsoid in die Focalellipse oder das gegebene Hyperboloid in die Focalhyperbel ausartet. Es tritt dann nämlich als neues Moment hinzu, dass der Faden nicht mehr auf einer Fläche, sondern über eine Raumcurve gleitet.

§ 10.

Specialfall $\lambda_0 = \lambda_0$, $\mu_0 = \beta$: Fadenconstruction des Ellipsoides aus einem gegebenen Ellipsoid und dessen Focalhyperbel.

Gegeben ist ein Ellipsoid λ_0 und die Focalhyperbel $\mu_0 = \beta$, welche als Grenzfall des einschaligen Hyperboloides convexerseits durch ein entsprechendes Stück ($\mu = \beta$) der Ebene $y = 0$ undurchdringlich ausgefüllt gedacht werden mag. Die beiden Zweige der Durchdringungs-

*) M. Roberts, Liouville's Journal, I. Serie, Bd. XI, S. 3.

**) Vgl. die nur formell verschiedenen Ausdrücke bei Hesse, Anal. Geometrie des Raumes, Vorl. XXI.

curve $(\lambda_0 \mu_0)$ bestehen bei dieser Auffassung aus den ebenen Curvenstücken, in welchen das Ellipsoid dieses Ebenenstück schneidet, und die positive Richtung dieser Zweige ist je auf der einen Seite des Ebenenstückes die entgegengesetzte, wie auf der andern (vgl. Fig. 7). Die gemeinsamen Tangenten der beiden Flächen λ_0 und $\mu_0 = \beta$, sowie die geodätischen Linien der nun zur vollen Oberfläche des Ellipsoides verbreiterten Zone $(\beta\beta)$ haben, wie früher, eine bestimmte positive Richtung mit positivem $\frac{d\nu}{N}$. Für die in der Ebene

$y = 0$ verlaufenden Linien beiderlei Gattung bestimmt sich die positive Richtung nach ihrem Verhalten auf dem Ebenenstück $\mu = \beta$ und ist auf beiden Seiten desselben entgegengesetzt. Die geodätischen Halbbogen der Zone $(\beta\beta)$, welche dieselben beiden diametral gegenüberliegenden Kreispunkte des Ellipsoides λ_0 verbinden, sind auf verschiedenen Seiten der Ebene $y = 0$ von verschiedener Art im Sinne des § 4.

Ich bezeichne mit $K_1 K_2$ und $K'_1 K'_2$ die beiden Paare diametral gegenüberliegender Kreispunkte des gegebenen Ellipsoides λ_0 und mit $H_1 H_2$ und $H'_1 H'_2$ die beiden Paare diametral gegenüberliegender Quadranten des ausserhalb des Ellipsoides verlaufenden Theiles der Focalhyperbel, sofern dieselbe als Curve gedacht wird (vgl. Fig. 7). Fasst man jedes dieser beiden Quadrantenpaare unter dem Namen eines „Zuges der Focalhyperbel“ zusammen, so läuft jeder der beiden Züge von einem Kreispunkt durch das Unendliche hindurch zu dem diametral gegenüberliegenden Kreispunkt. Bekanntlich*) schneiden, wie auch aus dem Satze I des § 4 hervorgeht, alle geradlinigen Tangenten einer geodätischen Linie auf dem Ellipsoid, welche 2 diametrale Kreispunkte verbindet, die Focalhyperbel und zwar denjenigen Zug derselben, welcher, durch das Unendliche hindurchlaufend, dieselben beiden Kreispunkte verbindet. Man erkennt überdies, dass von den 4 gemeinsamen Tangenten des Ellipsoides λ_0 , und seiner Focalhyperbel, welche durch einen beliebigen Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$ des Raumes hindurchgehen, immer 2 den einen und 2 den andern Hyperbelzug berühren und immer 2 solche in Bezug auf λ conjugirt sind, welche denselben Hyperbelzug berühren. Sind nun Q_1 und Q_2 die Berührungspunkte zweier durch P gehender und etwa den Hyperbelzug $H_1 H_2$ treffender Tangenten, die überdies ein Tangentenpaar 1. Art im Sinne des § 7 bilden, so liegt, wie man unmittelbar erkennt, entweder auf keiner oder auf einer der Strecken PQ_1 und PQ_2 ein Schnittpunkt mit der Focalhyperbel.

Im ersteren Falle berührt jede der Tangenten bezüglich in Q_1

*) Vgl. z. B. Chasles, Liouville's Journal, I. Serie, Band XI, S. 12.

und Q_2 einen geodätischen Halbbogen 1. Art der Zone ($\beta\beta$) des Ellipsoides, der von K_1 nach K_2 hinläuft, und kann die eine PQ_1 geodätisch nach K_1 , die andere PQ_2 ebenso nach K_2 fortgesetzt werden. Die Wege PQ_1K_1 und PQ_2K_2 sind offenbar die kürzesten Wege von P nach K_1 und K_2 , falls eine Durchschneidung der Fläche λ_0 für unzulässig gilt. Die kürzeste Schliessung des Weges $K_1Q_1PQ_2K_2$ (Fig. 7) ist indessen unbestimmt und wird durch jeden*) geodätischen Halbbogen 2. Art, der von K_2 nach K_1 läuft, geleistet. Der durch irgend einen solchen Halbbogen geschlossene Weg $PQ_2K_2K_1Q_1P$ stellt die Gleichgewichtslage eines geschlossenen Fadens dar, der nach dem Punkte P hingezogen und gezwungen ist, durch die Punkte K_1 und K_2 hindurchzugehen.

Im zweiten Falle berührt eine der beiden Tangenten, etwa PQ_2 , wie vorhin, in Q_2 einen geodätischen Halbbogen 1. Art, ohne vorher die Focallhyperbel zu treffen, und setzt sich geodätisch nach K_2 hin fort; die andere schneidet zwischen P und Q_1 die Focallhyperbel in einem Punkte R_1 auf dem Quadranten H_1 derselben und mag von hier zunächst geradlinig bis zu ihrem Berührungspunkt Q_1 mit λ_0 und von Q_1 durch ein Bogenstück 2. Art geodätisch bis K_2 fortgesetzt werden (vgl. Fig. 8). Der geschlossene Weg $PQ_2K_2Q_1R_1P$ stellt wieder die Gleichgewichtslage eines geschlossenen Fadens dar, der nach P hingezogen wird und gezwungen ist, durch K_2 zu gehen und den Hyperbelquadranten H_1 zu berühren. Dabei bleibt indessen die Lage des Stückes $K_2Q_1R_1$ unbestimmt. Denn wenn man von R_1 irgend welche Tangenten an λ_0 zieht und dieselben von ihrem Berührungspunkt Q_1 bis K_2 geodätisch verlängert, so sind die erhaltenen Wege $R_1Q_1K_2$ alle gleich lang**). Ueberdies steht die Halbirungslinie des Winkels zwischen den geradlinigen Stücken PR_1 und R_1Q_1 immer auf der Tangente der Focallhyperbel in R_1 senkrecht, weil PR_1 und R_1Q_1 Stücke von Halberzeugenden verschiedener Mäntel des Kreiskegels sind, der mit der Spitze R_1 über λ_0 errichtet werden kann. Diese Winkelbeziehung bedingt aber das Gleichgewicht eines von K_2 in der Lage $K_2Q_1R_1P$ nach P hin gespannten Fadens, der bei R_1 ohne Reibung über die als Curve gedachte Focallhyperbel gleitet. Ist umgekehrt ein Faden, der von K_2 nach P gespannt wird und über den Quadranten H_1 der Hyperbel gleitet, im Gleichgewicht, so liegt sein Kreuzungspunkt R_1 mit H_1 eben so, dass die Gerade PR_1 in ihrer Verlängerung λ_0 berührt.

Unter eine der beiden geschilderten Gleichgewichtslagen (Fig. 7 und 8) subsumiren sich im Wesentlichen alle Gleichgewichtslagen eines

*) Vgl. M. Roberts, Liouville's Journal, I. Serie, Bd. XI, S. 3.

**) Salmon-Fiedler, Anal. Geom. d. Raumes II, Art. 152.

durch einen beweglichen Punkt P gespannten, geschlossenen Fadens, der um das Ellipsoid λ_0 herumgeschlungen und gezwungen ist, beständig über jeden von 2 diametral gegenüberliegenden Quadranten der Focalhyperbel zu gleiten. Die beiden geschilderten Lagen erfüllen aber die Bedingungen des allgemeinen Satzes IV des § 8 und die Anwendung desselben giebt das Resultat:

VI. *Wenn ein um ein gegebenes Ellipsoid geschlungener geschlossener Faden durch einen beweglichen Punkt P des Raumes der Art gespannt wird, dass er beständig über 2 diametral gegenüberliegende Quadranten der Focalhyperbel gleitet, so beschreibt der bewegliche Punkt ein dem gegebenen Ellipsoid confocales Ellipsoid und die Halbierungslinie des Winkels der bei P zusammenstossenden Fadenstücke ist die Normale des Ellipsoides.*

Zugleich besteht zwischen der Länge S des Fadens und dem Parameter λ des zu construierenden Ellipsoides die Relation:

$$S = 2 \int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{(\lambda_0 - \lambda) d\lambda}{2V(\alpha - \lambda)(\gamma - \lambda)(\lambda_0 - \lambda)} + 4 \int_{\gamma}^{\alpha} \frac{(\mu - \lambda_0) d\mu}{2V(\alpha - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)},$$

wo μ als Collectivbezeichnung für μ und ν gebraucht ist. Die hyperelliptischen Integrale 2. Gattung des allgemeinen Falles sind in elliptische derselben Gattung übergegangen.

Um die Construction mechanisch zu realisiren, füge man in das Gypsmodell eines Ellipsoides die Focalhyperbel ein, die man aus einem Doppeldraht bildet, so dass die Curve selbst durch den Spalt zwischen den zwei dicht nebeneinander herlaufenden Drähten dargestellt wird. Nun hat man nur dafür zu sorgen, dass der geschlossene Faden vor seiner Schliessung durch den Spalt eines jeden von 2 diametral gegenüberliegenden Quadranten der Focalhyperbel hindurch gezogen worden ist. Man spannt dann den Faden mittels eines Häkchens, welches auf einer Seite der Ebene der Focalhyperbel beliebig bewegt wird und nur beim Uebergang auf die andre Seite selbst durch den Spalt der Focalhyperbel hindurchgeführt wird. Die Stelle, wo der Faden über das Häkchen gleitet, beschreibt dann das volle Ellipsoid, ohne dass mehr als 2 diametrale Quadranten der Focalhyperbel zur Benutzung kommen. Dafür werden allerdings bei der Construction der einen Hälfte des Ellipsoides Tangentenpaare 1. Art (im Sinne des § 7), bei der andern solche 2. Art angewendet, was natürlich bei der mechanischen Construction ausser Acht gelassen werden darf.

Für den Hauptschnitt $y = 0$ des Ellipsoides giebt der Satz VI dieselbe Construction der Ellipse, wie das Graves'sche Theorem, wenn man die Willkür in den Gleichgewichtslagen des Fadens entsprechend ausnützt.

§ 11.

Specialfall $\lambda_0 = \gamma$, $\mu_0 = \mu_0$: Fadenconstruction des Ellipsoides aus einem gegebenen einschaligen Hyperboloid und dessen Focalellipse.

Gegeben ist ein einschaliges Hyperboloid μ_0 und die Focalellipse $\lambda_0 = \gamma$, welche als Grenzfall der confocalen Ellipsoide auf ihrer concaven Seite mit einem undurchdringlichen Ebenenstücke ausgefüllt gedacht werden mag. In der auf beiden Seiten dieses Ebenenstückes zu verzeichnenden elliptischen Schnittcurve mit der Fläche μ_0 hat man die beiden Zweige der früheren Durchdringungscurve ($\lambda_0 \mu_0$) zu erblicken, einen rechten Zweig K_1 und einen linken K_2 , wenn man den früheren positiven Durchlaufungssinn festhält (Fig. 9). Wie die Durchdringungscurve selbst, so haben auch alle geradlinigen Tangenten der beiden Flächen $\lambda_0 = \gamma$ und μ_0 und alle geodätischen Tangenten der Durchdringungscurve (γ, μ_0) auf einer der beiden Flächen noch immer eine bestimmte positive Richtung, in der $\frac{dv}{N}$ positiv ist.

Die geodätischen Halbbogen der Zone ($\mu_0 \mu_0$) des ausgearteten Ellipsoides stellen sich jetzt dar als gebrochene Linien; die Halbbogen 1. Art laufen als geradlinige Tangenten der Ellipse K_1 auf der rechten Seite des Ebenenstückes $\lambda_0 = \gamma$ von K_1 weg bis zum Rande der Focalellipse und von hier auf der linken Seite als geradlinige Tangenten der Ellipse K_2 auf diese zu; entsprechend die Halbbogen 2. Art.

Von den 4 gemeinsamen Tangenten der Focalellipse $\lambda_0 = \gamma$ und des Hyperboloides μ_0 , welche durch einen beliebigen Punkt $P = \lambda, \mu, v$ des Raumes hindurchgehen, berühren, von P aus im Sinne der wachsenden λ gerechnet, immer 2 zuerst die Focalellipse, 2 andere zuerst das Hyperboloid μ_0 , und sind immer 2 solche, die sich hierin verschieden verhalten, in Bezug auf λ conjugirt. Es seien Q_1 und Q_2 die Berührungspunkte zweier in Bezug auf λ conjugirter Tangenten, die etwa ein Paar 1. Art bilden, mit $\lambda_0 = \gamma$. Auf einer der beiden Strecken PQ_1 und PQ_2 , etwa auf der ersteren, liegt ein Berührungspunkt R_1 mit μ_0 . Es schliesst sich dann an PQ_2 in Q_2 ein Stück eines geodätischen Halbbogens 1. Art an, welcher, falls beispielsweise P rechts von der Ebene $z = 0$ liegt, auf der linken Seite von $\lambda_0 = \gamma$ auf K_2 zustrebt und an PQ_1 in Q_1 ein Stück eines geodätischen Halbbogens 2. Art, welcher auf derselben Seite von K_2 herkommt (vgl. Fig. 9). Man verbindet nun die Berührungspunkte B_2 und B_2' dieser Fortsetzungen durch das betreffende Stück $B_2 B_2'$ des Zweiges K_2 der Durchdringungscurve. Der geschlossene Weg $PQ_2 B_2 B_2' Q_1 R_1 P$ bezeichnet die Gleichgewichtslage eines geschlossenen Fadens, der in entsprechender Weise um die Combination der Flächen $\lambda_0 = \gamma$ und μ_0 geschlungen und nach P hin gespannt ist. Denn wo derselbe über

die Focalellipse gleitet (bei Q_2 und Q_1) steht die Halbirungslinie des Winkels seiner beiden geradlinigen Strecken (PQ_2 und Q_2B_2 , $B_2'Q_1$ und Q_1R_1) auf der Tangente der Focalellipse senkrecht, weil die betreffenden Strecken jeweils Halberzeugenden verschiedener Mäntel eines Kreiskegels angehören, der seine Spitze auf der Focalellipse hat und das Hyperboloid berührt. Das Fadenstück $B_2B_2'Q_1R_1$ kann dabei ohne Einfluss auf das Gleichgewicht bei fester Lage des Punktes P innerhalb gewisser Grenzen verschoben werden. Anstatt nämlich das Hyperboloid μ_0 nur in dem einen Punkte R_1 zu berühren und sich über R_1 geradlinig nach Q_1 fortzusetzen, kann das Fadenstück von R_1 auf μ_0 geodätisch fortlaufen und erst, nachdem es längs eines endlichen Stückes R_1R_1' mit μ_0 in Contact geblieben, geradlinig nach einem entsprechenden Punkte Q_1' der Focalellipse hinstreben, um sich hier umzubiegen und in der Ebene der Ellipse als geradlinige Tangente $Q'B_2''$ in B_2'' den Zweig K_2 der Durchdringungcurve zu erreichen; oder das Fadenstück kann von R_1 aus auf μ_0 geodätisch bis zur Berührung mit K_1 fortschreiten und von hier, nachdem es eventuell noch eine Strecke weit mit K_1 zusammengefallen ist, als geradlinige Tangente von K_1 nach dem Rande der Focalellipse und von hier umbiegend wieder nach dem Zweige K_2 hinlaufen, den es in einem Punkte B_2'' berührt.

Diese Modificationen sind indessen immer auf gewisse Grenzen eingeschränkt durch die Bedingung, dass der Punkt B_2'' im Sinne der positiven Durchlaufung des Zweiges K_2 nothwendig dem Punkte B_2 nachfolgen muss (vgl. § 8).

Unter die geschilderten Gleichgewichtslagen eines geschlossenen Fadens subsumiren sich alle Gleichgewichtslagen eines solchen, falls derselbe um die Combination der Flächen $\lambda_0 = \gamma$ und μ_0 herumgeschlungen und durch einen beweglichen Punkt der Art gespannt wird, dass er jede der beiden Hälften des Hyperboloides μ_0 beständig je einmal berührt, während er gleichzeitig ohne Reibung über die Focalellipse hinweggleitet. Diese Lagen entsprechen daher alle den Bedingungen des allgemeinen Satzes IV des § 8, sodass man den Satz erhält:

VII. *Wenn ein um die Combination eines einschaligen Hyperboloides und seiner Focalellipse geschlungener geschlossener Faden durch einen beweglichen Punkt P des Raumes der Art gespannt wird, dass er beständig über die Focalellipse gleitet und jede der beiden Hälften des Hyperboloides beständig berührt, so beschreibt der bewegliche Punkt ein dem gegebenen Hyperboloid confocales Ellipsoid und die Halbirungslinie des Winkels der bei P zusammenstossenden Stücke des Fadens ist die Normale des Ellipsoides.*

Zugleich besteht zwischen der Länge S des Fadens und dem Parameter λ des zu construierenden Ellipsoides die Relation:

$$S = 2 \int_{\lambda}^{\gamma} \frac{(\mu_0 - \lambda) d\lambda}{2V(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)(\mu_0 - \lambda)} + 4 \int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{(\mu_0 - \mu) d\mu}{2V(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\mu_0 - \mu)} \\ + 4 \int_{\mu}^{\alpha} \frac{(\nu - \mu_0) d\nu}{2V(\alpha - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \mu_0)}.$$

Auch hier werden die Integrale elliptisch, aber eine Zusammenziehung der 3 Integrale in 2, wie bei Satz VI, findet nicht statt. Es geschieht daher bei Anwendung des Satzes VII die Construction des Hauptschnittes $z=0$ des Ellipsoides λ nicht in unmittelbarer Uebereinstimmung mit dem Graves'schen Theorem, sondern es ergibt sich eine Construction, die einer *doppelten* Anwendung dieses Theorems entspricht.

§ 12.

Specialfall $\lambda_0 = \gamma$, $\mu_0 = \beta$: Fadenconstruction des Ellipsoides aus seinen beiden Focalcurven.

Gegeben sind zwei zusammengehörige Focalcurven*). Das Innere der Focalcurven denke man sich zunächst im Anschluss an die allgemeineren Fälle der §§ 10 und 11 noch von Ebenenstücken ausgefüllt. Die Brennpunkte der Focalellipse seien im Anschluss an § 10 sowohl auf der rechten, als auf der linken Seite der Ebene der Ellipse markirt und die betreffenden 4 Punkte mit K_1 , K_2 und K_1' , K_2' benannt (vgl. Fig. 10). Die geodätischen Halbbogen 1. Art, welche auf dem Ellipsoid λ_0 (§ 10) die Kreispunkte K_1 und K_2 auf der einen, und die geodätischen Halbbogen 2. Art, welche die Kreispunkte K_2 und K_1 auf der andern Seite der Ebene $y=0$ verbanden, stellen sich jetzt dar als gebrochene Linien, die von dem einen Endpunkte K_1 des Hyperbelzuges $H_1 H_2$ über den Rand der Focalellipse nach dem andern Endpunkt K_2 oder umgekehrt von K_2 nach K_1 hinlaufen. Von den 4 Focallinien eines Punktes $P=\lambda, \mu, \nu$ d. h. den 4 durch ihn hindurchgehenden gemeinsamen Tangenten der beiden Focalkegelschnitte, sind auch hier, wie in § 10, zwei solche in Bezug auf λ conjugirt, welche denselben Hyperbelzug schneiden, und berührt, wie in § 11, von 2 in Bezug auf λ conjugirten Tangenten immer eine zuerst die Focalellipse, die andre zuerst die Focalhyperbel, falls man sie beide für den Augenblick im Sinne der wachsenden λ durchläuft. Sind Q_1 und Q_2 die Berührungspunkte zweier den Zug $H_1 H_2$ schneidender Focallinien des Punktes P mit der Focal-

*) Deux focales conjuguées nach der Bezeichnung von Chasles, Aperçu historique, Note XXXI, Nr. 7, Anm.

ellipse, so liegt immer auf einer der beiden Strecken PQ_1 und PQ_2 , etwa auf PQ_1 , ein Schnittpunkt R_1 mit der Focalhyperbel (vgl. Fig. 10), auf der andern nicht. Man führe nun, falls P beispielsweise auf der rechten Seite der Focalellipse liegt und die Tangenten PQ_1 und PQ_2 ein Tangentenpaar 1. Art bilden, den Weg PQ_2 auf der linken Seite der Ebene durch ein Stück geodätischen Halbbogens 1. Art nach K_2 fort, und führe anderseits auch den Weg PR_1 bis K_2 fort und zwar entweder über Q_1 oder über irgend einen andern Punkt Q_1' der Focalellipse hinweg; der Punkt Q_1' mag dabei nur auf diejenige Seite der Ebene $y = 0$ beschränkt sein, auf der Q_1 liegt, damit die Fortsetzung $Q_1'K_2$ von der 2. Art werde. Alle diese Fortsetzungen $R_1Q_1'K_2$ sind gleichlang und es steht nicht nur die Halbierungslinie des Winkels zwischen den Strecken PR_1 und R_1Q_1' auf der Tangente der Focalhyperbel in R_1 , sondern auch die Halbierungslinie des Winkels zwischen den Strecken R_1Q_1' und $Q_1'K_2$ auf der Tangente der Focalellipse in Q_1' senkrecht. Demnach bezeichnet der geschlossene Weg $PQ_2K_2Q_1'R_1P$ die Gleichgewichtslage eines geschlossenen Fadens, der durch den Punkt P gespannt wird und gezwungen ist, beständig durch K_2 zu gehen und über den Quadranten H_1 der Focalhyperbel zu gleiten, und anderseits subsumirt sich jede mögliche Gleichgewichtslage eines solchen Fadens unter die hier geschilderte. Mit Rücksicht darauf ergibt sich folgende Specialisirung des allgemeinen Satzes IV des § 8:

VIII. *Wird ein geschlossener Faden, der um 2 zusammengehörige Focalcurven geschlungen ist, durch einen beweglichen Punkt P in der Weise gespannt, dass er beständig über jeden von 2 diametral gegenüberliegenden Quadranten der Focalhyperbel gleitet, so beschreibt der bewegliche Punkt ein zu den gegebenen Focalcurven gehöriges Ellipsoid und die Halbierungslinie des Winkels der bei P zusammenstossenden Fadenstücke ist die Normale des Ellipsoides. Zugleich besteht zwischen der Länge S des Fadens und dem Parameter λ des zu construierenden Ellipsoides die Relation:*

$$S = 2 \int_{\lambda}^{\gamma} \frac{d\lambda}{2\sqrt{\alpha - \lambda}} + 4 \int_{\gamma}^{\beta} \frac{d\mu}{2\sqrt{\alpha - \mu}} + 4 \int_{\beta}^{\alpha} \frac{d\nu}{2\sqrt{\alpha - \nu}},$$

oder:

$$S = 2 \sqrt{\alpha - \lambda} + 2 \sqrt{\alpha - \gamma}.$$

Durch geeignete Ausnützung der Willkür, welche die Lage des Fadenstückes $K_2Q_1'R_1$ zulässt, kann man die Construction VIII noch wesentlich vereinfachen, indem man den geschlossenen Faden durch einen mit seinen beiden Enden in 2 festen Punkten befestigten Faden ersetzt. Die diesbezügliche Betrachtung bleibt dem folgenden Paragraphen vorbehalten, der im Zusammenhange die aus dem Satze VIII hervorgehende Theorie der gebrochenen Focaldistanzen für die 3 centrischen Flächen 2. Grades behandeln soll.

§ 13.

Die Theorie der gebrochenen Focaldistanzen.

Es sei G die Focalellipse des confocalen Systems, g_1, g_2 ihre Brennpunkte, H die Focalhyperbel und h_1, h_2 ihre Brennpunkte (Fig. 11). Man mag sich etwa von den Ebenen $y = 0$ und $z = 0$, die auf den concaven Seiten der Focalkegelschnitte befindlichen Stücke den Focalkegelschnitten eingefügt denken; dieser Auffassung zu Folge sind in Fig. 11 die durch die genannten Ebenenstücke verdeckten Linien punktirt gehalten.

Sei nun $P = \lambda, \mu, \nu$ ein übrigens beliebiger Punkt in dem Raumviertel oberhalb der Ebene der Focalellipse und vor der Ebene der Focalhyperbel. Bei der Symmetrie der Figur wird durch diese Annahme über die Lage des Punktes P die Allgemeinheit der folgenden Erörterungen nicht beschränkt. Von den 4 Focallinien des Punktes P , die jetzt, anders als früher, von P aus immer im Sinne der wachsenden λ durchlaufen werden sollen, schneiden 2 zuerst die Focalellipse (in G_1 und G_2), 2 andere zuerst die Focalhyperbel (in H_1 und H_2). Die beiden Strecken PG_1 und PG_2 , die in ihren Verlängerungen über P oder G hinaus immer verschiedene Züge der Focalhyperbel (vgl. §§ 10 und 12) schneiden, setzen sich, wie aus § 12 unmittelbar hervorgeht, von G_1 und G_2 auf der andern Seite der Ebene der Focalellipse bezüglich bis g_1 und g_2 derart fort, dass die entstehenden gebrochenen Linien PG_1g_1 und PG_2g_2 die kürzesten über die Focalellipse gemessenen Entfernungen des Punktes P von den Punkten g_1 und g_2 oder die stabilen Gleichgewichtslagen zweier Fäden sind, die respective in g_1 und g_2 befestigt und über die Focalellipse, auf der sie ohne Reibung gleiten, nach P hin gespannt sind. Seien diese beiden über die Focalellipse gemessenen kürzesten Entfernungen („gebrochenen Focaldistanzen“) des Punktes P von den Brennpunkten g_1 und g_2 der Focalellipse ihrer Lage und Länge nach mit r_1 und r_2 bezeichnet.

Die beiden Strecken PH_1 und PH_2 werden ihrerseits über H_1 und H_2 hinaus bezüglich bis zu den Brennpunkten h_1 und h_2 der Focalhyperbel hin verlängert und zwar auf der hinteren Seite der Ebene der Focalhyperbel. Die so entstehenden gebrochenen Linien PH_1h_1 und PH_2h_2 sind die kürzesten über die Focalhyperbel gemessenen Entfernungen des Punktes P von den Brennpunkten h_1 und h_2 der Focalhyperbel oder die stabilen Gleichgewichtslagen zweier Fäden, die respective in h_1 und h_2 befestigt und über die Focalhyperbel, auf der sie ohne Reibung gleiten, nach P hin gespannt sind. Seien diese beiden über die Focalhyperbel gemessenen kürzesten Entfernungen („ge-

brochenen Focaldistanzen“) des Punktes P von den Brennpunkten der Focalhyperbel ihrer Lage und Länge nach mit s_1 und s_2 bezeichnet.

Betreffs der Zusammengehörigkeit der 4 Focallinien PG und PH im Sinne des § 4 erkennt man ohne Schwierigkeit, dass:

$$\left. \begin{array}{l} PG_1 \text{ und } PH_2 \\ PG_2 \text{ und } PH_1 \end{array} \right\} \text{ in Bezug auf die Fläche } \lambda,$$

$$\left. \begin{array}{l} PG_1 \text{ und } PH_1 \\ PG_2 \text{ und } PH_2 \end{array} \right\} \text{ in Bezug auf die Fläche } \mu,$$

$$\left. \begin{array}{l} PG_1 \text{ und } PG_2 \\ PH_1 \text{ und } PH_2 \end{array} \right\} \text{ in Bezug auf die Fläche } \nu$$

einander conjugirt sind, oder anders ausgedrückt: Die 4 Linienstücke PG und PH , respective deren Verlängerungen über P hinaus rückwärts, die für den Augenblick mit PG' und PH' bezeichnet seien, ordnen sich mit Bezug auf die Normalen N_λ , N_μ , N_ν der drei durch P gehenden Flächen λ , μ , ν in der Weise an, dass die Winkel:

$$(a) \quad \begin{array}{l} G_1 PH_2 \text{ und } G_2 PH_1 \text{ von } N_\lambda, \\ G_1 PH_1' \text{ und } G_2 PH_2' \text{ von } N_\mu, \\ G_1 PG_2' \text{ und } H_1 PH_2' \text{ von } N_\nu \end{array}$$

halbirt werden. Es mag nun unter dem Winkel zwischen irgend zweien der gebrochenen Focalstrahlen r_1 , r_2 , s_1 , s_2 immer der Winkel zwischen den betreffenden Stücken PG_1 , PG_2 , PH_1 , PH_2 derselben verstanden werden; dagegen mag der Winkel zwischen einem Stücke PG_1 , PG_2 , PH_1 , PH_2 einerseits und einem Stücke PG_1' , PG_2' , PH_1' , PH_2' andererseits seiner Grösse und Lage nach als das Supplement des Winkels der betreffenden gebrochenen Focalstrahlen bezeichnet sein.

Die Differentialgleichungen der einzelnen Stücke der gebrochenen Focalstrahlen eines Punktes P sind theils in der allgemeinen Form (3) § 3 der Differentialgleichungen der gemeinsamen Tangenten zweier Flächen λ_0 und μ_0 , theils in den Formen:

$$\frac{(\mu - \lambda_0) d\mu}{V(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\mu_0 - \mu)(\mu - \lambda_0)} \pm \frac{(\nu - \lambda_0) d\nu}{V(\alpha - \nu)(\beta - \nu)(\nu - \gamma)(\nu - \mu_0)(\nu - \lambda_0)} = 0$$

und:

$$\frac{(\nu_0 - \lambda) d\lambda}{V(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)(\nu_0 - \lambda)(\lambda_0 - \lambda)} \pm \frac{(\nu_0 - \mu) d\mu}{V(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\nu_0 - \mu)(\mu - \lambda_0)} = 0$$

der Differentialgleichungen der geodätischen Tangenten der Krümmungscurven μ_0 und λ_0 respective auf den Flächen λ_0 und ν_0 enthalten; sie entsprechen den besonderen Annahmen $\lambda_0 = \gamma$, $\mu_0 = \nu_0 = \beta$. Nun gilt der Ausdruck II des § 5 für das Linienelement der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 und die geodätischen Tangenten der Krümmungscurve μ_0 auf λ_0 mit Veränderung von μ_0 in ν_0 auch für

das Linienelement der geodätischen Tangenten der Krümmungcurve λ_0 auf ν_0 . Diesen Bemerkungen zufolge ergibt sich als gemeinsamer Ausdruck für den Werth des Linienelementes der verschiedenen Stücke der gebrochenen Focalstrahlen der folgende:

$$dS = \pm \frac{d\lambda}{2\sqrt{\alpha-\lambda}} \pm \frac{d\mu}{2\sqrt{\alpha-\mu}} \pm \frac{d\nu}{2\sqrt{\alpha-\nu}},$$

wobei die Vorzeichen, wie früher, so einzurichten sind, dass der Werth eines jeden der 3 Differentiale positiv ausfällt (vgl. § 5). Es sei nun der Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$, wie in Fig. 11, durch die Ebene $\nu = \alpha$ von den Punkten g_1 und h_1 getrennt, sodass die gebrochenen Focalstrahlen r_1 und s_1 die Ebene $\nu = \alpha$ schneiden. Längs des Strahles r_1 wächst alsdann λ von λ bis γ , nimmt μ von μ bis γ ab, um hernach wieder von γ bis β zu wachsen, und wächst endlich ν von ν bis α , um nachdem Durchgang durch die Ebene $\nu = \alpha$, wieder von α bis β abzunehmen, ohne bei G_1 eine Unterbrechung in der stetigen Abnahme zu erfahren Demnach ist:

$$r_1 = \int_{\lambda}^{\gamma} \frac{d\lambda}{2\sqrt{\alpha-\lambda}} - \int_{\mu}^{\gamma} \frac{d\mu}{2\sqrt{\alpha-\mu}} + \int_{\gamma}^{\beta} \frac{d\mu}{2\sqrt{\alpha-\mu}} + \int_{\nu}^{\alpha} \frac{d\nu}{2\sqrt{\alpha-\nu}} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\nu}{2\sqrt{\alpha-\nu}}$$

und entsprechend:

$$r_2 = \int_{\lambda}^{\gamma} \frac{d\lambda}{2\sqrt{\alpha-\lambda}} - \int_{\mu}^{\gamma} \frac{d\mu}{2\sqrt{\alpha-\mu}} + \int_{\gamma}^{\beta} \frac{d\mu}{2\sqrt{\alpha-\mu}} - \int_{\nu}^{\beta} \frac{d\nu}{2\sqrt{\alpha-\nu}},$$

$$s_1 = \int_{\lambda}^{\gamma} \frac{d\lambda}{2\sqrt{\alpha-\lambda}} + \int_{\mu}^{\beta} \frac{d\mu}{2\sqrt{\alpha-\mu}} - \int_{\beta}^{\gamma} \frac{d\mu}{2\sqrt{\alpha-\mu}} + \int_{\nu}^{\alpha} \frac{d\nu}{2\sqrt{\alpha-\nu}} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\nu}{2\sqrt{\alpha-\nu}},$$

$$s_2 = \int_{\lambda}^{\gamma} \frac{d\lambda}{2\sqrt{\alpha-\lambda}} + \int_{\mu}^{\beta} \frac{d\mu}{2\sqrt{\alpha-\mu}} - \int_{\beta}^{\gamma} \frac{d\mu}{2\sqrt{\alpha-\mu}} - \int_{\nu}^{\beta} \frac{d\nu}{2\sqrt{\alpha-\nu}},$$

wobei überall die Quadratwurzeln *positiv* verstanden sind. Mit Ausführung der Integration ergibt sich hieraus für die Längen der 4 gebrochenen Focalstrahlen des Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$:

$$r_1 = \sqrt{\alpha-\lambda} - \sqrt{\alpha-\mu} + \sqrt{\alpha-\nu} + \sqrt{\alpha-\gamma},$$

$$r_2 = \sqrt{\alpha-\lambda} - \sqrt{\alpha-\mu} - \sqrt{\alpha-\nu} + \sqrt{\alpha-\gamma},$$

$$s_1 = \sqrt{\alpha-\lambda} + \sqrt{\alpha-\mu} + \sqrt{\alpha-\nu} - \sqrt{\alpha-\beta},$$

$$s_2 = \sqrt{\alpha-\lambda} + \sqrt{\alpha-\mu} - \sqrt{\alpha-\nu} - \sqrt{\alpha-\beta}^*).$$

*) In der Ebene drücken sich bekanntlich die beiden Focaldistanzen des Punktes λ, μ in elliptischen Coordinaten durch die Formeln aus:

$$r_1 = \sqrt{\alpha-\lambda} + \sqrt{\alpha-\mu},$$

$$r_2 = \sqrt{\alpha-\lambda} - \sqrt{\alpha-\mu},$$

Wenn nicht r_1 und s_1 , sondern r_2 und s_2 die Ebene $v = \alpha$ durchsetzten, so hätte man in diesen 4 Formeln nur das Vorzeichen von $\sqrt{\alpha - v}$ umzukehren. Es folgt nun hieraus:

$$\begin{aligned} (b) \quad \left. \begin{aligned} |r_1 + s_2| \\ |r_2 + s_1| \end{aligned} \right\} &= 2 \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \gamma} - \sqrt{\alpha - \beta}, \\ \left. \begin{aligned} |r_1 - s_1| \\ |r_2 - s_2| \end{aligned} \right\} &= |2 \sqrt{\alpha - \mu} - \sqrt{\alpha - \gamma} - \sqrt{\alpha - \beta}|, \\ \left. \begin{aligned} |r_1 - r_2| \\ |s_1 - s_2| \end{aligned} \right\} &= 2 \sqrt{\alpha - v}, \end{aligned}$$

wobei allgemein $|x|$ den absoluten Werth von x bedeutet und wieder alle Quadratwurzeln positiv gerechnet sind. Es mag $\sqrt{\alpha - \gamma}$ die grosse und $\sqrt{\alpha - \beta}$ die kleine Excentricität der confocalen Flächen λ, μ, v heissen; es mögen ferner r_1, r_2 und s_1, s_2 Paare *gleichartiger* und r_1, s_1 und r_2, s_2 Paare *gleichseitiger gebrochener Focaldistanzen* oder *Focalstrahlen* des Punktes λ, μ, v genannt werden (vgl. Fig. 11).

Alsdann fliessen aus den Ergebnissen (a) und (b) die folgenden Sätze:

I. *Für jeden Punkt des Ellipsoides ist die Summe zweier ungleichseitiger ungleichartiger gebrochener Focaldistanzen constant, nämlich gleich der Länge der grossen Axe des Ellipsoides, vermehrt um die Differenz seiner Excentricitäten.*

Zugleich ist die Halbierungslinie des Winkels zwischen zwei entsprechenden Focalstrahlen die Normale des Ellipsoides.

Da ein gebrochener Focalstrahl des Punktes P immer die stabile Gleichgewichtslage eines Fadens ist, der in einem der Punkte g oder h befestigt, und über die entsprechende Focalcurve G oder H hinwegleitend, nach P hingespant wird, so kann dieser Satz zu einer äusserst einfachen Fadenconstruction des Ellipsoides verwerthet werden. Man verwendet dazu ein Drahtmodell, welches die beiden Focalkegelschnitte, verbunden durch die geradlinigen Stücke $h_1 g_1$ und $g_2 h_2$, darstellt und befestigt einen Faden mit seinen beiden Enden in den Punkten g_1 und h_2 (oder g_2 und h_1). Der Faden muss so über die beiden Focalcurven gelegt sein, dass er, durch einen Punkt P gespannt, die Lage $g_1 G_1 P H_2 h_2$ (oder $g_2 G_2 P H_1 h_1$) annimmt (Fig. 11). Der Punkt P beschreibt alsdann, indem er sich in dem einen der durch die Ebenen der Focalkegelschnitte abgegrenzten Raumviertel bewegt und beständig den Faden spannt, ein Viertel der Ellipsoidfläche. Der Uebergang des Punktes P in ein anderes Raumviertel muss, wie leicht ersichtlich, mit einer gleichzeitigen Aenderung der Lagenbeziehung des Fadens zu den Focalkegelschnitten verbunden sein.

II. *Für jeden Punkt des einschaligen Hyperboloides ist die Differenz*

zweier gleichseitiger ungleichartiger gebrochener Focaldistanzen constant, nämlich gleich der Länge der grossen reellen Axe des einschaligen Hyperboloides, vermindert um die Summe seiner Excentricitäten.

Zugleich ist die Halbirungslinie des Supplementes des Winkels zwischen zwei entsprechenden Focalstrahlen die Normale des einschaligen Hyperboloides.

III. *Für jeden Punkt des zweischaligen Hyperboloides ist die Differenz zweier ungleichseitiger gleichartiger gebrochener Focaldistanzen constant, nämlich gleich der Länge der reellen Axe des zweischaligen Hyperboloides.*

Zugleich ist die Halbirungslinie des Supplementes des Winkels zwischen zwei entsprechenden Focalstrahlen die Normale des zweischaligen Hyperboloides.