

4. *Turbulenz bei einem Flusse*¹⁾; von *L. Hopf*.

§ 1. Das Turbulenzproblem.

Bei seiner grundlegenden Untersuchung des Turbulenzproblems stellte sich Osborne Reynolds²⁾ auf den Standpunkt, daß die hydrodynamischen Gleichungen durchaus und für alle Fälle Gültigkeit besitzen, daß darum die — im Fall einer kreisrunden Röhre als Poiseuillesches Gesetz bekannte — Lösung dieser Gleichungen immer eine mögliche Strömung darstellt, daß aber diese mögliche Strömung nicht unter allen Umständen stabil ist, und darum bei bestimmten Versuchsbedingungen, und zwar gerade bei den großen Verhältnissen der Wasserleitungen usw., nicht in Erscheinung treten kann. Aus einer einfachen Dimensionsbetrachtung³⁾ leitete er ein Gesetz ab, nach welchem die einzige für eine Strömung zwischen festen Wänden charakteristische Konstante R , welche wir weiterhin als Reynoldssche Zahl bezeichnen wollen, sich aus Dichte ρ , Reibungskoeffizienten μ , mittlerer Geschwindigkeit \bar{v} und einer linearen Abmessung l der Strömung (wie Röhrendurchmesser, Tiefe oder dgl.) so zusammensetzt, daß

$$R = \frac{\rho \bar{v} l}{\mu}.$$

Durch eine Reihe von Experimenten an Röhren hat er ferner bewiesen, daß bei einer gewissen kritischen „Reynoldsschen Zahl“ die Poiseuillesche Strömung instabil zu werden beginnt, gleichgültig, welches der absolute Wert jeder einzelnen der in Betracht kommenden Größen ist.

Indes eine einwandfreie und befriedigende theoretische Durchführung dieses Gedankens von der Instabilität der laminaren Bewegung ist Reynolds doch nicht gelungen. Mit Hilfe einer Energiebetrachtung⁴⁾ erwies er zwar die Möglichkeit

1) Auszug aus der Münchner Dissertation 1909.

2) O. Reynolds, Scientific papers 2. p. 51—105, sowie die populären Vorträge über diesen Gegenstand, l. c. 2. p. 153—162 u. 524—534.

3) O. Reynolds, l. c. p. 55.

4) O. Reynolds, Scientific papers 2. p. 535—577.

einer solchen Instabilität, doch ist sein Resultat nur in sehr geringer Übereinstimmung mit der Erfahrung. Und viel weiter ist die Theorie auch bei Reynolds's Nachfolgern nicht gekommen. Lorentz¹⁾ vereinfachte und vertiefte zwar die Energiebetrachtung, doch ergab sich auch bei ihm noch kein ganz überzeugendes Resultat; Kelvin²⁾ gelangte zu der Konsequenz, daß es sich nicht um eine gewöhnliche, d. h. mit unendlich kleinen Störungen erregbare Instabilität handle; Rayleigh³⁾ bekämpfte dies Resultat, und zwar wohl mit Recht; und schließlich die konsequente Durchrechnung des Problems nach der Methode der kleinen Schwingungen durch Sommerfeld⁴⁾ ist noch nicht zu Ende geführt. So können wir die kardinale Frage, ob wir die hydrodynamische Theorie für die Erklärung des Turbulenzphänomens als zureichend ansehen dürfen oder nicht, noch keineswegs als gelöst betrachten.

Größeren Erfolg hat die weitere experimentelle Durchführung zu verzeichnen; Couette⁵⁾ bestätigte Reynolds's Resultate an Röhren und wies ein analoges Verhalten an einer Flüssigkeit zwischen zwei konzentrischen Zylindern nach, von denen der eine bewegt wird; ein theoretisch sehr interessanter Fall, da er bei stabiler Strömung näherungsweise durch den einfachsten Ansatz einer linearen Geschwindigkeitsverteilung dargestellt werden kann, und so den Untersuchungen von Lorentz, Kelvin und Sommerfeld zugrunde liegt. Von weiteren Arbeiten nenne ich hier nur die von Ruckes⁶⁾, welcher zeigte, daß die für Flüssigkeiten geltenden Gesetze sich auf Gase übertragen lassen.

Gar nicht untersucht wurde dagegen bisher der Fall der freien Flußströmung, und es war aus verschiedenen Gründen verlockend, gerade diesen Fall experimentell zu behandeln. Nicht nur, daß die Lücke ausgefüllt werden mußte; es war auch sonst mancher Aufschluß durch das teilweise Fehlen

1) H. A. Lorentz, Abhandlungen über theor. Physik 1. p. 43.

2) Lord Kelvin, Phil. Mag. Aug. u. Sept. 1887.

3) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 1892. p. 59; Scientific papers 3. p. 575.

4) A. Sommerfeld, Verh. d. int. Mathem.-Kongresses, Rom 1908.

5) M. Couette, Ann. de chim. et phys. 21. p. 433. 1890.

6) W. Ruckes, Ann. d. Phys. 25. p. 983. 1908.

fester Wände zu erwarten; ja man konnte sogar hoffen, an dem Verhalten der freien Oberfläche einiges vom Verlauf der „turbulenten Bewegungen“ geradezu zu sehen.

§ 2. Apparat und Ausrechnung der Experimente.

Die der Untersuchung dienende Anordnung ist in Fig. 1 schematisch dargestellt.

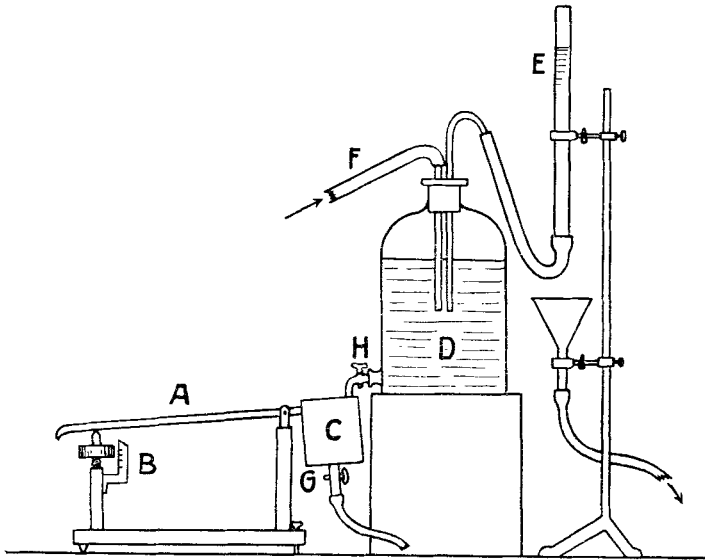


Fig. 1.

Eine sorgfältig geglättete Messingrinne *A* von 5,2 cm Breite diente als Flußbett und konnte durch eine Schraube *B* mit 1,3 mm Ganghöhe ein beliebiges Gefälle erhalten. Über diese Rinne sollte das Wasser nur unter Einfluß der Schwere strömen. Um möglichst alle Störungen auszuschalten, gelangte das Wasser von der Leitung her bei *F* in eine große, 20 Liter fassende Flasche *D*, von dieser in ein kleineres, 3 Liter fassendes Gefäß *C*, das mit der Rinne fest verbunden war, und aus dem das Wasser in die Rinne hinein überlief. Durch den Hahn *G* war eine feinere Regulierung möglich gemacht. Um von den starken Schwankungen in der Leitung unabhängig zu werden, wurde noch ein Überlauf *E* an die Flasche angeschlossen, so daß die Ausflußmenge durch den Überdruck

des Niveaus in *E* über das Niveau in *C* gegeben und, durch Einstellung des Wasserleitungshahnes und der beiden Hähne *G* und *H* passend geregelt, auf beliebige Zeit konstant blieb.

Bei den Versuchen mit Zuckerlösung wurde die Wasserleitung durch ein auf hohem Gerüst festgestelltes, 200 Liter fassendes Blechgefäß ersetzt, in welches nach Beendigung des Versuches die aufgefangene Flüssigkeit mittels einer Wasserstrahlpumpe wieder emporgesaugt wurde; das war leicht möglich, da die Höhe des oberen Gefäßes über dem Boden des unteren etwa 4 m betrug.

Zum Messen der Ausflußmengen diente eine gewöhnliche Meßflasche; zur Messung der Tiefe wurde — nach vergeblichen

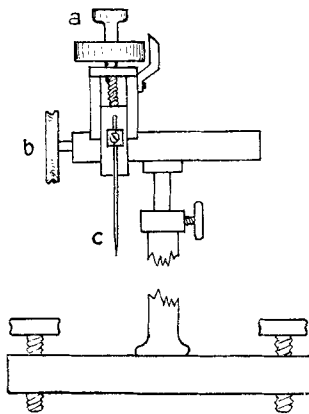


Fig. 2.

Versuchen mit einem Dickenmesser und einem Senkblei — ein besonderer durch Fig. 2 veranschaulichter einfacher Apparat konstruiert: eine am Boden feststehende Anordnung mit einer vertikal beweglichen, sehr feinen Schraube *a* von 0,434 mm Ganghöhe und einer horizontal beweglichen Schraube *b*, deren Bedeutung im nächsten Paragraphen deutlich werden wird. Berührte die Metallspitze *c* die Oberfläche des Flusses, so ließ sich das an einer deutlichen Zuckung und Wellenbildung an der Oberfläche

sehr gut erkennen. Die Berührung mit der Grundfläche wurde durch Schließung eines elektrischen Stromkreises noch genauer beobachtet.

Das Gefälle wurde an der Schraube *B* (Fig. 1) abgelesen, nachdem vor jedem Versuch die Rinne mittels einer Libelle horizontal gestellt war, sowohl in der Stromrichtung, wie senkrecht dazu.

Zunächst ist die Formel zur Ausrechnung der Versuche anzugeben. Wir suchen die Ausflußmenge Q pro Sekunde in einem Flusse von endlicher, aber gegen die Tiefe h sehr großer Breite $2b$, von der Dichte ρ und der Reibungskonstanten μ , bei einem Gefälle α . Wir rechnen unter Voraus-

setzung einer stabilen laminaren Strömung, d. h. wir nehmen von vornherein eine Geschwindigkeitskomponente nur in der durch das Flußbett bestimmten x -Richtung an. In der x -Richtung wird die Strömung beiderseits unbegrenzt angenommen. In der um α gegen die Vertikale geneigten y -Richtung reicht sie von $y = 0$ (Grund) bis $y = h$ (Oberfläche), in der z -Richtung von $z = -b$ bis $z = +b$ (seitliche Ränder des Flusses).

So haben wir die Differentialgleichungen zu lösen:

$$(1) \begin{cases} \mu \Delta u = -\rho g \sin \alpha, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos \alpha, \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Dazu die Grenzbedingungen:

$$(2) \begin{cases} u = 0 & \text{für } y = 0, \\ u = 0 & \text{für } z = \pm b, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & \text{für } y = h, \\ p = 0 & \text{für } y = h. \end{cases}$$

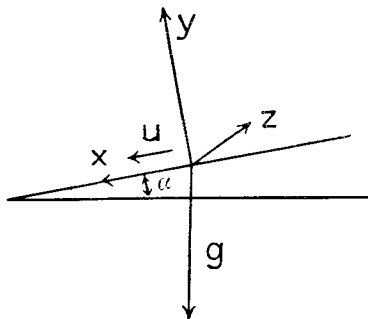


Fig. 3.

Um die Darstellung nicht zu sehr zu unterbrechen, unterdrücke ich die mathematischen Durchführungen an dieser Stelle und verweise deshalb auf den Anhang.

Dort wird das Resultat erhalten:

$$(3) \quad Q = \frac{2}{3} \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} b h^3 \left(1 - 0,63 \frac{h}{b} \right).$$

Das erste Glied ist der bekannte Ausdruck für unendliche Breite, das zweite bringt die Korrektur auf endliche Breite bis auf Glieder von der Größenordnung $e^{-\frac{2h}{b}}$.

Ziel der Experimente war, festzustellen, ob und inwieweit Formel (3) — als Konsequenz der hydrodynamischen Theorie — Gültigkeit beanspruchen darf.

Um dies in den Kurven gut zum Ausdruck zu bringen, befolgte ich die bei derartigen Untersuchungen meistens gewählte Methode, den „kinematischen Reibungskoeffizienten“ μ/ρ als Unbekannte zu betrachten, und unter Zugrundelegung obiger Formel zu messen. Solange sich ein konstanter Wert ergab, konnte die Formel als richtig angesehen werden.

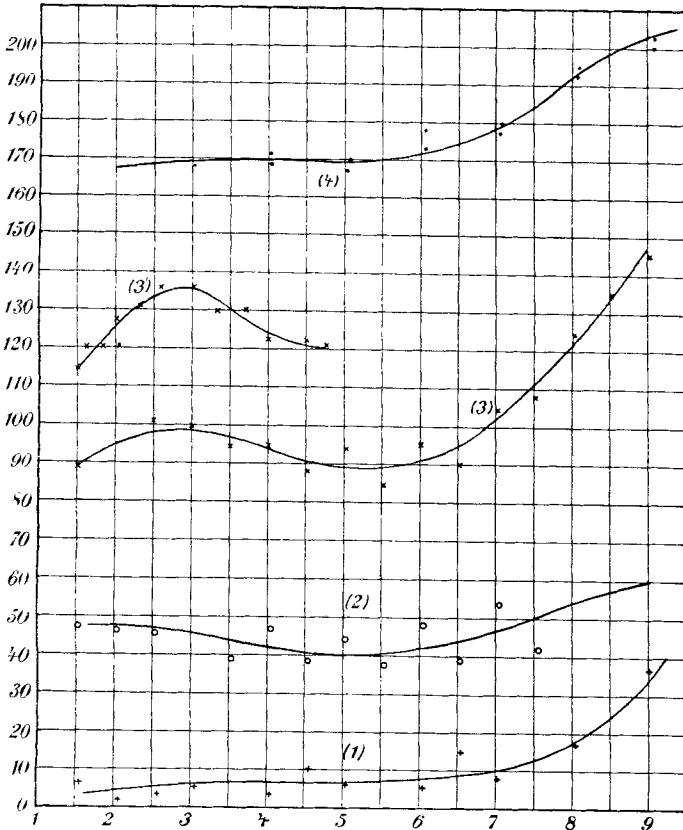
§ 3. Fehlerquellen.

Dem ganzen Problem nach war es nicht das Ziel der Experimente, auf eine sehr große Meßgenauigkeit hinzuwirken, zumal derselben durch verschiedene, schwer eliminierbare Fehlerquellen eine Grenze gesetzt war. Bei Versuchen in einer Röhre oder bei der Couetteschen Anordnung gilt es nur, Drucke, Widerstände und Ausflußmengen zu messen, lauter Größen, die nur linear in die zu prüfende Beziehung eingehen; die linearen Abmessungen der Strömung bleiben konstant und sind einfach zu bestimmen. Bei den vorliegenden Experimenten machten auch die Messung der Ausflußmenge und des Gefälles keine Schwierigkeiten, da sie sich ohne weiteres auf 1 Proz. genau angeben ließen. Dagegen traten starke Schwierigkeiten auf bei Messung der Tiefe. Diese steht in der 3. Potenz in der Gleichung für die Ausflußmenge; es ist daher nötig, sie sehr genau zu bestimmen. Zudem ist die absolute Größe dieser Tiefe nur sehr gering, etwa 1—3 mm. Wollte man also nur so weit kommen, als zur Entscheidung des Problems dringend erforderlich war, so mußte die Tiefe auf etwa $\frac{1}{50}$ mm genau gemessen werden. Die im vorigen Paragraphen beschriebene Anordnung gab eine viel größere Genauigkeit; denn sowohl die Berührung der Oberfläche, wie der Grundfläche war sehr deutlich zu sehen. Aber es kommen an der freien Oberfläche eines Stromes verschiedene Fehlerquellen in Betracht, die diese Genauigkeit zu einer illusorischen machen, und auf die wir einzeln eingehen müssen.

Ein Punkt, der sogleich in die Augen springt, ist die Ungleichheit der Tiefe in der Stromrichtung. Einmal ist die aus dem Gefäß *C* austretende Strömung erst in einiger Entfernung als stationär anzusehen, dann gibt es am Ausfluß eine kleine Stauung, ferner würde unser Ansatz beim Gefälle Null auch die Geschwindigkeit Null erfordern, was durchaus nicht erfüllt ist, da die Erhebung der oberen über die unteren Wasserschichten auch in diesem Falle eine Strömung hervorrufen würde. Unsere Formel gilt für eine stationäre, beschleunigungslose Strömung mit einer parallel zur Grundfläche gerichteten Oberfläche. Da nun aber durch jeden Stromquerschnitt in derselben Zeit dieselbe Flüssigkeitsmenge fließen muß, wird

obige Formel richtig angewandt werden, wenn man nur an einer Stelle mißt, an welcher die Oberfläche parallel der Grundfläche verläuft. Mißt man an irgend einer anderen Stelle, so setzt man offenbar eine zu große Tiefe in Formel (3) ein, und erhält infolgedessen eine zu große Ausflußmenge, bzw. einen zu großen Reibungskoeffizienten.

Fig. 4 zeigt Höhenkurven in der Stromrichtung und gibt so Aufschluß über die hier zu erwartenden Versuchsfehler.



Abszisse: Marken (Schrauben) an der Rinne, im Abstand von etwa 4,5 cm.
 Ordinate: Einteilung der Meßschraube. Anfangspunkt willkürlich gewählt.
 10 Teilstriche der Ordinate = 0,02 mm. Größter Fehler etwa ebensoviel,
 also durchaus innerhalb der Fehlergrenze; die in einzelnen Kurven
 scheinbar systematischen Abweichungen sind daher ohne Bedeutung.

Fig. 4. Oberfläche in der Stromrichtung.

Kurven 1, 2, 3 sind an Wasserströmungen von ungefähr gleicher Ausflußmenge aufgenommen, bei Gefällen von $\frac{1}{25}$, bzw. $\frac{1}{50}$ und $\frac{1}{125}$. (3') ist eine teilweise, genauere Nachprüfung von (3). Man sieht, daß sich bei den ersten beiden Gefällen eine stationäre Strömung, wie man sie verlangen muß, genügend genau herstellt, bei ersterer zwischen den Marken 2 und 6, bei letzterer etwa zwischen 4 und 6. Kurve 3 zeigt dagegen nur ein Minimum, und man ist wohl sicher, an der Stelle des Minimums eine der stationären Strömung entsprechende Geschwindigkeitsverteilung zu haben, nicht aber, daß die Geschwindigkeit der bei dem bestimmten Gefälle stationären entspricht.

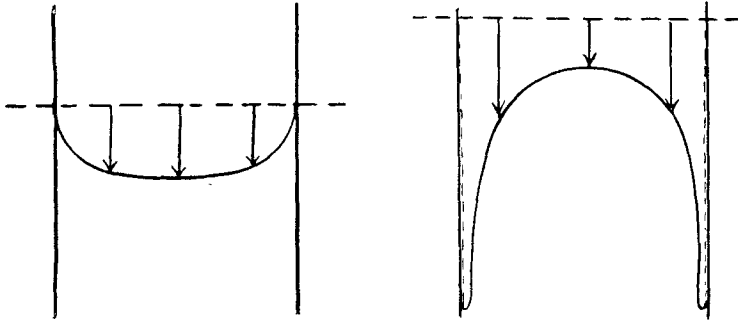
Die Tiefe wurde immer in der Nähe der mit 5 bezeichneten Stelle gemessen; der absolute Wert, der für den Reibungskoeffizienten erhalten wurde, war bei großem Gefälle richtig, bei kleinem zu hoch. Die Kurven zeigen, daß diese Abweichung aus der mangelnden Stationarität der Strömung verständlich wird.

Kurve 4 zeigt schließlich die Strömung der ersten benutzten Zuckerlösung bei Gefälle $\frac{1}{25}$. Auch hier ist die Strömung nicht so gut stationär geworden wie bei Wasser; so wird wohl der zu hohe absolute Wert des Reibungskoeffizienten zu erklären sein.

Für die Diskussion des Problems spielte aber die Abweichung von den absoluten Werten keine Rolle, da es ja nur darauf ankam, zu zeigen, wie lange man die Strömung als laminar ansehen kann. Der kritische Punkt, an welchem diese einfache Gesetzmäßigkeit zu gelten aufhört, war auch dann sehr wohl zu erkennen, wenn ein Fehler im absoluten Wert der Konstanten vorhanden war. Das wird an den im nächsten Paragraphen mitgeteilten Kurven deutlich werden.

Ungleich größere Schwierigkeiten bereitete die Ungleichheit der Tiefe senkrecht zur Stromrichtung, hervorgerufen durch die Kapillarerhebung an den Seitenrändern. Wurde die in der Mitte des Flusses gemessene Tiefe in Formel (3) eingesetzt, so ergab sich nie, selbst für noch so langsame und seichte Strömung, ein konstanter Wert für den Reibungskoeffizienten, und zwar immer zu niedrige Werte, was eine Deutung als Turbulenzerscheinung vollkommen ausschloß. Daß wirklich die Kapillarerhebung an den Wänden eine so große Wirkung verursachte, konnte dadurch leicht deutlich

gemacht werden, daß feines Mennigepulver in die Strömung geworfen wurde. Anstatt daß nun, wie man erwarten mußte, in der Mitte die größte Geschwindigkeit, an der Seite nur eine kleine aufgetreten wäre, und so die Mennige auf der Oberfläche, gegen den Strom gesehen, eine konvexe Kurve gebildet hätte, zeigte sich eine konkave Kurve, und zwar mit sehr weit voreilenden Seitenstücken. Die beiden Bilder sind nachstehend (Fig. 5) skizziert.



Strömung ohne Kapillarkwirkung
nach Formel (7) des Anhangs.

Beobachtete Strömung.

Fig. 5.

Auch theoretisch ist diese Erscheinung leicht einzusehen. Die Differentialgleichungen der Strömung bleiben bei Berücksichtigung der Kapillarkwirkung dieselben wie früher, ebenso die Grenzbedingungen bis auf die eine:

$$p_n = 0 \text{ an der Oberfläche,}$$

welche nun die Form erhält:

$$(4) \quad \pm T \frac{d\varphi}{ds} + g\varphi \cos \alpha y = 0,$$

wobei s die Bogenlänge der Oberfläche von der Mitte aus bedeutet, φ den Winkel der Tangente an die Oberfläche gegen die z -Achse, T die Kapillarkonstante.

Von den beiden Vorzeichen der Krümmung $d\varphi/ds$ müssen wir das negative wählen, da der

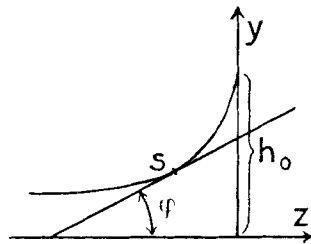


Fig. 6.

Kapillardruck den nach unten wirkenden Zug der Schwere zu verkleinern strebt.

Wir können der Gleichung sofort ein wichtiges Resultat ansehen: In der die Gestalt der Oberfläche bestimmenden Gleichung (4) kommt keine Geschwindigkeit vor, in den die Strömung bestimmenden Differentialgleichungen (1) und den übrigen Grenzbedingungen (2) tritt umgekehrt die Form der Oberfläche nicht auf; nur das Gefälle spielt in beiden eine Rolle, allerdings bei der Form der Oberfläche keine große, da nur $\cos \alpha$ bestimmend ist. Bei gleichem Gefälle können wir jedenfalls schließen (und in Annäherung auch bei verschiedenem Gefälle), daß die Form der Oberfläche unter Einwirkung der Kapillarität (solange keine Oberflächenwellen auftreten) unabhängig von der Ausflußmenge ist.¹⁾ Es ist also klar, daß bei geringer Tiefe der Einfluß der Kapillarität ein größerer ist wie bei beträchtlicher Tiefe.

Durch Integration der Gleichung (4)²⁾, sowie aus direkten Messungen ergab sich das Resultat, daß an der Seite das Wasser um etwa 2,5 mm höher stand, wie in der Mitte. Da bei den Messungen die Tiefe des Flusses selten größer war als etwa 2,5 mm und manchmal sogar kleiner als 1 mm, die Ausflußmenge aber mit der dritten Potenz der Tiefe wächst, so ist leicht einzusehen, daß die Kapillarerhebung die Resultate vollkommen verschleiern mußte.

Es war die größte Schwierigkeit bei der ganzen Arbeit, dieser Fehlerquelle Herr zu werden. Es gelang mir nicht, die Strömungsaufgabe, wie sie im Anhang für eine ebene Oberfläche gelöst wird, auch für die durch Kapillarität veränderte Oberfläche zu diskutieren. Auch eine graphische Näherung ergab kein befriedigendes, die Versuchsergebnisse gut darstellendes Resultat.

So versuchte ich denn die Kapillarerhebung ganz zu beseitigen, indem ich die Seitenwände stark einfettete. Eine kleine Kapillardepression konnte ja das Resultat nicht in nennenswerter Weise ändern, da eine solche nur an Stellen

1) Dies Resultat wurde auch schon von R. H. Weber erhalten, Ann d. Phys. 26. p. 884. 1908.

2) Vgl. Dissertation, Anhang 2.

geringer Ausflußmenge wirksam ist, da ferner der Randwinkel bei Depression viel größer und daher die Abweichung der Oberfläche von der Horizontalen viel geringer ist. Die ersten so gemachten Experimente gaben ein befriedigendes Resultat, die weiteren nicht mehr. Es zeigte sich, daß die Wirksamkeit des Fettes in dieser Hinsicht ziemlich schnell erlosch. Dasselbe ergaben Versuche mit Paraffinwänden. Schließlich verfuhr ich in der Weise, daß ich für jede Messung an die Seitenwände neue Streifen von paraffiniertem Asbestpapier klebte. Versuche zeigten, daß dies etwa eine Stunde lang mit dem gesuchten Erfolge benutzt werden konnte; und eine Messung dauerte etwa $\frac{1}{2}$ Stunde. Paraffinierte Papierstreifen waren nicht verwendbar, da sie sich, wohl infolge der Quellung der Pflanzenfaser, viel schneller abnützten.

Daß auf diese Weise alle systematischen Fehler vermieden waren, zeigten Versuche mit Mennige in der oben geschilderten Art, und schließlich am klarsten das Resultat: ein richtiger, konstanter Wert des Reibungskoeffizienten.

Dennoch war es immer eine ziemliche Schwierigkeit, die Tiefe mit der nötigen Genauigkeit zu messen. Die rauhen Ränder der Asbeststreifen verursachten doch stets unregelmäßige Erhebungen der Oberfläche, die oft viel mehr wie $\frac{1}{50}$ mm — die erforderte Genauigkeit — betrugten; dazu kamen die regelmäßigen Oberflächenwellen, von denen später ausführlich die Rede sein wird. Um also ein genaues Resultat zu erhalten, mußte die Berührung der Schraubenspitze mit der Oberfläche öfter an der Schraubentrommel abgelesen und dann ein Mittelwert bestimmt werden. Es wurden immer etwa 20 solche Ablesungen gemacht und zwar an 2 bis 4 verschiedenen Stellen des Flusses in der Nähe der Marke 5 (Fig. 4). Zwischen je zwei Ablesungen wurden die Seitenwände mit Filterpapier abgewischt, um die Bedingungen an den Rändern möglichst verschieden und so systematische Fehler zu vermeiden. So gelang es schließlich doch, die Tiefe auf etwa 1—1,5 Proz. genau anzugeben, d. h. im Werte der Reibungskonstanten eine Genauigkeit von 3—5 Proz. zu erzielen. Nur ganz selten traten in den im nächsten Paragraphen mitzuteilenden Kurven Punkte auf, die stärkere Abweichung zeigten.

§ 4. Resultate.

Die Resultate der Messungen sind niedergelegt in den Figg. 7—14, zu deren Interpretation es nur weniger Angaben bedarf.

Als Abszisse dient die einzige für jede Strömung charakteristische Größe, die Reynoldssche Zahl

$$R = \bar{v} h \frac{\rho}{\mu} = \frac{Q}{2b} \cdot \frac{\rho}{\mu},$$

welche aus den gemessenen Größen Q und b und aus dem, den Tabellen von Landolt-Börnstein entnommenen Werte des kinematischen Reibungskoeffizienten berechnet ist.

Als Funktion der Reynoldsschen Zahl ist die Größe μ/ρ aufgetragen, so wie sie sich bei Anwendung der Formel (3) aus den gemessenen Größen ergibt. Natürlich ist dabei auf die Temperatur sorgfältig Rücksicht genommen, indem vor und nach dem Versuch ein im Gefäß C befindliches Thermometer abgelesen wurde, und sind alle Messungen, um sie vergleichbar zu machen, nach den aus Landolt-Börnstein bekannten Verhältnissen auf eine mittlere Temperatur reduziert, die in den Kurven vermerkt ist.

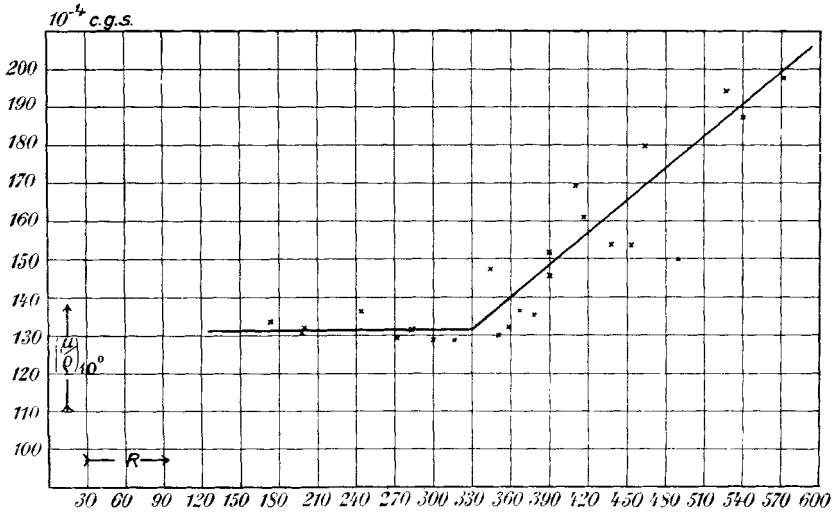
So geben die Kurven ein Bild des Widerstandes in der Flüssigkeit oder der von der Schwere geleisteten Arbeit als Funktion der Strömungskonstanten R . Solange die Poiseuille'sche laminare Strömung stabil bleibt, ergibt sich ein konstanter Wert von μ/ρ . Für große R wird diese Konstanz nicht erhalten, die Stabilität der Strömung ist gestört, bei weiterer Anwendung der Formel (3) ergibt sich ein immer größer werdender scheinbarer Reibungskoeffizient.

Die Kurven, welche die von der Beobachtung gelieferten Punkte verbinden sollten, waren bei der verhältnismäßig großen Ungenauigkeit der Messungen einer gewissen Willkür anheimgegeben, welche die Resultate zu verschleiern drohte. Um diese nach Möglichkeit einzuschränken, wurden folgende Bestimmungen konsequent festgehalten:

Die Punkte sind bis zum kritischen Wert R_k durch eine horizontale Gerade $\mu/\rho = a$ zu verbinden, von da an durch eine geneigte Gerade $\mu/\rho = a + b(R - R_k)$. Die Konstanten a

und b sind nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate zu bestimmen. Für R_k sind nacheinander einige Werte festzusetzen, und derjenige ist schließlich als die gesuchte kritische Zahl anzugeben, der den geringsten wahrscheinlichen Beobachtungsfehler Δ aufweist.

Fig. 7 zeigt die erste und am genauesten verfolgte derartige Kurve, aufgenommen bei einem Gefälle $1/25$.



$(\mu/\rho)_{10^\circ}$ bedeutet, daß alle Werte des kinematischen Reibungskoeffizienten auf die Temperatur 10° reduziert sind.

Fig. 7. Glatte Messingrinne. Wasser. Gefälle $1/25$.

Die geschilderte Methode wurde auf fünf verschiedene R_k angewandt, und es ergab sich das in der folgenden Tabelle niedergelegte Resultat:

R_k	Δ
310	4,96
330	4,69
340	4,71
350	4,73
360	4,88

Man sieht ohne weiteres, besonders wenn man sich diese Tabelle graphisch aufträgt, daß das Minimum in der Nähe von 330 liegt und etwa auf 3 Proz. genau zu bestimmen ist.

Um von der Größe des wahrscheinlichen Fehlers einen Begriff zu geben, sei bemerkt, daß er etwa 3 Proz. Abweichung im Werte des Reibungskoeffizienten entspricht, also etwa 1 Proz. in der Tiefenmessung. Nach den Ausführungen des vorhergehenden Paragraphen ist klar, daß diese Genauigkeit nur durch Mittelung aus sehr vielen Beobachtungen erhalten werden konnte. Die gesuchte kritische Reynoldssche Zahl ist also bei einem Fluß mit freier Oberfläche:

$$R_k = 330.$$

Vergleicht man diese Zahl mit den von Reynolds und Couette gefundenen:

$$R_k = 2200$$

bei Röhren und

$$R_k = 950$$

bei der Couetteschen Anordnung, wobei in der Formel

$$R = \frac{\rho \bar{v} l}{\mu}$$

die Länge l stets durch die lineare Abmessung von Wand zu Wand, also z. B. durch den Durchmesser bei Röhren gegeben ist, so findet man, daß der Wert im Falle des Flusses ein erheblich niedrigerer ist, wie bei allseitiger Begrenzung durch feste Wände; daß also eine freie Oberfläche nicht die stabilisierende Kraft einer festen Wand hat.

Nach dem Reynoldsschen Gesetze sollen nun alle Strömungen ähnlich sein, welche dieselbe Reynoldssche Zahl R haben, und es muß also auch die kritische Zahl R_k für alle Gefälle, alle Flüssigkeiten, alle Wandmaterialien dieselbe sein.

Figg. 8—10 prüfen die Gültigkeit des Gesetzes für verschiedene Gefälle, sind nach der gleichen Methode behandelt und ergeben das Resultat:

Gefälle	R_k	\bar{v}	Δ
$\frac{1}{125}$	300	13,5 cm/sec	1,83
$\frac{1}{50}$	310	20 "	2,83
$\frac{1}{25}$	330	26,5 "	4,69
$\frac{3}{50}$	330	31,5 "	4,77

Das Reynoldssche Gesetz kann also an Flüssen von verschiedenem Gefälle innerhalb der Fehlergrenze bestätigt werden. Variation des Gefalles ist gleichbedeutend mit Variation der Geschwindigkeit und der Tiefe. Die dritte Spalte der

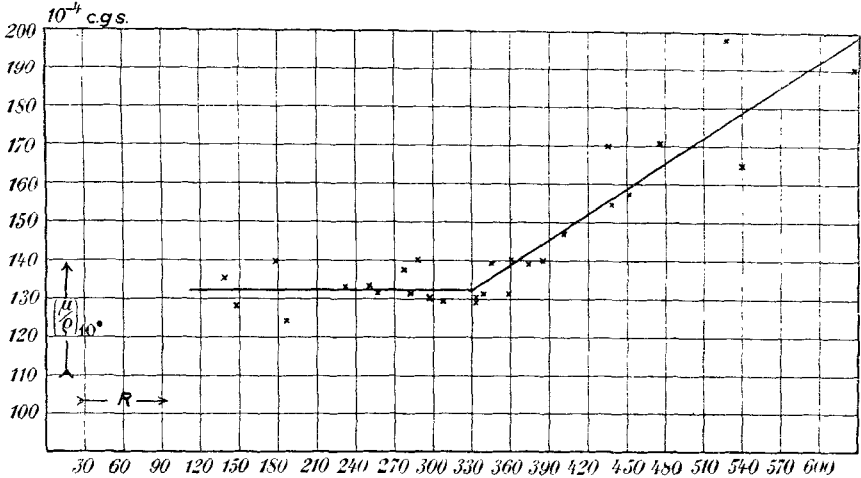


Fig. 8. Glatte Messingrinne. Wasser. Gefälle $\frac{3}{160}$.

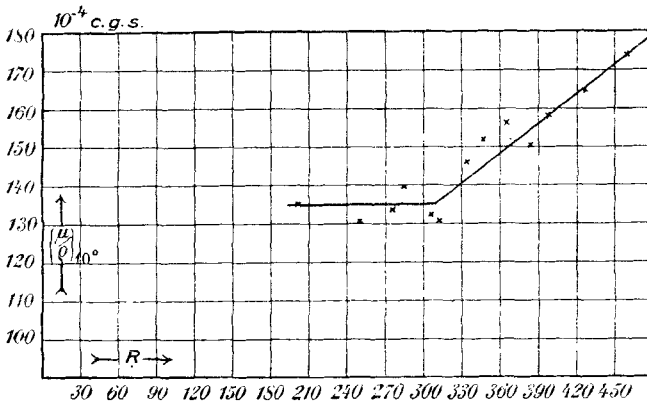


Fig. 9. Glatte Messingrinne. Wasser. Gefälle $\frac{1}{160}$.

Tabelle zeigt, wie stark die Geschwindigkeit bei den verschiedenen Neigungen variiert. Dennoch bleibt die kritische Reynoldssche Zahl merklich konstant. Wichtig für spätere Betrachtungen ist noch, daß unter keinen Umständen — auch

nicht in zweiter Näherung — eine Abnahme von R_k bei zunehmendem Gefälle zu konstatieren ist.

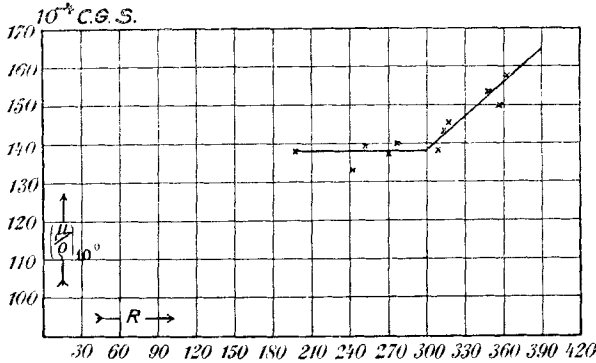


Fig. 10. Glatte Messingrinne. Wasser. Gefälle $\frac{1}{125}$.

In der letzten Spalte der Tabelle sind noch die wahrscheinlichen Beobachtungsfehler vermerkt. Es zeigt sich, daß diese für kleineres Gefälle sich stark verkleinern, und das ist leicht begreiflich; denn bei kleinerem Gefälle ist erstens die Tiefe größer, also der Beobachtungsfehler in der Tiefenmessung nicht so wirksam, zweitens die störende Wellenbildung geringer.

Fig. 11 und 12 prüfen das Reynoldssche Gesetz für verschiedene Flüssigkeiten und ergeben:

Flüssigkeit	R_k
Zuckerlösung I, etwa 25%	250
Zuckerlösung II, etwa 12%	280
Wasser	330

Hier ist also eine starke Abweichung vom Reynoldsschen Gesetze zu konstatieren, die nicht mehr als bloßer Versuchsfehler gedeutet werden kann. Dies sieht man leicht ein, wenn man z. B. versucht, die Beobachtungen der Fig. 10 u. 11 gleichmäßig durch Festsetzung der kritischen Zahl $R_k = 270$ zu befriedigen. Rechnet man dann nämlich den Beobachtungsfehler Δ im Sinne der Tabelle p. 789 aus, so erweist er sich im ersten Falle als weit vor seinem Minimum, im zweiten Falle als weit dahinter gelegen.

Durch die Versuche von Ruckes war ferner nahegelegt, daß Wandmaterial und Wandrauhigkeit einen starken Einfluß auf die kritische Zahl hätten. Es lag also die Vermutung nicht fern, man könne die Abweichung auf ein Rauwerden der Wand durch abgeschiedene Zuckerkriställchen zurück-

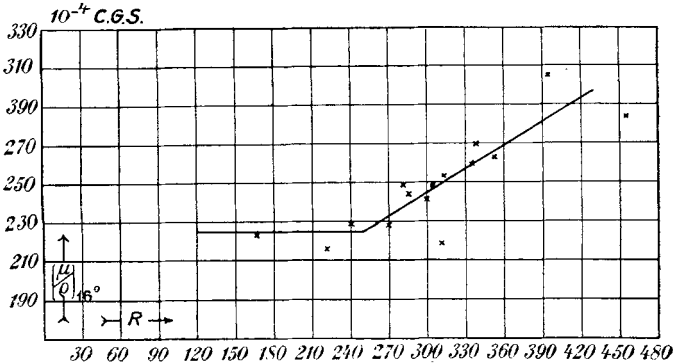


Fig. 11. Glatte Messingrinne. Zuckerlösung I. Gefälle $\frac{1}{25}$.

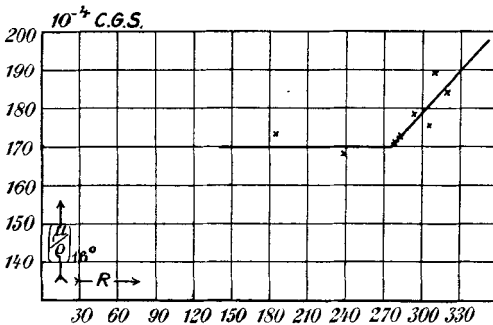


Fig. 12. Glatte Messingrinne. Zuckerlösung II. Gefälle $\frac{1}{25}$.

führen. Das war die direkte Veranlassung zu den in Fig. 13 und 14 niedergelegten Versuchen. Es wurde in die § 2 beschriebene Rinne einmal eine durch Feilstriche gerauhte Messinggrundfläche, einmal eine sehr glatte Grundfläche aus Spiegelglas hineingelegt und R_k gemessen. Die Fehler waren naturgemäß bei der rauhen Grundfläche etwas größer wie sonst. Bei der Glasfläche trat die Schwierigkeit auf, daß die Berührung der Schraubenspitze mit der Grundfläche nicht

durch den elektrischen Kontakt gemessen werden konnte, doch gab auch die Beobachtung der Berührung mit dem Spiegelbild die nötige Genauigkeit.

	Grundfläche	R_k
Wasser. Gefälle $\frac{1}{50}$	Glattes Messing	310
	Raues Messing	300
	Glas	310

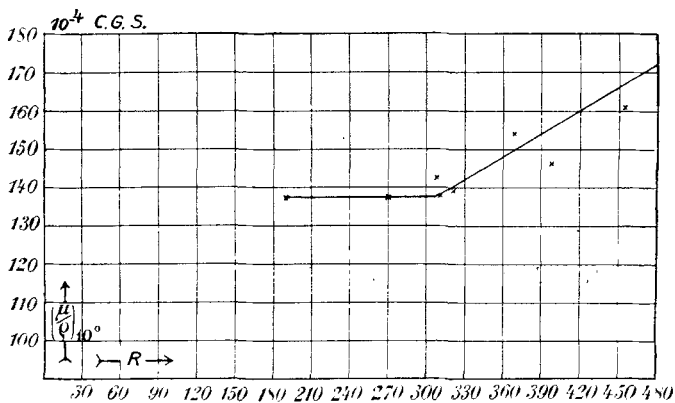


Fig. 13. Glasrinne. Wasser. Gefälle $\frac{1}{50}$.

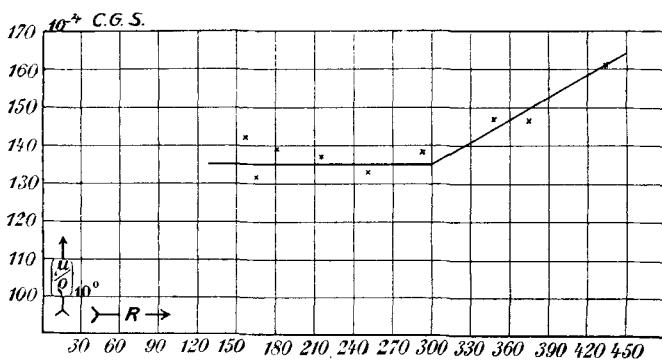


Fig. 14. Rauhe Messingrinne. Wasser. Gefälle $\frac{1}{50}$.

Die Kurven sind weder experimentell noch in der Ausrechnung so genau verfolgt, wie die früheren, zeigen aber

deutlich, daß eine merkbare Änderung der kritischen Zahl nicht vorhanden ist.

Im Hinblick auf den vorigen Paragraphen soll noch bemerkt werden, daß die absoluten Werte der Reibungskonstanten in den Kurven einen systematischen Fehler in der nach Fig. 4 erwarteten Richtung aufweisen; daß dieser in Figg. 13 und 14 so viel größer ist als in der entsprechenden Fig. 9, erklärt sich ungezwungen daraus, daß bei den entsprechenden Versuchen die in die Rinne gelegten Grundflächen nicht gleich am Gefäß *C* begannen, und so der Eintritt des stationären Zustandes verzögert wurde. Die richtige Reibungskonstante für die Zuckerlösungen, wie sie zur Berechnung der Abszisse *R* nötig war, wurde durch exakte Messungen in Kapillarröhren bestimmt.

Das Hauptproblem war nun weiter, über die Gründe der Abweichung vom Reynoldsschen Gesetz Rechenschaft abzugeben. Zu diesem Zweck mußte zunächst untersucht werden, ob die Abweichung nicht vielleicht durch die Beschaffenheit der Flüssigkeit allein bedingt war und ob man sie nicht auch in Röhren finden konnte. Es wurde zu diesem Zweck die kritische Zahl für Wasser- und Zuckerlösung I in einer Röhre gemessen. Die verwendete Glasröhre hatte einen Radius von 0,131 cm. Die Ausflußmengen wurden wieder mit der Meßflasche, die Druckhöhen bei größeren Drucken direkt gemessen, bei kleineren mit dem Kathetometer. Aus Gründen, die in der Dissertation auseinandergesetzt werden, trat der Strahl am Ende der Röhre frei aus. Das Resultat ist in Figg. 15 und 16 niedergelegt:

Flüssigkeit	R_k	\bar{v}
Wasser	2280	100 cm/sec
Zuckerlösung I .	2200	170 „

Die Abweichung ist also durchaus nicht von der Größenordnung wie beim Flusse und ist dort nicht als Eigenschaft der Flüssigkeit, sondern als für die freie Oberfläche charakteristisch anzusehen.

Also: das Reynoldssche Gesetz stellt die Stabilitätsverhältnisse einer Flußströmung nur unvollkommen dar, insofern die kritische Zahl nicht unabhängig vom Reibungskoeffizienten ist.

So befremdlich dieses Resultat auf den ersten Blick erscheinen mag, gibt doch die Theorie die Mittel an die Hand, um wenigstens qualitativ die Ursache zu durchschauen.

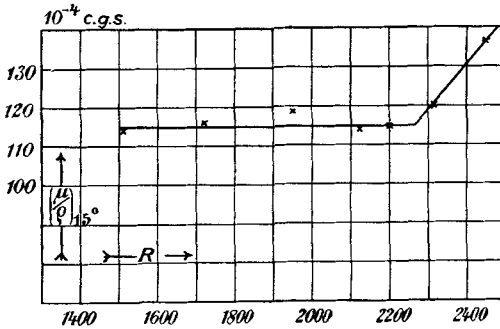


Fig. 15. Glasröhre. Wasser.

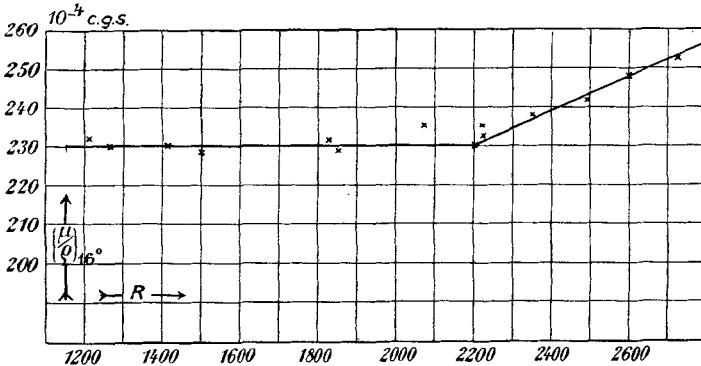


Fig. 16. Glasröhre. Zuckerlösung I.

Denn das Reynoldssche Gesetz ruht auf einer einfachen Ähnlichkeitsbetrachtung. Vergleicht man die Dimensionen der einzelnen in der Differentialgleichung stehenden Ausdrücke, so ergibt sich, daß zwei Strömungen als ähnlich betrachtet werden können, wenn sie die gleiche Reynoldssche Zahl R besitzen. Die Grenzbedingungen sagen bei einer beliebigen zwischen festen Wänden verlaufenden Strömung nichts weiter aus, als daß an den Wänden Tangential- und Normalgeschwindigkeit verschwinden müssen. Sie liefern daher keine neue reine Zahl und fallen für die Dimensionsbetrachtung nicht ins Gewicht. Gerade dieses Umstandes wegen

ist die Reynoldssche Zahl die einzige für derartige Strömungen charakteristische Größe, so daß sie allein auch z. B. für die Gültigkeitsgrenzen des Poiseuilleschen Gesetzes entscheidend ist. Obige Messungen an Röhren bestätigen das wieder in weitgehender Weise. Man beachte nur, wie verschieden die Größe der mittleren Geschwindigkeiten an der kritischen Grenze (vgl. Tabelle p. 795) ist, daß diese um 70 Proz. differieren und daß sich trotzdem die Konstanz der Reynoldsschen Zahl bis auf etwa 4 Proz. bewährt.

Wesentlich anders liegen aber die Verhältnisse bei einem Flusse. Auch hier liefern die Grenzbedingungen am Grund und diejenige, welche Verschwinden des Tangentialdruckes an der Oberfläche verlangt, nichts Neues. In der Grenzbedingung aber, welche Verschwinden des Normaldruckes auf die Oberfläche fordert, tritt eine neue charakteristische Zahl auf. Für stationäre Strömung und unendliche Breite geschrieben, lautet diese Bedingung

$$g \rho \cos \alpha \cdot \eta + 2 \mu \frac{\partial v}{\partial \eta} - T \frac{d^2 \eta}{dx^2} = 0,$$

wenn η die Erhebung über die glatte Oberfläche, T die Kapillaritätskonstante bedeutet, und die Krümmung der Oberfläche näherungsweise $= d^2 \eta / dx^2$ gesetzt wird, wie es ja bei Wellenbetrachtungen stets geschieht.¹⁾

Diese Grenzbedingung ergibt kein Dimensionskriterium im Falle einer glatten ungewellten Oberfläche, und würden wirklich an der Oberfläche keine Wellen auftreten, so müßte das Reynoldssche Gesetz für Flüsse ebensogut erfüllt sein, wie für Strömungen zwischen festen Wänden. Im Falle einer Wellung dagegen darf man zwei Strömungen mit gleicher Reynoldsscher Zahl nicht als ähnliche Strömungen ansehen, da die Oberflächenbedingung für wirklich ähnliche Zustände eine weitere Dimensionsgleichheit fordert, welche besonders durch die, der Differentialgleichung ganz fremde, Größe T der Kapillarität bestimmt wird.

Nun muß aber beim Einsatz der turbulenten Bewegungen eine Wellung in der Flüssigkeit entstehen, welche auch die Oberfläche zu stören trachtet und so die Kapillarität, welche

1) Die obige Gleichung (4) geht aus dieser Gleichung hervor, wenn man parallele Stromfäden ($v = 0$) annimmt.

auf verschiedene Wellenlängen verschieden wirkt, in Mitleiden-
schaft ziehen muß. In Dimensionen geschrieben lautet obige
Gleichung:

$$[\rho v^2] = \left[\mu \frac{v}{l} \right] = \left[\frac{T}{l} \right]$$

und ergibt außer der Reynoldsschen Zahl R noch die
charakteristische Zahl:

$$S = \frac{\mu v}{T}$$

Leider läßt es sich doch nicht ganz einwandfrei feststellen,
daß gerade die Änderung dieser Zahl die Abweichung vom
Reynoldsschen Gesetze verursacht. Zwar ist es physikalisch
gewiß plausibel, daß Vergrößerung der Kapillarität die Ver-
hältnisse denen einer mitbewegten festen Wand an der Ober-
fläche zu nähern strebt und so stabilisierend wirkt, und die
Versuche an den Zuckerlösungen zeigen in der Tat eine Ver-
ringerung der Stabilität bei wachsendem μ , d. i. bei wachsen-
dem S . Doch ist die entsprechende Einwirkung wachsender
mittlerer Geschwindigkeit im instabilisierenden Sinne nicht zu
konstatieren, also eine einfache Dimensionsbetrachtung nicht
durchführbar.

Der Grund dafür kann nur darin liegen, daß wir das v
der Dimensionsbetrachtung mit dem u der Differentialgleichung
identifizierten. Das ist nicht mehr zulässig, sobald an der
Oberfläche Wellungen auftreten, und dadurch neue Längen
und Geschwindigkeiten ins Spiel kommen.

§ 5. Die Oberflächenwellen auf dem Flusse.

Wie schon eingangs erwähnt, war es eine der verlockend-
sten Aussichten bei den geschilderten Experimenten, daß die
freie Oberfläche eines Flusses etwas von den turbulenten Be-
wegungen zu zeigen und so einen Einblick in deren Mechanis-
mus (Wellenlänge, Amplitude usw.) zu gestatten versprach. In
der Tat schienen die Experimente dieser Erwartung entgegen
zu kommen. Bei geringer Ausflußmenge beobachtete man eine
ganz glatte Oberfläche, die nur durch kleine zufällige Er-
hebungen am Rande gestört war; die zurückgeworfenen Bilder
wiesen keine merklichen Unregelmäßigkeiten auf. Wurde die
Ausflußmenge vergrößert, so zeigten sich regelmäßige stehende

Wellen auf der Oberfläche, deren Kämme, vom Rande ausgehend, zunächst etwa senkrecht zur Stromrichtung verliefen, dann bei weiter gesteigerter Ausflußmenge ihre Neigung gegen die Stromrichtung verkleinerten, bei stets abnehmender Wellenlänge. In

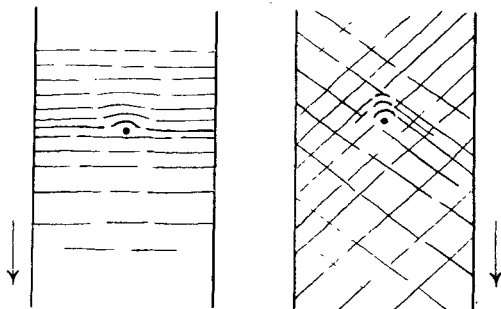
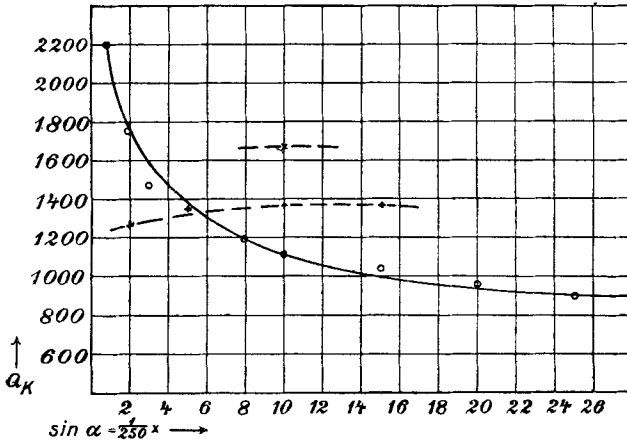


Fig. 17.

Fig. 17 ist das flüchtig skizziert. Von einer gewissen Ausflußmenge an waren die Änderungen in der Neigung der Wellenkämme sowohl, wie in der Wellenlänge unmerklich klein. Die erste sichtbare Wellenlänge war um so größer, je kleiner das Gefälle war. Ein entsprechendes Bild zeigte sich auch in der Umgebung einer Störung an der Oberfläche, z. B. der aufgesetzten Schraubenspitze und (allerdings nicht so deutlich) an einer Störung am Grund des Flusses, einer Luftblase oder dgl. Die Wellen um eine solche Störung waren bei kleiner Oberflächengeschwindigkeit so stark örtlich gedämpft, d. h. um das Hindernis herum lokalisiert, daß überhaupt nur eine kleine Erhebung der Oberfläche an der Vorderseite des Hindernisses zu sehen war. Bei großer Ausflußmenge dagegen zeigte sich ein schönes Schiffswellengitter, das dem Kapillarwellengitter der reibungslosen Hydrodynamik im wesentlichen ähnlich war. Der Übergang der ganz glatten Oberfläche in eine gewellte war natürlich kein ganz plötzlicher, doch ließ sich der kritische Punkt, an welchem das Aussehen sich sehr schnell veränderte, durch Beobachten einmal des merklichen Erlöschens und einmal des nachweisbaren Einsetzens der Wellen in ziemlich enge Grenzen einschließen. So lag die Vermutung sehr nahe, daß der kritische Punkt, an welchem die Reibung nicht mehr imstande ist, den Trägheitskräften zu widerstehen, sich durch den Einsatz der

Wellen an der Oberfläche kund gebe. Diese Vermutung bestätigte sich aber durchaus nicht. Das zeigte sich am einfachsten darin, daß durch Änderung des Gefälles ein vorhandenes Wellengitter zum Verschwinden gebracht werden konnte, während doch die Reynoldssche Instabilität nicht vom Gefälle abhängt. Fig. 18 gibt davon ein Bild. Als Funktion des Gefälles ist dort die Ausflußmenge pro Minute aufgetragen, in deren Umgebung das Oberflächenbild aus dem glatten in



- Ausflußmenge, bei welcher die Oberflächenwellen merklich werden.
- + Ausflußmenge, bei welcher Wasser turbulent zu fließen beginnt.
- × Ausflußmenge, bei welcher Zuckerlösung I turbulent zu fließen beginnt.

Fig. 18.

den gewellten Zustand übergeht, und zwar gelten diese Punkte ebensowohl für Wasser wie für Zuckerlösung. Dazu sind die Ausflußmengen angegeben, die der kritischen Reynoldsschen Zahl entsprechen. Man sieht, daß die beiden kritischen Werte durchaus voneinander unabhängig sind, daß einesteils die Oberfläche eines Flusses ganz von Wellen durchzogen sein kann, ohne daß doch Formel (3) innerhalb der Fehlergrenze zu gelten aufhört, wie es bei einer Neigung $> 5/250$ der Fall ist, und daß andererseits, wie z. B. bei Wasser vom Gefälle $2/250$, auch im Innern der Flüssigkeit schon starke turbulente Bewegungen vor sich gehen können, ohne daß an der Ober-

fläche das geringste zu sehen wäre. Die Hoffnung, an dem Flusse direkt durch den Augenschein etwas über den Mechanismus der Turbulenz zu erfahren, muß also als gescheitert angesehen werden.¹⁾

Es bot sich nun aber weiterhin das Problem, über die Oberflächenwellen selbst Klarheit zu gewinnen, und ihren möglichen Einfluß auf die im vorigen Paragraphen besprochenen Abweichungen vom Reynoldschen Gesetz zu untersuchen.

Die exakte Berechnung der Wellen, d. i. der unendlich kleinen periodischen Schwingungen auf einem Flusse mit Reibung, ist ein Problem von sehr großer Schwierigkeit, identisch mit dem Turbulenzproblem selbst, das bisher ja der mathematischen Analyse vollkommen widerstanden hat. Da die Wellen aber keinen direkten Zusammenhang mit der Turbulenz zeigten, schien es mir wahrscheinlich, daß die einfache Theorie der Wellen auf ruhendem Wasser Aufschluß geben würde. Die vollständige exakte Behandlung dieses Problems mit Berücksichtigung der endlichen Tiefe und der Reibung fand ich nirgends in der Literatur²⁾; ich verweise deshalb auf die Dissertation, Anhang 4.

Von den dort abgeleiteten Resultaten ist hier von Wichtigkeit, daß der Grenzübergang verschwindender Reibung die Formeln der reibungslosen Hydrodynamik liefert, und daß in allen bei Wasser in Betracht kommenden Fällen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen nur durch Schwere und Kapillarität, ihre Dämpfung nur durch die Reibung bestimmt wird.

Wenden wir diese Resultate auf unsern Fluß an, so haben wir das folgende Problem: Gegeben ist die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses an seiner Oberfläche als Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen. Gibt dann der aus der Theorie der Wellen auf ruhendem Wasser gewonnene Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit, Länge, Dämpfung usw. der Wellen Aufschluß über die beobachteten Phänomene?

1) Über einige hier anknüpfende Experimente über Strahlzuckungen ist in der Dissertation, Anhang 3 referiert.

2) In W. Wiens Hydrodynamik, p. 283, Gleichung (73) sind nur 2 Konstanten eingeführt, anstatt 3, wie die Anzahl der Grenzbedingungen erfordern würde.

Das Nächstliegende ist, von der Reibung abzusehen und an eine Minimalgeschwindigkeit zu denken, wie sie Kelvin bei den Kapillar-Schwere-Wellen nachgewiesen hat. Kelvin hat aber nur eine für unendliche Tiefe gültige Formel aufgestellt; wir müssen zur allgemeinen Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v einer Störung von Wellenlänge $2\pi/\alpha$

$$v = \sqrt{\frac{g\varrho + T\alpha^3}{\varrho\alpha}} \mathfrak{Z}_g \alpha h$$

zurückgreifen und das Kelvinsche Kriterium auf den Fall endlicher Tiefe übertragen. Ich will nur das Resultat der Rechnung mitteilen, da es ohne Schwierigkeiten erhalten werden kann. Der Kelvinsche Wert der Minimalgeschwindigkeit

$$v^2 = 2 \sqrt{\frac{Tg}{\varrho}}, \quad \text{also} \quad v = 23,3 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

gilt nur, wenn

$$h \gg \sqrt{\frac{T}{g\varrho}} = \text{etwa } 1/3 \text{ cm},$$

was bei obigen Experimenten nie der Fall war.

Die entgegengesetzte Näherung — αh klein — gilt bis etwa dahin (d. h. für den Fall $h \ll 2\sqrt{T/g\varrho}$) und ergibt eine Minimalgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{g h \left(\frac{2}{3} \frac{g\varrho}{T} h^2 - 1 \right)},$$

also eine fast im ganzen Gültigkeitsbereich imaginäre Größe. Infolgedessen führt der Kelvinsche Weg zu keiner Erklärung unserer Versuchsergebnisse.

Auch die Vermutung, es handle sich um die für alle Wellenphänomene bedeutungsvolle Geschwindigkeit \sqrt{gh} , bestätigte sich nicht. Die Wellen setzten auf dem Flusse erst bei einer Oberflächengeschwindigkeit ein, bei welcher sie ausschließlich unter Wirkung der Kapillarität stehen konnten.

In Fig. 19 ist dies kurz veranschaulicht. Dort ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit als Funktion der reziproken Wellenlänge aufgetragen. Man sieht, daß eine Minimalgeschwindigkeit bei kleiner Tiefe h' nicht auftritt. Zur Beobachtung kamen nur Wellen, die ihren Platz im Diagramm auf einer solchen Kurve ohne Minimum bei $v > \sqrt{gh'}$ haben.

Man muß also den Schluß ziehen, daß obige Betrachtungen nicht ausreichen, um über die Beobachtungen der Wellengitter

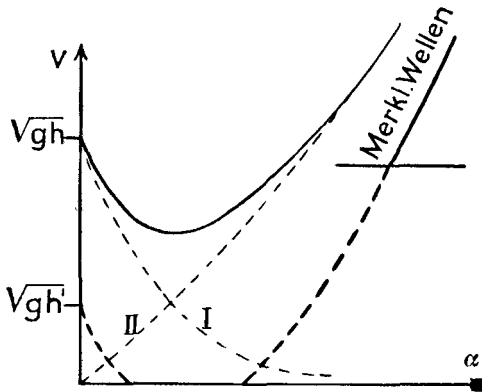


Fig. 19. I Schwerewellen. II Kapillarwellen.

auch nur qualitativ Aufschluß zu geben. Es wird dazu unbedingt nötig sein, das exakte Problem der kleinen Schwingungen auf einem reibenden Flusse zu diskutieren.

§ 6. Zusammenfassung.

Die Resultate der Untersuchung seien schließlich noch übersichtlich zusammengestellt:

1. Es wurde ein Idealfuß von geringer Tiefe hergestellt, in welchem die Strömung nicht mehr, wie bei wirklichen Flüssen „hydraulisch“ vor sich ging, sondern, von der Reibung beherrscht, die einfachen hydrodynamischen Gesetze befolgte.

2. Es bestätigte sich in erster Näherung auch hier, das von anderen Strömungen (in Röhren usw.) her bekannte Reynoldssche Gesetz, wonach absolute Werte der Geschwindigkeit, Tiefe, Reibung usw. für den Verlauf der Strömung nicht maßgebend sind, sondern nur die sogenannte Reynoldsche Zahl

$$R = \frac{q \bar{v} l}{\mu}.$$

Bei kleinem R befolgt die Strömung die einfachen hydrodynamischen Gesetze, d. h. sie verläuft laminar, bei großem R treten die sogenannten turbulenten Bewegungen auf, welche für den „hydraulischen“ Zustand charakteristisch sind. Der

Übergang von einem Zustand in den anderen läßt sich ungezwungen als sprunghaft, d. i. durch einen Knick in den Beobachtungskurven darstellen. Trotz der großen Unsicherheit der Tiefenmessung konnte die kritische Reynoldssche Zahl R_k , bei welcher der Sprung erfolgt, durch Mittelung auf wenige Prozent genau angegeben werden. Sie liegt etwa bei 300.

3. Eine Abhängigkeit der Größe R_k von Material und Rauigkeitsgrad der Grundfläche konnte nicht konstatiert werden.

4. Das Reynoldssche Ähnlichkeitsgesetz bewährt sich innerhalb der Genauigkeitsgrenzen bei Änderung des Gefälles, die gleichbedeutend ist mit einer Änderung der Geschwindigkeit oder der Tiefe.

5. Das Reynoldssche Ähnlichkeitsgesetz bewährt sich nicht bei Anwendung von verschieden stark reibenden Flüssigkeiten. Hier wurden Abweichungen bis zu 25 Proz. gefunden, während bei entsprechenden Experimenten an Röhren die Differenz der kritischen Zahlen nur etwa 3 Proz. betrug.

Bei freier Oberfläche erfolgt die Abweichung in der Richtung, daß *ceteris paribus* R_k sinkt mit wachsendem Reibungskoeffizienten.

6. Daß solche Abweichungen auftreten, ist theoretisch leicht verständlich, da durch eine Grenzbedingung an der freien Oberfläche neue, für die Strömung charakteristische Zahlen ins Spiel kommen, welche bei Strömungen zwischen festen Wänden nicht auftreten, besonders durch die den Differentialgleichungen ganz fremde, für die freie Oberfläche aber sehr wichtige Größe der Kapillarität. Warum man das Ähnlichkeitsgesetz mit Rücksicht auf die Kapillarität nicht einwandfrei erweitern kann, wird in § 4 auseinandergesetzt.

7. Die Verhältnisse werden stark kompliziert durch die an der Flußoberfläche auftretenden Wellen. Diese sind vom Turbulenzphänomen ganz unabhängig und verwehren eine direkte Beobachtung der turbulenten Bewegungen durch Augenschein. Die Gesetze, denen sie gehorchen, weichen von den für Wellen auf ruhendem Wasser berechneten erheblich ab.

Zum Schlusse möchte ich mir gestatten, auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Sommerfeld meinen herzlichsten Dank auszusprechen für die Anregung zu

dieser Arbeit und für das stete und rege Interesse, das er all meinen Studien entgegenbrachte. Auch seinem Assistenten, Hrn. Dr. Debye, sei herzlichst gedankt für die Bereitwilligkeit, mit der er mir manche Schwierigkeiten überwinden half.

Anhang.

Berechnung der Ausflußmenge eines reibenden Flusses von endlicher Breite.¹⁾

Zu lösen sind Differentialgleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \mu \Delta u = -\rho g \sin \alpha, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos \alpha, \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

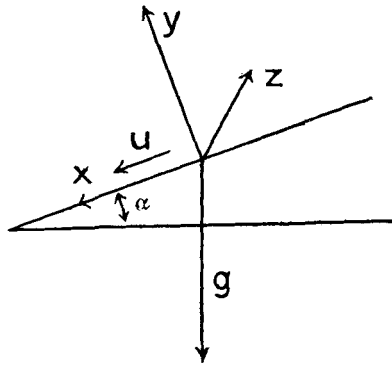


Fig. 3.

Dazu die Grenzbedingungen:

$$(2) \quad \begin{cases} u = 0 & \text{für } y = 0, \\ u = 0 & \text{für } z = \pm b, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & \text{für } y = h, \\ p = 0 & \text{für } y = h. \end{cases}$$

Für den Druck ergibt sich ohne weiteres:

$$(3) \quad p = \rho g \cos \alpha (h - y).$$

1) Zu p. 781.

Die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit:

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} = c$$

lösen wir durch einen Ansatz, welcher die Grenzbedingungen an den Seitenwänden erfüllt:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{x}{b} (2n+1) \frac{\pi}{2} f_n(y).$$

Die Konstante c können wir über die Flußränder beiderseits hinaus in beliebiger Weise fortsetzen, und wir tun das so, daß wir für c eine Fourierreihe erhalten, deren halbe Periode die Flußbettbreite ist:

$$c = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4c}{(2n+1)\pi} \cos(2n+1) \frac{x}{b} \frac{\pi}{2}.$$

Einsetzen in (4) ergibt für $f_n(y)$ die Differentialgleichung:

$$(5) \quad \frac{d^2 f_n}{dy^2} - k_n^2 f_n = l_n,$$

wobei

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2b}$$

und

$$l_n = (-1)^n \frac{4c}{(2n+1)\pi}.$$

Daraus bei Weglassung der Indizes:

$$f = - \frac{l}{k^2} + A e^{ky} + B e^{-ky}.$$

Die beiden noch übrigen Grenzbedingungen bestimmen A und B durch die Gleichungen:

$$A + B = \frac{l}{k^2},$$

$$A e^{kh} - B e^{-kh} = 0$$

oder:

$$A = \frac{l}{k^2} \frac{1}{1 + e^{2kh}}, \quad B = \frac{l}{k^2} \frac{e^{2kh}}{1 + e^{2kh}},$$

also:

$$(6) \quad f = \frac{l}{k^2} \left(\frac{\mathfrak{Cof} k(y-h)}{\mathfrak{Cof} kh} - 1 \right).$$

So erhalten wir schließlich die Geschwindigkeitsverteilung:

$$(7) \quad u = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{16 b^2 c}{(2n+1)^3 \pi^3} \left(\frac{\mathfrak{Cof} \left\{ (2n+1) \frac{\pi y-h}{2} \frac{\pi}{b} \right\}}{\mathfrak{Cof} \left\{ (2n+1) \frac{\pi h}{2} \frac{\pi}{b} \right\}} - 1 \right) \cos(2n+1) \frac{\pi x}{2b},$$

ein schon von Graetz¹⁾ und von Greenhill²⁾ angegebenes Resultat. Die gesuchte Ausflußmenge wird

$$Q = \int_0^h \int_{-b}^{+b} u \, dy \, dz = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{2b^2 c}{\nu^3} \left(\frac{b}{\nu} \mathfrak{Xg} \nu \frac{h}{b} - h \right) \frac{2b}{\nu} (-1)^n,$$

wobei zur Abkürzung $\nu = (2n + 1) \pi / 2$ gesetzt ist;

$$(8) \quad Q = 4b^4 c \left\{ \sum_0^{\infty} \left(\frac{1}{\nu^5} \mathfrak{Xg} \nu \frac{h}{b} \right) - \frac{h}{b} \sum_0^{\infty} \frac{1}{\nu^4} \right\}.$$

Wir haben die Summe auszurechnen:

$$\sum \frac{1}{\nu^4} = \frac{\pi^4}{96} \cdot \frac{16}{\pi^4} = \frac{1}{6}.$$

Bei der anderen Summe treten Schwierigkeiten auf, denn die Potenzreihenentwicklung des \mathfrak{Xg} führt zu nichtkonvergenten Summen; man kann aber in folgender Weise vorgehen³⁾:

$$\mathfrak{Xg} \nu \frac{h}{b} = 2\nu \frac{h}{b} \sum_0^{\infty} \binom{\mu}{\mu} \frac{1}{\mu^2 + \frac{b^2}{h^2}}, \quad \text{wobei} \quad \mu = (2n + 1) \frac{\pi}{2}.$$

$$= 2\nu \frac{h}{b} \sum_0^{\infty} \binom{\mu}{\mu} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu t}}{\mu} \cos \frac{h}{b} \nu t \, dt,$$

$$(9) \quad \sum_0^{\infty} \binom{\nu}{\nu} \frac{1}{\nu^5} \mathfrak{Xg} \nu \frac{h}{b} = 2 \frac{h}{b} \sum_0^{\infty} \binom{\mu}{\mu} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu t}}{\mu} \sum_0^{\infty} \binom{\nu}{\nu} \frac{\cos \frac{h}{b} \nu t}{\nu^4} \, dt.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} \binom{\nu}{\nu} \frac{\cos \frac{h}{b} \nu t}{\nu^4} &= \frac{1}{12} \left(\frac{h}{b} t \right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{h}{b} t \right)^2 + \frac{1}{6} \quad \text{für} \quad 0 < t < \frac{2b}{h} \\ &= -\frac{1}{12} \left(\frac{h}{b} t \right)^3 + \frac{3}{4} \left(\frac{h}{b} t \right)^2 - \frac{1}{6} \quad \text{für} \quad \frac{2b}{h} < t < \frac{4b}{h} \end{aligned}$$

usw.,

1) Graetz, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 25. 1880.

2) Greenhill, Lond. Math. Soc. Proc. 13. 1881.

3) Vgl. Debye, „Wirbelströme in Stäben von rechteckigem Querschnitt“, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 54. p. 418. 1906.

wie man leicht durch mehrfache Integration der Identität:

$$\sum_0^{\infty} \binom{n}{n} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

zwischen den Grenzen Null und x erweisen kann.

Es ist klar, daß bei Ausführung der Integration über t nur die von der Grenze Null herrührenden Glieder in Betracht kommen, da die übrigen mindestens wie $e^{-2\frac{h}{b}}$ verschwinden, d. i. im Falle unserer Experimente rund e^{-50} , also praktisch Null. Es bleibt also übrig:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu t}}{\mu} \sum_0^{\infty} \binom{n}{n} \frac{\cos \nu \frac{h}{b} t}{\nu^4} dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{4} \frac{2}{\mu^4} \left(\frac{h}{b}\right)^2 + \frac{1}{12} \frac{6}{\mu^6} \left(\frac{h}{b}\right)^3.$$

In (9) eingesetzt:

$$\begin{aligned} & \sum_0^{\infty} \frac{1}{\nu^5} \Im g \nu \frac{h}{b} \\ &= \frac{2h}{b} \left\{ \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{\pi^4} \cdot \frac{\pi^4}{96} \cdot \left(\frac{h}{b}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{\pi^6} \sum_0^{\infty} \binom{n}{n} \frac{1}{(2n+1)^5} \cdot \left(\frac{h}{b}\right)^3 \right\}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (8) erhalten wir schließlich die Ausflußmenge pro Sekunde:

$$Q = -\frac{2}{3} c b h^3 + 0,42 c h^4,$$

da

$$\frac{32}{\pi^5} \cdot \sum_0^{\infty} \binom{n}{n} \frac{1}{(2n+1)^5} = 0,105$$

oder

$$(10) \quad Q = \frac{2}{3} \frac{g q \sin \alpha}{\mu} b h^3 \left(1 - 0,63 \frac{h}{b}\right).$$

München, Institut für theoretische Physik.

(Eingegangen 18. Februar 1910.)