**8. Untersuchungen über den Ausfluß
komprimierter Luft aus Kapillaren und die dabei
auftretenden Turbulenzerscheinungen;
von W. Ruckes.**

(Gekürzte Würzburger Dissertation.)

I. Abschnitt.

Einleitung und Geschichtliches.

In den Jahren 1883 und 1895 veröffentlichte „Osborne Reynolds“ Abhandlungen über die Bewegungserscheinungen, welche auftreten, wenn Wasser in langen, engen Röhren fließt. Er zeigte experimentell¹⁾ sowohl wie theoretisch²⁾, daß es eine bestimmte Geschwindigkeit gibt, unterhalb welcher die einzelnen Wasserteilchen sich parallel der Röhrenachse fortbewegen, oberhalb deren aber Wirbel auftreten. Jene Geschwindigkeit bezeichnet Reynolds als „kritische Geschwindigkeit“ und findet für das Kriterium, d. h. für die Stelle, an der die Wirbelbildung auftritt, den Ausdruck:

$$K = 1900 \text{ bis } 2000 = \frac{\rho D \cdot U_m}{\mu}.$$

Hier bedeutet:

- ρ die Dichte,
- U_m die mittlere Geschwindigkeit des Wassers,
- μ den Reibungskoeffizienten,
- D den Durchmesser des Rohres,
- K ist eine numerische Konstante und hat für kreisförmigen Röhrenquerschnitt den Wert 1900 bis 2000.

Das in der Zeiteinheit aus der Röhre austretende Flüssigkeitsvolumen ist nun³⁾:

$$V = \frac{\pi (p_a - p_e)}{8 \eta l} \left(r^4 + 4 \frac{\eta}{\epsilon} r^3 \right).$$

1) O. Reynolds, Phil. Trans. 1883.

2) O. Reynolds, l. c. 1895.

3) A. Wüllner, Lehrbuch der Physik Bd. 1.

Es ist hier:

p_a	der Druck am Anfang der Röhre,
p_e	„ „ „ Ende „ „
$2r$	„ Durchmesser der Röhre,
η	„ Koeffizient der inneren Reibung,
ε	„ „ „ „ äußeren „
l	„ die Röhrenlänge.

Bleibt nun die Wandschicht in Ruhe, ist also die äußere Reibung ε unendlich groß, so fällt das zweite Glied in der letzten Klammer des obigen Ausdruckes fort und es wird:

$$V = \frac{\pi (p_a - p_e)}{8 \eta l} \cdot r^4.$$

Das aus der Kapillarröhre in der Zeiteinheit ausfließende Volumen ist also dem die Flüssigkeit treibenden Drucke und der vierten Potenz des Radius der Röhre direkt, der Länge und der inneren Reibungskonstanten der Flüssigkeit umgekehrt proportional.

Schon die Versuche von Hagen und Poiseuille¹⁾, welche vor Kenntnis der Theorie Versuche über den Ausfluß von Flüssigkeiten durch enge Röhren angestellt haben, führten zu einem ganz entsprechenden Ausdruck wie die letzte Gleichung, weshalb man diese auch wohl „das Poiseuillesche Gesetz“ nennt. Da nun das Poiseuillesche Gesetz zur Voraussetzung hat: alle Flüssigkeitsteilchen bewegen sich parallel der Röhrenachse, so folgt aus den Untersuchungen von Reynolds, daß das Gesetz nicht für alle Geschwindigkeiten, also auch nicht für alle Drucke gilt, sondern nur für Geschwindigkeits- bzw. Druckwerte unterhalb des Kriteriums. Anschließend an die Arbeit von Reynolds ist mir nun von Hrn. Geheimrat Wien die Aufgabe gestellt, das Auftreten der Turbulenzerscheinungen bei Gasen näher zu untersuchen, bzw. den Gültigkeitsbereich des Poiseuilleschen Gesetzes näher zu erforschen.

Die von O. E. Meyer²⁾ durchgeführte Theorie des Ausströmens von Gasen durch enge Röhren liefert für das in der

1) E. Hagen u. Poiseuille, Pogg. Ann. 58. p. 424.

2) O. E. Meyer, Pogg. Ann. 127.

Zeiteinheit durchfließende Volumen einen Ausdruck, der dem bei Flüssigkeiten analog ist. Es muß jedoch vorausgesetzt werden, daß die Geschwindigkeiten unendlich klein sind, während bei inkompressiblen Flüssigkeiten die Poiseuillesche Bewegung eine immer mögliche ist. Es muß bei Gasen nur das Volumen unter dem mittleren Drucke $\frac{p_a + p_e}{2}$ gemessen werden.

Später haben dann Springmühl¹⁾ und Obermaier²⁾ durch ausführliche Versuche noch gezeigt, daß auch hier der Koeffizient ϵ der äußeren Reibung unendlich groß ist. Die benutzten Drucke waren sehr gering.

Wenn nun das Poiseuillesche Gesetz mit mehr oder weniger Genauigkeit auch für Gase gilt, so muß, falls auch hier eine kritische Geschwindigkeit, ein Kriterium vorhanden ist, unterhalb dieser Stelle das Gesetz gelten, oberhalb nicht mehr.

Als Richtschnur für die experimentellen Untersuchungen habe ich mir folgende Disposition aufgestellt:

1. Gibt es bei Gasen eine kritische Geschwindigkeit? (Kriterium).

2. Wie verschiebt sich dieses Kriterium mit Durchmesser und Länge der Kapillare?

3. Wie verhält sich das Poiseuillesche Gesetz unter- und oberhalb des Kriteriums?

4. Einfluß des Kapillarenmaterials.

5. Abhängigkeit der Durchflußmenge und des Kriteriums von der Gestalt der Einflußöffnung.

6. Kann man die Wirbel sichtbar machen?

7. Temperaturverlauf längs der Kapillare.

Soviel mir bekannt, sind bis jetzt Untersuchungen über die Turbulenzerscheinungen bei Gasen, hervorgerufen durch das Strömen in Kapillaren, noch nicht gemacht. Mehrfach untersucht ist jedoch schon der Reibungskoeffizient selbst, seine Änderung mit Druck und Temperatur. Ich will nur

1) Springmühl, Pogg. Ann. 148. p. 1 u. 526. 1873.

2) Obermaier, Pogg. Ann. 148. p. 1 u. 526. 1873.

erwähnen die Arbeiten von Obermaier¹⁾, Schuhmann²⁾, Kundt und Warburg³⁾, Maxwell⁴⁾, Barus⁵⁾ u. a.

Für die Veränderung des Reibungskoeffizienten η mit dem Drucke fanden die Beobachter: „Innerhalb weiter Grenzen des Druckes ist die innere Reibung der Gase entweder gar nicht oder doch nur in sehr geringem Grade mit dem Druck veränderlich.“ Die Resultate in bezug auf die Änderung von η mit der Temperatur weichen noch ziemlich voneinander ab, sie stimmen aber darin überein, daß die Zunahme von η schneller erfolgt, als die Theorie verlangt.

Bei meinen Versuchen habe ich geradlinig ausgestreckte Metall- und Glaskapillaren verwendet mit kreisförmigem Querschnitt. Der Übersicht halber sei über die Dimensionen folgende Tabelle im voraus mitgeteilt:

	Länge der Kapillare	Druck	Durchmesser der Kapillare
max.	15 300 mm	180 Atm.	4 mm
min.	163	7 mm H ₂ O	0,123 mm

II. Abschnitt.

Beschreibung der Anlage.

Zu der vorliegenden Arbeit wurde die Maschinenanlage des physikalischen Institutes benutzt. Bei der Ausführung der Versuche habe ich unterschieden zwischen einer Hochdruckanlage (Fig. 1) und einer Niederdruckanlage (Fig. 2).

1. Kapitel. Hochdruckanlage.

Die Luft wird durch den Kompressor *C*, welcher von dem Gasmotor *G* mit Hilfe der Transmission *T* angetrieben wird, aus dem Freien angesaugt und in das Reservoir *R* gedrückt.

1) Obermaier, Pogg. Ann. 168. p. 550.

2) Schuhmann, Wiener Ber. 23. p. 353.

3) F. Kundt u. E. Warburg, Pogg. Ann. 155. p. 529. 1875.

4) Maxwell, Phil. Trans. 1866. p. 249.

5) C. Barus, Wied. Ann. 36. p. 358. 1889.

Die Anlage läßt eine Kompression zu bis 200 Atm. Überdruck. Das Reservoir *R* besteht aus drei übereinandergelagerten Kesseln und ist so konstruiert, daß man sowohl die komprimierte Luft sowie auch das Wasser einzeln entnehmen kann. Der Kompressor läuft zwecks Kühlung unter Öl und Wasser, mithin wird sich stets in jedem der drei Kessel unten das Wasser, darüber die komprimierte Luft befinden. Die drei Wasserräume, sowie die drei Lufträume stehen nun je unter sich in Verbindung, so daß es durch Umklappen des Rohrstückes *Z* möglich ist, durch das Ventil *F* Luft, durch das

Fig. 1. Hochdruckanlage.

Ventil *E* Wasser in die Kapillare zu schicken. Die Leitung *W* ist in Wirklichkeit ganz kurz. Der Behälter *L* dient zur Verbindung der Kapillare *K* mit dem Rohr *W* bzw. mit dem Reservoir *R*. Die Konstruktion von *L* wird später erörtert. An die Kapillare schließt sich das Expansionsrohr *S* und an dieses die Gasuhr *U*. Vor der Gasuhr ist ein Wassermanometer *H*. Der erzeugte Kompressionsdruck wird an dem Metallmanometer *M* abgelesen. *D* ist ein Absperrventil. An das Ventil *F* kann für niedrigere Drücke (1 Atm. und weniger) ein Reduzierventil angeschraubt werden. In diesem Falle muß man dann für die Druckmessung wegen der Genauigkeit auch

noch ein Quecksilbermanometer einschalten. Wenn die durchfließende Menge wegen zu enger Kapillare zu klein wird, um mit der Gasuhr gemessen zu werden, fängt man die Luft durch den Meßzylinder *N* über Wasser auf. Hierdurch kann man einzelne Kubikzentimeter ablesen.

2. Kapitel. Niederdruckanlage.

Diese Anlage ist für Drucke bestimmt, die nur einige Millimeter oder Zentimeter Wassersäule betragen. Aus diesem Grunde ist sie naturgemäß bedeutend einfacher als die Hoch-

Fig. 2. Niederdruckanlage.

druckanlage. Die Luft wird komprimiert in dem Gasometer *X*, geht dann zum Wassermanometer *Y* und von hier zur Kapillare *K*. An letztere schließt sich die Gasuhr *U*. Je nach der Menge wurde bald eine große, bald eine kleine Gasuhr benutzt.

III. Abschnitt.

Ausführung der Versuche.

1. Kapitel. Allgemeines.

Bevor ich an die Versuche selbst herangehen konnte, hatte ich in der Anlage viele technische Schwierigkeiten zu überwinden. Hauptsächlich stellten sich mir bei hohen Drucken die Undichtigkeiten in den Weg, die teilweise in den Flanschen, zum größten Teil aber in den Ventilen zu suchen waren. Die

Luftventile *D* und *F* dichten durch einen Tellerverschluß (Fig. 3), das Wasserventil *E* durch einen Konus (Fig. 4).

Die Schwierigkeiten in dem Abdichten der Ventile *D* und *F* lag in dem Umstände, zu dem Dichtungsteller ein

Fig. 3 (schematisch).

Fig. 4.

Material zu verwenden, das weder zu hart noch zu weich ist. Gummi, Blei, Zink, Leder erwiesen sich als zu weich; Kupfer, Eisen als zu hart.

Erst in dem Aluminium fand ich das rechte Mittelding. Die Aluminiumdichtungen habe ich $1\frac{1}{2}$ Jahr täglich benutzt und es war bis zum Schluß dieser Arbeit nicht erforderlich, die Dichtungsteller auch nur ein einziges Mal auszuwechseln.

Für meine persönliche Sicherheit gegen ein eventuelles Zerspringen einer Glaskapillare sorgte ich in der folgenden Weise:

Die Kapillare wurde an den freien Seiten mit Ausnahme der vorderen durch zwei dünne Stahlblechplatten abgedeckt. Vorne, an der Beobachtungsseite, hingen schwebend, um einem Anprall der Glassplitter nachgeben zu können, zwei übereinandergelegte, feine-maschige Drahtsiebe. Die Kapillare stand vertikal (Fig. 5).

Fig. 5 (schematisch.)

Die Versuche wurden in der Weise angestellt, daß ich an dem Metall-, Quecksilber- oder Wassermanometer den jeweilig treibenden Druck, an der Gasuhr die in einer bestimmten Zeit durchgeflossene Menge konstatierte. Durch Auftragen

des Druckes und des Reibungskoeffizienten, bzw. des Druckes und der Durchflußmenge erhielt ich dann jedesmal die Stelle des Kriteriums in der Kurve. Bei kleinen Durchflußmengen, also bei engen Kapillaren, wählte ich mit Rücksicht auf die Genauigkeit der Gasuhren die Beobachtungszeit größer als bei weiten Kapillaren. Es war besonders darauf zu achten, daß zwischen Kapillare und Gasuhr eine sogenannte Expansionsleitung lag, damit die Gasuhr ohne Überdruck arbeitete.

Die Glaskapillaren sind geliefert von Karl Kramer in Freiburg (Br.). Die Metallkapillaren konnte ich in den für mich notwendigen Dimensionen in Deutschland nirgendwo erhalten. Ich bezog sie von Kipp & Zonen in Delft (Holland).

Die Verbindung der Glaskapillare *K* mit dem Behälter *L* hatte nebenstehende Konstruktion. Fig. 6.

Fig. 6.

Der ganze in Fig. 6 dargestellte Dichtungsverschluß hat sich bei genügendem Anziehen der oberen Mutter als sehr gut bewährt. Die Kapillare *K* wurde mittels Marineleim oder Siegelack in die Stopfbüchse eingekittet (vgl. Fig. 6). Nicht ein einziges Mal ist mir während der ganzen Arbeit eine Kapillare infolge zu hohen Druckes herausgeschleudert worden, ein

Beweis für die Zuverlässigkeit des Einkittens mittels Marineleim oder Siegelack. Nur muß das Einkitten bei heißer Stopfbüchse und recht langsam geschehen, damit die Luft entweichen kann. Während des Einkittens verhinderte ich das Auslaufen des Siegelacks durch Verschieben eines Korkpfropfens. Befürchtet man bei gar zu hohen Drucken dennoch eine Verschiebung der Kapillare, so kann letztere am Einflußende noch etwas aufgeblasen werden.

Die Kapillare war nicht direkt mit dem Expansionsrohr, welches zur Gasuhr führt, verbunden, sondern es war zwischen Kapillare und Expansionsrohr noch ein Stück weiten Gummischlauches angebracht. Bei hohen Drucken nämlich gerät die Kapillare sehr leicht in kleine Schwingungen, weil sie vertikal steht, und sie bricht dann, wenn sie aus Glas besteht, jedesmal ab, sobald sie am Ausflußende nicht frei beweglich ist. Auch wäre ohne den Schlaucheinsatz ein Zentrieren der Kapillaren wohl gar zu schwierig, wenigstens bei Glas. Die Expansionsleitung selbst war aus Glas.

2. Kapitel. Vorversuche.

§ 1. Eichen der Gasuhren.

Die beiden Gasuhren wurden hintereinander geschaltet. Die große Uhr war, wie ich schon erwähnte, vom Gaswerk entliehen und zeigte bei einer Umdrehung 100 Liter an; die

Fig. 7

kleine Uhr gehörte zum Junkerschen Kalorimeter und zeigte bei einer Umdrehung 3 Liter an. Ich benutzte die kleine Uhr als Präzisionsinstrument.

Durch einen meiner Herren Kollegen wurde bei I von 5 zu 5 Liter ein Kommando abgegeben. Zu gleicher Zeit las ich die angezeigte Menge bei II ab. Die Differenz ergab als-

dann die Korrektur. Die Korrekturkurve ist in Kurve 1 dargestellt.

§ 2. Eichen des Hochdruckmanometers.

Das Hochdruckmanometer ist ein Metallmanometer und läßt einen Druck zu bis 250 Atm. Überdruck. Das Eichen geschah in der folgenden Weise:

Durch eine Cailletetsche Pumpe wurde durch Kompression von Wasser der hohe Druck erzeugt und dieser dann nach der Methode von Amagat durch Kolbenübertragung reduziert. Mit der Cailletetschen Pumpe war das zu eichende Metallmanometer, mit dem Amagatschen Apparat das zu vergleichende Quecksilbermanometer verbunden. Beide Pumpen waren hintereinander geschaltet (vgl. Fig. 8).

Fig. 8.

Während ich den Druck an dem vergleichenden Quecksilbermanometer regulierte und ablas, beobachtete einer meiner Herren Kollegen das zu eichende Metallmanometer. Die übertragende Flüssigkeit bei dem Amagatschen Apparat war Melasse. Höher wie bis zu 153 Atm. Überdruck konnte ich mit der Cailletetschen Pumpe nicht kommen, weil es wegen ganz geringer Undichtigkeiten nicht möglich war, den Druck für die Beobachtungszeit konstant zu halten.

Wegen näherer Einzelheiten über die Konstruktion und den Gebrauch der beiden Apparate verweise ich auf Kohlrausch.¹⁾

1) F. Kohlrausch, Praktische Physik.

§ 3. Eichen des Niederdruckmanometers.

Das Niederdruckmanometer war ebenfalls ein Metallmanometer und ließ einen Druck bis zu 12 Atm. zu. Ich habe es jedoch nur bei niederen Drucken verwendet und auch nur für niedere Drucke geeicht. Letzteres geschah mit dem sogenannten Mariotteschen Apparat (vgl. Fig. 9).

Die Arbeitsmethode war folgende:

Wie früher, so wurde auch hier das zu eichende Manometer mit einer Quecksilbersäule verglichen. Mit der Handpumpe *A* wurde komprimierte Luft in den Mariotteschen Apparat gedrückt, alsdann der Hahn *B* geschlossen und durch Ziehen an der Ventilschnur *C* so viel Quecksilber aus dem kleinen Reservoir *R* in das Manometerrohr *D* gelassen, bis die Quecksilberoberfläche in dem erweiterten Rohrstück *E* sichtbar wurde. Die Quecksilbersäule hält alsdann dem Luftdruck in *E* das Gleichgewicht. Die Differenz der Quecksilbermenisken in *D* und *E* ergibt alsdann den Druck, der mit dem zu eichenden Manometer *G* zu vergleichen ist. Der Hahn *B* ist eingeschaltet, damit das Luftvolumen bzw. der Druck konstant bleibt, Hahn *K* dient zum Ablassen des Quecksilbers.

Fig. 9 (schematisch.)

3. Kapitel. Hauptversuche.

§ 1. Untersuchung des Kriteriums bei Glaskapillaren.

Wie schon erwähnt, wurden die Messungen in der Weise gemacht, daß ich Druck und Durchflußvolumen beobachtete. Ich zeichnete hierauf die Volumendruckkurve und erhielt unmittelbar das Kriterium, indem die Kurve an jener kritischen Stelle einen deutlichen Knick zeigte. Auch einige Werte des Reibungskoeffizienten η habe ich ausgerechnet und zwar nach dem Poiseuilleschen Gesetz, unter der Voraussetzung, daß das Volumen unter dem mittleren Druck $\frac{p_a + p_e}{2}$ gemessen wird. Naturgemäß bricht dann auch die Druck- η -Kurve an derselben Stelle, an der die Druckvolumenkurve das Kriterium zeigt. Ich werde nachfolgend bei der ersten Kapillare ein Beispiel der Beobachtung in Zahlen angeben und bei den folgenden Kapillaren nur noch die Kurven darstellen, da aus ihnen ja alle Beobachtungswerte ersichtlich sind. Der Durchmesser der Glaskapillare wurde durch Quecksilberwägung bestimmt und dann optisch mit dem Mikroskop kontrolliert. Bei gar zu engen Kapillaren wurde der Quecksilberwägung eine Berechnung des Durchmessers aus dem Poiseuilleschen Gesetz bei ganz niedrigem Drucke vorgezogen. Die erste Glaskapillare hatte einen Durchmesser von 0,123 mm und eine Länge von 1055 mm.

Einige Beobachtungswerte. (Hierzu Kurve 4) Kapillare 1.

Atm. Druck abgelesen am Manometer	Druck korrigiert in Atm:	Durchfluß- volumen in ccm	Strömungs- zeit in sec	Bemerkungen
1,0	1,02	2,7	60	Niederdruck- manometer
2,11	2,13	4,0	30	
2,52	2,54	5,4	,,	
2,90	2,92	6,5	,,	
3,40	3,42	7,3	,,	
3,63	3,65	9,5	,,	
4,00	4,02	11,5	,,	
4,40	4,42	12	,,	

Einige Beobachtungswerte (Fortsetzung).

Atm. Druck abgelesen am Manometer	Druck korrigiert in Atm.	Durchfluß- volumen in ccm	Strömungs- zeit in sec	Bemerkungen
4,69	4,71	14	30	Niederdruck- manometer
5,01	5,03	15,6	„	
5,50	5,52	17,3	„	
5,80	5,82	19,5	„	
6,18	6,20	22	„	
6,86	6,88	26,8	„	
7,15	7,17	27,6	„	
12,0	10,2	51	„	Hochdruck- manometer
13,0	11,2	60	„	
14,1	12,3	70	„	
14,9	13,1	76	„	
16,0	14,2	89	„	
16,2	14,5	90	„	
16,6	15,0	92	„	
18,0	16,2	96	„	
20,0	18,4	103	„	
22,0	20,4	109,5	„	
23,5	22	119	„	
27,5	26,1	140	„	
30,0	28,7	158	„	
32,8	31,7	177	„	
35,1	34,1	183	„	
37,3	36,5	197	„	
40,0	39,3	214	„	
42,0	41,4	224	„	

Die in der Tabelle angegebenen Durchflußmengen sind nun ihrerseits wiederum der Mittelwert aus mehreren Messungen. Der Druck blieb nämlich, besonders bei engen Kapillaren, längere Zeit konstant, und während dieser Zeit beobachtete ich dann alle 30 Sek. die Ausflußmenge. Wenn z. B. in der Tabelle einem Druck von 5,01 Atm. eine Durchfluß-

menge von 15,6 ccm entspricht, so ist 15,6 ccm der Mittelwert aus den Einzelmessungen:

15 cm	30 Sek.	} Druck 5,01 Atm.
17 "	30 Sek.	
16 "	30 Sek.	
14 "	30 Sek.	
16 "		
15 "		
16 "		
16 "		
15,6 cm

Glaskapillare. Durchmesser 0,123 mm.

Kurve 4: $l = 1055$ mm. Kurve 5: $l = 295$ mm.

Kurve 6: $l = 163$ mm.

NB. Am Einflußende nicht aufgeblasen.

Für die Berechnung des Reibungskoeffizienten η gilt:

$$\eta = \left(\frac{\pi \cdot r^4 \cdot 981}{8 \cdot l} \right) \cdot \left(\frac{p \cdot t}{v} \right)$$

$$= C \cdot \frac{p \cdot t}{v}$$

(v muß unter dem Drucke $\frac{p_a + p_e}{2}$ gemessen werden).

Der erste Klammerausdruck bleibt bei der gleichen Kapillare konstant, es ändert sich mit dem Druck nur der zweite Faktor, die letzte Klammer. Hat man C für eine Kapillare berechnet, so folgen die η -Werte für verschiedene Drucke aus $\eta = C \cdot (p \cdot t/v)$.

Bei der ersten Kapillare war

$$l = 105,5 \text{ cm}, \quad 2r = 0,0123 \text{ cm},$$

es wird also

$$C = \frac{3,14 \left(\frac{0,0123}{2} \right)^4 \cdot 981}{8 \cdot 105,5} = 522 \cdot 10^{-11},$$

$$\eta = 522 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{p \cdot t}{v}.$$

Nachfolgend einige Zahlenwerte des Reibungskoeffizienten bei verschiedenen Drucken. (Hierzu Kurve 7.)

Druck in Atm.	$\eta \cdot 10^7$	Druck in Atm.	$\eta \cdot 10^7$
1,02	1775	13,1	2036
2,13	1722	14,5	2088
5,03	1722	15,0	2130
6,88	1722	18,4	2766
10,2	1879	22	3497
11,2	1931	28,7	4332
12,3	2088	39,3	5690

In den nachfolgenden Kurven nun habe ich Kapillaren von verschiedener Länge und verschiedenem Durchmesser benutzt, um so die Verschiebung des Kriteriums festzustellen.

Glaskapillare.
Durchmesser 0,241 mm.

Kurve 8: $l = 1054 \text{ mm}$

„ 9: $l = 599 \text{ „}$

NB. Am Einflußende nicht
aufgeblasen.

Versuchstabelle.

Kapillare Nr.	Durch- messer in mm	Länge in mm	Kriterium liegt bei einem Drucke von	Kurve (Liter) Nr.	Durchflußmenge an der kritischen Stelle in 30 sec	Bemerkungen
1 a	0,123	1055	14,2 Atm.	4	87 ccm	Am Einflußende nicht aufgeblasen
1 b		295	8,5 "	5	100 "	
1 c		163	6,3 "	6	98 "	
2 a	0,241	1054	4,5 "	8	0,180 Liter	desgl.
2 b		599	3,6 "	9	0,185 "	
3 a	2,00	15300	260 mm Hg	10	1,45 "	
3 b		12150	234 "	11	1,47 "	
3 c		9170	182 "	12	1,50 "	
3 d		6080	133 "	13	1,51 "	
3 e		2880	170 "	14	1,53 "	
3 f		1550	34 "	15	1,68 "	
3 g		1030	24 "	16	1,70 "	
5	3,80	3120	{ noch tiefer als } 7 mm H ₂ O	18	—	desgl.
6 a	0,430	1030	2,1 Atm.	19; 23; 24; 27	0,45 Liter	konisch aufgeblasen
6 b		570	1,6 "	20; 23; 25; 28	0,52 "	(jedoch wenig)
6 c		278	1,5 "	21; 26	0,86 "

Glaskapillare. Durchmesser 2,0 mm.

Kurve 10: $l = 15,30$ m

Kurve 14: $l = 2,88$ m

„ 11: $l = 12,15$ „

„ 15: $l = 1,55$ „

„ 12: $l = 9,17$ „

„ 16: $l = 1,03$ „

„ 13: $l = 6,08$ „

Einflußende nicht aufgeblasen.

Die Kapillaren 3 a bis 3 g wurden auf dem Hofe des Instituts aufgebaut, da mein Versuchsraum solche Längen nicht zuließ. Die ganze lange Röhre bestand aus einzelnen ungefähr je 2 m langen Kapillaren, die mit den Enden genau aneinanderstießen und durch Gummi zusammengehalten wurden (Fig. 10).

Fig. 10.

Ich habe mich durch mehrere Messungen überzeugt, daß der Zusammenstoß der Enden ohne Einfluß blieb, indem ich eine Kapillare in Stücke zerschnitt und diese dann in der geschilderten Weise wieder zusammenfügte. In beiden Fällen

waren die Resultate genau dieselben. Auch eine etwaige Krümmung im Expansionsrohr zwischen Kapillaren und Gasuhr war ohne Einfluß. Natürlich muß das Expansionsrohr weit sein im Vergleich zur Kapillare, besonders bei hohem Druck.

Glaskapillare. Durchmesser 2,2 mm.

Kurve 17: $l = 1555$ mm.

NB. Einflußende nicht aufgeblasen.

Bei Kapillare Nr. 5, Kurve 18 konnte ich wegen des großen Durchmessers ein Kriterium überhaupt nicht feststellen. In der Literkurve ist der Knick bis 7 mm H₂O abwärts noch nicht aufgetreten und auch η hat hier (7 mm H₂O) noch einen

Wert größer als $2000 \cdot 10^{-7}$. Mithin hat das Poiseuillesche Gesetz keine Gültigkeit.

$$p_a - p_c = (\text{Druck am Manometer}) \\ - (\text{Druck an der Gasuhr})$$

Glaskapillare. Durchmesser 3,8 mm.

Kurve 18: $l = 3120$ mm.

NB. Einflußende nicht aufgeblasen.

Die folgende Tabelle gibt einige Geschwindigkeiten an der kritischen Stelle an wie sie sich berechnen würden, wenn am Ausflußquerschnitt das ausströmende Gas schon die Dichtigkeit der ausfließenden Atmosphäre hätte, was bei größeren Geschwindigkeiten nicht zutreffen wird.

Kapillare Nr.	Durchmesser in mm	Länge in m	Geschwindigkeit an der kritischen Stelle in m
1 a	0,123	1,055	244,33
1 b	"	0,295	280,84
1 c	"	0,163	272,41
2 a	0,241	1,054	131,77
2 b	"	0,599	135,43
3 a	2,0	15,300	15,39
3 b	"	12,150	15,60
3 c	"	9,170	15,92
3 d	"	6,080	15,95
3 e	"	2,880	16,24
3 f	"	1,550	17,82
3 g	"	1,030	18,05

Glaskapillare.
Durchmesser 0,430 mm.

Kurve 19 } $l = 1030$ mm
" 22 }

Kurve 20 } $l = 570$ mm
" 23 }

Kurve 21 $l = 278$ mm

NB. Einflußende nicht
aufgeblasen.

Glaskapillare.

Durchmesser 0,430 mm.

Kurve 24: $l = 1030$ mm,, 25: $l = 570$ „,, 26: $l = 278$ „

Glaskapillare.

Durchmesser 0,430 mm.

Kurve 27: $l = 1030$ mm,, 28: $l = 570$ „

Es zeigt sich, daß der von Reynolds gefundene Ausdruck für das Kriterium

$$\frac{\rho D U_m}{\mu} = \sim 2000$$

auch auf Gase anzuwenden ist. Ich will hier einige Zahlenwerte dieses kritischen Ausdruckes angeben, wobei ich setze:

$$\mu = 1800 \cdot 10^{-7},$$

$$\rho = 0,0012.$$

Durchmesser in mm	Länge in m	$\frac{\rho D U_m}{\mu}$
0,123	1,055	2003
"	0,295	2302
"	0,163	2234
0,241	1,054	2112
"	0,599	2160
2,0	15,300	2042
"	6,080	2126
"	1,030	2400

§ 2. Untersuchung des Kriteriums bei Metallkapillaren.

Der Querschnitt der Metallkapillaren war nicht so genau kreisrund wie derjenige der Glaskapillaren. Es hängt dies mit der Schwierigkeit der Herstellung von Metallkapillaren von großer Wandstärke zusammen.

Die Beobachtungen sind, wie in § 1, so auch hier direkt in Kurven niedergelegt.

Tabelle.

Kapillare Nr.	Kurve Nr.	Kriterium liegt bei	Material	Durch- messer in mm	Länge in m
7	29 und 30	430 mm Hg	Eisen	~0,4	1,480
8	31	{ nur bei hohem Druck mit Kap. Nr. 7 verglichen }	Kupfer	~0,4	1,500
9	32	78 mm H ₂ O	Kupfer	1,95	1,380
10	33	nicht gefunden	Messing	4,0	3,120

Die kritische Geschwindigkeit bei Kapillare Nr. 7 (Kurve 30 und 31) ist: 16,46 m. Der Ausdruck

$$\frac{\rho D U_m}{\mu} = 439;$$

für Kapillare Nr. 9 (Kurve 32) wird die kritische Geschwindigkeit 3,80 m — der Ausdruck

$$\frac{\rho D U_m}{\mu} = 494.$$

Kurve 29: $l = 1480$ mm

„ 30: $l = 1480$ „

„ 31: $l = 1500$ „

⊙ Fe-Kapillare.

Durchmesser $\sim \frac{4}{10}$ mm.

× Cu-Kapillare.

Durchmesser $\sim \frac{4}{10}$ mm.

Cu-Kapillare.

Durchmesser 1,95 mm.

Kurve 32: $l = 1380$ mm.

Messingkapillare.

Durchmesser 4,0 mm.

Kurve 33: $l = 3120$ mm.

Es zeigt sich also, daß zwar der kritische Ausdruck

$$\frac{\rho D U_m}{\mu}$$

auch bei Metallkapillaren ein Kriterium darstellt, daß aber sein numerischer Wert bei Glas und Metall verschieden ist. Während ich bei Glaskapillaren gefunden hatte:

$$\frac{\rho D U_m}{\mu}$$

ist im Kriterium ungefähr 2000, finde ich für Metallkapillaren:

$$\frac{\rho D U_m}{\mu}$$

ist ungefähr 4—500.

§ 3. Versuch, die Wirbel optisch sichtbar zu machen.

Mit Hilfe verschiedener Methoden versuchte ich, die Vorgänge im Innern der Kapillare, die Wirbel, optisch sichtbar

zu machen. Zuerst brachte ich unter das Einflußende der Kapillare in geeigneter Weise während des Durchströmens der komprimierten Luft den Rauch von brennendem Zunder. Ich dachte, auf diese Weise vielleicht durch die Rauchwolken im Innern der Kapillare etwas Näheres zu entdecken. Jedoch die Kapillare wurde so heiß, daß ich diese Methode alsbald wieder verlassen mußte. Dann nahm ich statt des Zunders ein feines, gelbes Pulver. Aber auch hier sah ich im Innern der Kapillare trotz der schärfsten Beobachtung nichts als eine Wolke. Als letztes Hilfsmittel versuchte ich nun die sogenannte Schlierenmethode, welche bekanntlich die kleinsten Unterschiede in dem Lichtbrechungsvermögen an den einzelnen Stellen eines Raumes erkennen läßt und dadurch sonst ganz unsichtbare Erscheinungen sichtbar und beobachtbar macht. Ich habe sowohl die Anordnung von Prandtl,¹⁾ wie diejenige von Töpler²⁾ benützt. Wegen der Einzelheiten des Aufbaues verweise ich auf die Originalabhandlungen von Prandtl und Töpler selbst. Lange Zeit habe ich mit dieser Methode nach den verschiedensten Richtungen hin herumprobiert, jedoch ohne Erfolg. Meiner Ansicht nach lag das Versagen der sonst so empfindlichen Schlierenmethode allein in den optischen Unebenheiten des Kapillarenmaterials, des Kapillarenglases.

§ 4. Einfluß der Gestalt des Einflußendes der Kapillare in bezug auf das Durchflußvolumen und das Kriterium.

Wie früher, so sind auch hier die Beobachtungen wieder direkt in Kurven niedergelegt. Ich hätte eigentlich nicht geglaubt, daß der Einfluß der Gestalt des Einflußendes so groß sei, als sich in der Tat herausgestellt hat. Die Untersuchungen wurden in der Weise gemacht, daß ich das Durchflußvolumen verschiedener Kapillaren feststellte, und zwar einmal mit nicht aufgeblasenem Einflußende , das andere Mal mit aufgeblasenem Einflußende . Die Literdruckkurve ergab dann das Kriterium.

1) Prandtl, Physik. Zeitschr. 8. 1907.

2) Töpler, Pogg. Ann. 131.

x x x Kapillare am Einflußende aufgeblasen

o o o Kapillare nicht aufgeblasen

Glaskapillare. Durchmesser 0,153 mm. Kurve 34: $l = 1,35$ m.

Glaskapillare. Durchmesser 0,317 mm. Kurve 35: $l = \sim 80$ cm.

Glaskapillare.
Durchmesser 2 mm.
Kurve 36: $l = 1$ m.

○ Kapillare nicht aufgeblasen.
× Kapillare aufgeblasen.

Glaskapillare.
Durchmesser 2 mm.
Kurve 37: $l = 10,95$ m.

Der Übersicht halber will ich noch folgende Tabelle angeben, welche alle bisher untersuchten Glaskapillaren zusammenfaßt.

Durchmesser in mm	Länge in m	U_m gemessen in m	$\frac{q D U_m}{\mu}$ aus den Messungen	Bemerkungen
0,123	1,055	244,33	2003	} nicht aufgeblasen
	0,295	280,84	2302	
	0,163	272,41	2234	
0,241	1,054	131,77	2112	} "
	0,599	135,43	2160	
2,0	15,300	15,39	2042	} "
	21,150	15,60	↓	
	9,170	15,92	↓	
	6,080	15,95	2126	
	2,880	16,24	↓	
	1,550	17,82	↓	
	1,030	18,05	2400	
2,2	1,555	15,35	1998	"
0,153	1,350	225,8	2250	"
		333,70	3337	aufgeblasen
0,317	0,800	120,69	2536	nicht aufgeblasen
		379,32	~ 8000	aufgeblasen
2	1,000	15,85	2113	nicht aufgeblasen
		20,21	2694	aufgeblasen
2	10,950	16,80	2240	nicht aufgeblasen
		16,80	2240	aufgeblasen
0,430	1,030	104,40	~ 3000	} aufgeblasen (nur schwach)
	0,570	117,18	> 3000	
	0,278	197,59	> 5000	

§ 5. Temperaturuntersuchungen längs der Kapillare
(vgl. Fig. 11).

Die beiden Kapillaren *B* und *C* wurden in das eigens zu diesem Zwecke konstruierte Gefäß *A* eingekittet. Das Rädchen *R* diente zur Führung des Thermodrahtes, der durch die beiden Kapillaren gezogen war. Das zum Thermodraht verwendete Material war Kupfer und Konstantan. Die Hauptlötstelle *U*

(Kupfer–Konstantan) befand sich in der rechten Kapillare *B* und wurde durch vorsichtiges Ziehen in der Kapillare verschoben. Der Behälter *D* enthielt Wasser und hatte den Zweck, die kleinen mit Öl gefüllten Gefäße *E* und *F* auf konstanter Temperatur zu halten, weil hier sich noch die beiden Anschlußlötstellen für das Galvanometer *G* befanden. Die Leitungen *EG* und *FG* bestanden aus Kupfer. *H* war ein Fernrohr und diente zur Beobachtung der Ausschläge von *G*. Durch das Verschieben der Lötstelle *U* erhielt ich somit den Temperaturverlauf längs der Kapillare. Bei sorgfältiger Be-

Fig. 11. Temperaturuntersuchung.

handlung konnte ich sogar die Lötstelle noch einige Zentimeter aus der Kapillare herausziehen und auch die Temperaturvorgänge an dieser Stelle feststellen. Während der Beobachtung mußte natürlich die komprimierte Luft durch die Kapillare strömen. Den Druck hielt ich durch Nachpumpen konstant. Das Eichen des Galvanometerausschlags ergab: 10 mm Ausschlag auf der Fernrohrskala entsprechen einer Temperaturänderung von $\sim 1^{\circ} \text{C.}$, und zwar: Ausschlag nach rechts = Erwärmung, Ausschlag nach links = Abkühlung. Beobachtet wurde der treibende Druck, die Entfernung der Lötstelle vom Ausflusse der Kapillare *B* und die Temperatur.

Glaskapillare. Durchmesser 2 mm. Kurve 38: $l = 1220$ mm. $\times \times \times$ Druck 5,3 Atm. $\odot \odot \odot$ 2,7 Atm.

Glaskapillare.
Durchmesser $\frac{9}{10}$ mm.
Kurve 39: $l = 1270$ mm.
Druck = 5,3 Atm.

Temperaturuntersuchungen.

Δ gemessen

Δ wahrscheinlich wirklicher Verlauf

Glaskapillare.
Durchmesser $\frac{5}{10}$ mm.
" " " " " "

Kurve 40:
 $\times \times \times$ $l = 950$ mm. Druck = 5,3 Atm.
 $\odot \odot \odot$ $l = 950$ " " = 9 " "
 $\bullet \bullet \bullet$ $l = 430$ " " = 9 " "

Ich will auch hier wie früher auf die Beobachtungstabellen verzichten und dafür der besseren Übersicht wegen die Beobachtungskurven angeben. — Als Koordinaten sind aufgetragen die Entfernungen der Lötstelle U vom Ausflusse der Kapillare und die Galvanometerausläge. Die Entfernungen der Lötstelle innerhalb der Kapillare sind nach links, diejenigen außerhalb der Kapillare nach rechts aufgetragen. Die Erwärmung ist nach unten, die Abkühlung nach oben gedacht.

Fig. 12.

IV. Abschnitt.

Diskussion der Versuchsergebnisse.

I.

Betrachten wir zunächst die Erscheinungen bei Glaskapillaren mit Hilfe der Kurven 4—28. Es ist bei den Versuchen mit der engsten Kapillare begonnen. Die Kurven 4—7 zeigen die Vorgänge bei einer Kapillare von 0,123 mm Durchmesser. Letzterer ist überall derselbe, nur die Längen sind verschieden. Aus Kurve 4 ersieht man, daß die Literkurve bei ungefähr 14 Atm. einen Knick hat, dem natürlich auch ein Knick in der η -Kurve Nr. 7 entspricht. Unterhalb dieses Knickes ist der Reibungskoeffizient fast konstant, oberhalb wächst er plötzlich stark an. Da nun immer Liter- und η -Kurven in bezug auf die Lage des Knickes identisch sind, so braucht man eigentlich nur noch die Literkurve zu zeichnen. Es bildet also dieser Knick ein Kriterium für den Reibungs-

koeffizienten, demnach auch ein Kriterium für das Poiseuillesche Gesetz. Daß das Kriterium von der Länge abhängig ist in bezug auf den Druck, ergeben die Kurven 5 und 6. Je länger die Kapillare, desto höher liegt das Kriterium, desto später tritt es ein. Bei $l = 1055$ mm (Kurve 4) finden wir die kritische Stellung bei ~ 14 Atm., bei $l = 295$ mm (Kurve 5) liegt es bei ~ 8 Atm. und bei $l = 163$ mm (Kurve 6) sehen wir es bei ~ 6 Atm. Mit fallender Länge fällt also auch das Kriterium, d. h. dem Drucke nach. Dagegen scheinen sich die Durchflußmengen an der kritischen Stelle um einen bestimmten Mittelwert herum zu bewegen; das hieße also, die Geschwindigkeiten sind an den 3 Kriterien bei allen 3 Kapillaren fast gleich. Es würde sich also hier, wie bei Flüssigkeiten, eine ganz bestimmte kritische Geschwindigkeit zeigen.

Der Ausdruck, den Reynolds für das Kriterium bei Flüssigkeiten aufstellte, hat auch hier überall denselben Wert. Bei Kurve 4—9 ist überall $\rho D U_m / \mu$ rund 2000. Die Kurven 10—16 nun zeigen die Kriterien bei noch weiteren und längeren Kapillaren. Der Durchmesser bei diesen Messungen war 2 mm. Die Länge variierte zwischen ~ 16 m und 1 m. Auch hier sind die Geschwindigkeiten wieder gleich, der Ausdruck $\rho D U_m / \mu$ hat wieder den Wert ~ 2000 .

Ich habe früher schon einige Werte und den Ausdruck $\rho D U_m / \mu$ angegeben, um zu zeigen, wie gut sich alle Werte der Zahl 2000 nähern.

Kurve 17 zeigt die Literkurve einer noch weiteren Kapillare vom Durchmesser 2,2 mm. Das Kriterium liegt hier bei ~ 25 cm H_2O (Druck). Noch weiter habe ich den Durchmesser wachsen lassen. Kurve 18 gilt für einen Durchmesser von 3,8 mm. Hier zeigt sich bei einem Druck von 7 mm H_2O noch kein Kriterium, der Wert des Reibungskoeffizienten ist zu groß, das Poiseuillesche Gesetz gilt nicht mehr. Es ist also auch in dem Wachsen des Durchmessers eine Grenze gesetzt.

Die Kurven 19—27 stellen die Versuchsergebnisse bei einer Kapillare von $\frac{4}{10}$ mm Durchmesser dar. Diese Kapillare war im Vergleich zu allen bisherigen am Einflüsse ganz wenig erweitert. Ich bringe sie erst hier am Schlusse, weil ich hier einige Messungen bei den höchsten, möglichen Drucken gemacht habe.

Die Kurven 19—21 zeigen die Kriterien in der Litermenge. Die Geschwindigkeiten stimmen nicht mit denen von Reynolds überein. Der Wert $\rho D U_m / \mu$ ist zu groß (3000 und größer). Es kommt dieses daher, daß das Einflußende wenig aufgeblasen war. Bisher haben wir die Kurven alle nur in der Gegend des Kriteriums betrachtet. Wie verhalten sich denn nun Liter- und η -Kurven, wenn wir hoch über das Kriterium mit dem Druck hinausgehen? In Kurve 4—6 sieht man schon, daß nach dem Kriterium mit steigendem Druck die Litermenge anfangs langsamer, später wieder schneller wächst. In Kurve 4 z. B. liegt das Kriterium bei ~ 14 Atm. Dann wächst die Litermenge nur langsam bis zu einem Drucke von ~ 20 Atm., um von hier ab wieder schneller und zwar geradlinig zu steigen. Analoges zeigt sich bei den Kurven 5 und 6, 8 und 9. Die Kurven 10—16 lassen erkennen, daß dieser Unterschied zwischen dem erst langsamen und dann schnelleren Steigen der Litermenge mit wachsendem Durchmesser schwächer wird. In Kurve 17 ist, weil der Durchmesser schon 2,2 mm ist, dieser Unterschied ganz verschwunden; die Literkurve biegt um und verläuft dann steiler, aber geradlinig. Um nun zu zeigen, daß auch bei ganz hohen Drucken, noch höher als 40 Atm., die Literkurve linear verläuft, sind die Kurven 22 und 23 gezeichnet, sie gehen bis zu einem Drucke von 180 Atm. Überdruck. Während nun oberhalb des Kriteriums die Literkurve als gerade Linie sich darstellt, verläuft die η -Kurve als direkte Kurve; die Kurven 27 und 28 stellen η für eine mittlere Kapillare ($\frac{4}{10}$ mm Durchmesser) dar bis zu einem Drucke von 180 Atm. Das Kriterium ist natürlich bei den Kurven, die bis zu solch hohen Drucken gehen, wegen des Maßstabes nicht angegeben.

Eine Diskussion der Vorgänge bei solch hohen Drucken wie hier (180 Atm.) ist zurzeit noch nicht möglich. Es seien daher diese ganz hohen Druckmessungen zunächst nur als orientierende Messungen mitgeteilt.

II.

Wir hatten bisher stets Glaskapillaren. Es fragt sich nun, wie verhalten sich die ganzen Vorgänge bei Metall? Zur Beantwortung dieser Fragen dienen die Kurven 29—33.

Kurve 29 zeigt das Kriterium für eine Eisenkapillare von $\frac{4}{10}$ mm Querschnitt und 1480 mm Länge. Es liegt der Knick bei einem Druck von ungefähr 400 mm Hg. Ein Vergleich mit den gleich dimensionierten Glaskapillaren beweist, daß das Kriterium bei Metall niedriger liegt als bei Glas. In Kurve 29 steigt die Literkurve nach dem Kriterium erst langsam, dann schneller. Dies stimmt mit den Vorgängen bei Glaskapillaren überein. In Kurve 30 sind die Litermengen für die Eisenkapillare bei hohen Drucken bis zu 33 Atm. aufgetragen. Ich wollte damit zeigen, daß, wie bei Glas, auch hier bei Metall die Literkurve geradlinig verläuft. In Kurve 31 ist zum Vergleich mit Eisen eine Kupferkapillare von denselben Dimensionen bei hohen Drucken untersucht. Man sieht, daß die Literkurven bis zu den höchsten Drucken fast zusammenfallen. Die geringe Differenz in der Durchflußmenge zwischen Kurve 30 und 31 mag vielleicht daher rühren, daß die Kupferkapillare ~ 2 cm länger war als diejenige aus Eisen. Immerhin laufen die zwei Kurven ausgezeichnet parallel und man darf wohl den Schluß ziehen, daß die Art des Metalles ohne Einfluß ist. In 32 sehen wir die Literkurve einer Kapillare aus Kupfer mit einem Durchmesser von 1,95 mm und einer Länge von 1,380 m. Das Kriterium liegt bei 78 mm Wassersäulendruck; also auch tiefer als bei fast der gleichen Glaskapillare. Um nun auch noch eine ganz weite Metallröhre zu haben, ist Kurve 33 gezeichnet. Das Material dieser Kapillare war Messing, der Durchmesser 4 mm, die Länge 3,120 m. Hier ist, wie auch bei der fast gleichen Glaskapillare, gar kein Kriterium mehr vorhanden, der Durchmesser ist zu groß, das Poiseuillesche Gesetz gilt nicht. Vergleichen wir nun die kritische Geschwindigkeit bei den Metallkapillaren mit derjenigen bei Glasröhren.

Bei der Eisenkapillare von $\frac{4}{10}$ mm Durchmesser (Kurve 30 und 31) ist die kritische Geschwindigkeit 1646 cm/sec, der Ausdruck $\rho D U_m / \mu$ hat den Wert 439.

Für die Kupferkapillare von 1,95 mm Durchmesser (Kurve 32) ist die kritische Geschwindigkeit 380 cm/sec; der Ausdruck $\rho D U_m / \mu$ hat den Wert 494.

Es zeigt sich also, daß das Kriterium bei Metallkapillaren eher eintritt, also bei einem niedrigeren Drucke, als bei Glas-

röhren, daß aber der Ausdruck $\varrho D U_m / \mu$ bei Metallkapillaren unter sich ebenfalls ein Kriterium darstellt, nur mit einem anderen Zahlenwerte als bei Glas. Bei Glas hatten wir für das Kriterium

$$\frac{\varrho D U_m}{\mu} = \sim 2000;$$

für das Metall dürfen wir wohl angeben:

$$\frac{\varrho D U_m}{\mu} = \sim 400 - 500.$$

Worin kann denn nun der Grund liegen für dieses Verhalten der Metallröhren gegenüber den Glaskapillaren? Ich sehe die Ursache in der Beschaffenheit der inneren Wandfläche der Metallkapillaren. Es ist aus technischen Gründen unmöglich, enge Metallkapillaren mit derselben glatten inneren Wand herzustellen wie z. B. Glaskapillaren.

III.

Die bisher verwendeten Glaskapillaren waren am Einflußende nicht aufgeblasen. Es muß jedoch die Frage aufgeworfen werden: Ist die Gestalt des Einflußendes der Kapillare ohne Einfluß? Ist es gleich für die Durchflußmenge, für das Kriterium, ob die Kapillare konisch aufgeblasen ist oder nicht?

Die Kurven 34 und 37 sollen uns dies näher erläutern. Es sind verschiedene Durchmesser und verschiedene Längen untersucht. Kurve 34 zeigt eine Kapillare von 0,153 mm Durchmesser und 1,350 m Länge in nicht aufgeblasenem und aufgeblasenem Zustande. Ist die Kapillare nicht aufgeblasen, so liegt das Kriterium bei fast 13 Atm., ist sie konisch aufgeblasen, so tritt es erst bei $\sim 16,5$ Atm. ein. Durch das Aufblasen wird also das Kriterium in die Höhe gedrückt. Man sieht ferner, daß unterhalb des Kriteriums die zwei Literkurven zusammenfallen, oberhalb desselben nicht, die aufgeblasene Röhre hat das größere Durchflußquantum. Was nun die kritische Geschwindigkeit anbelangt, so ist bei der nicht aufgeblasenen Kapillare $U_m = 225$ m. Der Ausdruck $\varrho D U_m / \mu$ wird 2250.

Bei der aufgeblasenen Kapillare ist $U_m = 333$ m 70 cm, $\rho D U_m / \mu = 3337$. Es scheint also die Reynoldssche Formel nur dann zu gelten, wenn die Kapillare nicht aufgeblasen ist. Kurve 36 zeigt dasselbe für eine Kapillare von 0,317 mm Durchmesser. Kurve 35 bringt die Unterschiede für eine noch weitere Kapillare. Der Durchmesser bei Kurve 35 ist 2 mm, die Länge 1 m. Hier liegen die 2 Kriterien schon ganz nahe beisammen. Die kritische Geschwindigkeit bei der nicht aufgeblasenen Kapillare ist $U_m = 15,85$ m. Der Ausdruck $\rho D U_m / \mu = 2113$. Die kritische Geschwindigkeit bei der aufgeblasenen Kapillare ist 21,21 m, $\rho D U_m / \mu = 2694$. Man sieht, daß das Reynoldssche Kriterium genauer für die nicht aufgeblasene gilt. Jedoch ist der Unterschied schon kleiner als bei der früher untersuchten ganz engen Röhre. Bei der Kapillare vom Durchmesser 0,153 mm war der Unterschied $\rho D U_m / \mu$ für aufgeblasen und nicht aufgeblasen ~ 1000 , hier bei 2 mm Durchmesser ist er nur ~ 500 . Kurve 37, wo der Durchmesser zwar auch 2 mm ist, die Länge aber 10 m beträgt, läßt überhaupt keinen Unterschied zwischen einer aufgeblasenen und nicht aufgeblasenen Kapillare mehr erkennen. Man sieht also, daß der Einfluß der Form des Einflußendes um so größer ist, je enger die Kapillare, und daß bei ganz langen und weiten Röhren überhaupt kein Einfluß der Gestalt sich mehr geltend macht. Wie könnten wir diesen Vorgang uns nun wohl deuten? Ich erkläre mir diese Erscheinung, indem ich Strahlbildung an der scharfen Ecke, der scharfen inneren Peripherie des Einflußendes annehme.

Aus der am Schlusse von § 4 aufgestellten Tabelle ergibt sich, daß die Werte von $\rho D U_m / \mu$, sofern sie vom Werte 2000 erheblich abweichen, sämtlich größer als dieser Wert sind. Hieraus folgt, daß der dem Poiseuilleschen Gesetz folgende Bewegungszustand auch dann noch unter Umständen erhalten wird, wenn die kritische Grenze bereits überschritten ist. Besonders tritt dies ein, wenn die Einstromungsöffnung allmählich sich erweitert. Dann können, wie besonders die Kurven 34 und 35 zeigen, sehr erhebliche Überschreitungen der Grenze stattfinden, die dann wohl als labile Zustände aufzufassen sind. Aber auch die Länge der Röhre ist von Einfluß auf diese Verhältnisse. Je länger die Röhre ist, um

so mehr nähert sich die kritische Grenze dem Reynoldsschen Wert. Bei kurzen Röhren findet eine erhebliche Überschreitung des Reynoldsschen Wertes statt. Die Turbulenz bedarf, wie es scheint, einer gewissen Länge, um schon bei dem Reynoldsschen Wert der Strömung die Bewegung zu beeinflussen.

IV.

Die noch folgenden Kurven 38—40 zeigen uns den Temperaturverlauf längs der Kapillare. Kurve 38 zeigt die Untersuchungen für einen Durchmesser von 2 mm und eine Länge von 1,220 m; jedoch sind die Drucke verschieden. Man erkennt, daß die Temperatur längs der ganzen Kapillare konstant bleibt bis fast zum Ausflußende. Hier beginnt infolge der Expansion eine allmähliche Abkühlung. Die Abkühlung ist natürlich um so heftiger, je höher der Druck ist. Immerhin ist sie nicht sehr groß, sie beträgt ungefähr 6 Grad im Maximum der Abkühlung. Kurve 39 zeigt die Temperaturegebnisse für eine etwas engere Kapillare von $\frac{9}{10}$ mm Durchmesser. Es ergibt auch hier dasselbe wie in 38. Kurve 40 gilt nun für eine abermals noch engere Kapillare; der Durchmesser beträgt $\frac{5}{10}$ mm. Jedoch Länge und Druck sind verschieden. Längs der Kapillare fallen hier fast sämtliche Kurven zusammen, d. h. die Temperatur ist überall ohne Sprung. Am Ende natürlich müssen die Abkühlungen bei großem Durchmesser bzw. hohem Druck größer sein als bei kleinem Durchmesser, bzw. kleinem Druck.

Aus den ganzen Betrachtungen folgt, daß nirgendwo längs der Kapillare Unstetigkeiten in der Temperatur auftreten. Es scheint sich demnach das Gas wie ein Ganzes durch die Kapillare hindurch zu bewegen, ohne große Dichteänderungen, ähnlich wie eine Flüssigkeit.

V. Abschnitt.

Zusammenfassung der Resultate.

1. Bei Versuchen mit Strömungen der Luft durch enge Röhren hat sich ergeben, daß der kritische Wert von Reynolds auch hier maßgebend ist für den Beginn turbulenter Strömung.

Die zahlenmäßige Übereinstimmung ist in vielen Fällen auffallend gut. Abweichungen haben sich immer nach einer Richtung gezeigt, so daß in diesen Fällen die Turbulenz erst bei stärkerer Strömung eintritt.

2. Die Abweichungen werden vorzugsweise durch zwei Umstände veranlaßt:

a) Geringere Röhrenlänge,

b) Allmähliche Erweiterung der Einströmungsöffnung.

3. Metallkapillaren geben für den kritischen Wert erheblich kleinere Werte als der Reynoldsschen Zahl entspricht. Wodurch diese auffallende Abweichung bedingt ist, bedarf näherer Untersuchung.

4. Die Temperaturmessung mit Hilfe von Thermoelementen, die in der Kapillare verschiebbar angebracht waren, ergab das hauptsächlichste Temperaturgefälle in der Nähe der Ausflußmündung. Es muß daher auf das wesentliche Druckgefälle und der hauptsächlichste Widerstand in der Nähe des Röhrenendes liegen.

Zum Schluß habe ich die angenehme Pflicht zu erfüllen, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Geheimrat Dr. Wien, für die Anregung zu der Arbeit und für das Interesse, das er derselben in freundlichster Weise stets entgegenbrachte, meinen innigsten Dank auszusprechen.

(Eingegangen 4. März 1908.)