8. *Permeabilitätsmessung an Stahlkugeln;* *von R. H. Weber.*

Die Kugelgestalt ist zu allen Messungen der Magnetisierung wegen der beträchtlichen Entmagnetisierung sehr ungeeignet. C. Fromme¹⁾ hat im Jahre 1874 die „Magnetisierungsfunktion“

$$p = \frac{\kappa}{1 + \frac{4}{3}\pi\kappa}$$

an Kugeln auf magnetometrische Weise bestimmt, und Riecke hat darauf hingewiesen, daß diese Funktion mit zunehmendem κ eine Konstante wird. Seitdem sind meines Wissens ähnliche Messungen an Kugeln nicht ausgeführt worden.

Vor anderen Körpern bietet die Kugel den Vorteil, daß sie mit großer Exaktheit hergestellt und in ihren Dimensionen reproduziert werden kann. Da ich die Permeabilität von Stahl, der mir nur in Kugelgestalt gegeben war, bestimmen mußte, so habe ich versucht, durch geeignete Schaltungen bei einer ballistischen Methode möglichste Genauigkeit bei Permeabilitätsmessungen an Kugeln zu erzielen.

Daß das möglich ist, liegt einmal an den genannten Eigenschaften der Kugel, dann an der Möglichkeit, Windungszahlen mit großer Genauigkeit um ganze Vielfache zu vermehren oder zu vermindern.

Es sei mir gestattet, die Resultate, zu denen ich gekommen bin, hier bekannt zu machen, da ähnliche Messungen vielleicht auch anderweitig vorkommen können.

1) C. Fromme, Pogg. Ann. 152. p. 627. 1874.

Theoretisches über die Methode.

Bedeutet D ein homogenes Magnetfeld, in das wir die Kugel von der Permeabilität μ hineinbringen, so wird im Innern der Kugel ein homogenes Magnetfeld M entstehen, das die Größe hat:

$$(1) \quad M = \frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0} D \quad 1)$$

und die Induktion wird:

$$(2) \quad B = \mu M = \frac{3\mu_0\mu}{\mu + 2\mu_0} D.$$

Meßbar ist uns nur B und D , aber nicht M , und aus dem Verhältnis $B:D$ berechnet sich nach 2 die Permeabilität.

Dieses Verhältnis nähert sich aber mit zunehmendem μ dem Grenzwert 3, von dem es bei dem Werte $\mu = 20$ ($\mu_0 = 1$), der dem härtesten Stahl etwa zukommen mag, schon sehr wenig abweicht. Es wird also eine außerordentlich sorgfältige Messung erforderlich sein, um die Abweichungen dieses Verhältnisses von der Zahl 3 zu konstatieren.

Wir wollen uns nun zunächst die nächstliegende ballistische Methode zur Ausführung der Messung der Permeabilität einer Stahlkugel ausgeführt denken.

Äquatorial um die Kugel legen wir n Windungen. Diese n Windungen mögen so wenig Raum einnehmen, daß sie trotz der Kugelgestalt ihrer Unterlage alle als von gleichem Durchmesser angesehen werden mögen. Bei unserer Messung war $n = 14$ (Spirale S_1).

Um eine Zylinderfläche aus nicht ferromagnetischem Material ($\mu_0 = 1$) (angewandt wurde eine Hartgummirolle), die einen identischen Durchmesser hat, wie die Kugel, legen wir ebenfalls n Windungen (Spirale S_0). Wir schalten diese in einen Schließungskreis mit S_1 und einen ballistischen Galvanometer G .

Nun führen wir einmal die Kugel mit der Spirale S_1 in eine Primärrolle P ein von hinreichender Länge und genügen-

1) Vgl. E. Cohn, Das elektromagnetische Feld p. 110. 114.

der Windungszahl, um in ihr ein homogenes Feld durch einen Primärstrom zu erhalten. Die Achsen von S und P sollen parallel sein. Der Primärstrom sei immer wieder in identischer Größe herstellbar. Beim Erregen, Unterbrechen oder Kommutieren dieses Stromes erhalten wir einen Ausschlag des Galvanometers, der proportional mit B ist:

$$s_1 = c \cdot B.$$

Führen wir zweitens die Spirale S_0 statt S_1 in P ein, und verfahren ebenso wie vorher, dann erhalten wir einen Ausschlag des Galvanometers

$$s_0 = c \cdot D.$$

Nehmen wir nun $\mu_0 = 1$ an, so folgt nach (2):

$$\frac{s_1}{s_0} = \frac{3\mu}{\mu + 2}$$

und daraus

$$(3) \quad \mu = \frac{2 \cdot s_1}{3 s_0 - s_1}.$$

$3 s_0 - s_1$ wird mit zunehmendem μ immer kleiner gegenüber s_0 und s_1 . Fehler bei der Messung von s_0 und s_1 werden also mit sehr großem Gewicht in die Rechnung eingehen.

Wesentlich sicherer wird die Messung dadurch, daß man die im Nenner stehende Größe direkt mißt. Das geschieht dadurch, daß man erstens die Anzahl der Windungen auf S_0 verdreifacht, also $3n$ Windungen auflegt. Der hierdurch hervorgerufene Ausschlag wird also dann gleich $3s_0$ sein.

Außerdem nehmen wir zwei Primärrollen P_1 , P_0 , die möglichst identisch ausgeführt, weit genug voneinander aufgestellt (bez. mit zueinander senkrechten Achsen), um sich nicht gegenseitig zu stören, und vom gleichen Strom durchflossen sind, gleichzeitig in Betrieb. S_1 und S_0 werden so geschaltet, daß sie entgegengesetzte Ströme liefern. Der Ausschlag, den wir so erhalten, ist

$$(4) \quad \sigma_0 = 3 s_0 - s_1.$$

Den Ausschlag s_1 bekommen wir, wenn wir S_0 aus P_0 heraus-

nehmen, aber in dem Stromkreis eingeschaltet lassen. Wir machen dann den einzigen Fehler, der aber sicherlich ungefährlich ist, daß wir die Rückwirkung von S_0 auf P_0 durch wechselseitige Induktion auch mit ausschalten. Experimentell läßt sich die Bedeutungslosigkeit dieses Fehlers leicht zeigen, wenn wir S_0 in eine dritte, in sich kurzgeschlossene Spirale P einführen.

Es ergibt sich aber jetzt eine weitere Schwierigkeit dadurch, daß die Ausschläge s_1 und σ_0 von verschiedener Größenordnung sind, was die Ausnutzung der Galvanometerempfindlichkeit erschwert. Dem kann dadurch abgeholfen werden, daß man die Spirale S_1 unterteilt, indem man sie etwa in $n/2 + 1$ und $n/2 - 1$ Windungen zerlegt, die man gegeneinander und hintereinander schaltet. Zur Messung von σ_0 lassen wir sie hintereinander geschaltet. Zur Bestimmung von s_1 schalten wir sie gegeneinander. Dann wirken induktiv nur 2 statt n Windungen, und wir erhalten einen Ausschlag:

$$\sigma_1 = \frac{2}{n} s_1.$$

$$(5) \quad s_1 = \frac{n}{2} \sigma_1.$$

Es wird also jetzt aus (3), (4) und (5):

$$(6) \quad \mu = \frac{n \cdot \sigma_1}{\sigma_0}.$$

Wir haben also n so zu wählen, daß σ_1 und σ_0 von gleicher Größenordnung werden, also muß n von der Größenordnung von μ sein.

Fehlerquellen und Korrekturen.

Bei den später auszuführenden Messungen ergibt sich μ etwa von der Größe 36. Diese Zahl wollen wir bei der Beurteilung der Fehler zugrunde legen, ebenso die übrigen Konstanten der angewandten Anordnung. Die Größe μ mag zunächst, da sie nur zu Korrektionsgliedern gebraucht wird, durch angenäherte Messung gewonnen sein.

Da

$$\mu = \frac{2 s_1}{\sigma_0},$$

also $s_1 = 18 \cdot \sigma_0$ und

$$\sigma_0 = 3 s_0 - s_1$$

ist, so folgt, ein Fehler im Werte s_1 von δ Proz. geht in σ_0 , und damit in μ mit dem Betrag $18 \cdot \delta$ Proz. ein, wenn er nicht durch einen gleichzeitigen Fehler von σ_0 kompensiert wird. Es steht uns aber frei, wenn die Rolle S_0 gleichmäßig zylindrisch gearbeitet ist, den Wert σ_0 als normal zugrunde zu legen, und alle Fehler auf s_1 abzuschieben.

1. Ungleichheit der Felder in P_1 und P_0 lassen sich dadurch konstatieren, daß man P_1 und P_2 bez. S_1 und S_2 vertauscht, und beide Male σ_0 bestimmt. Ganz geringe Abweichungen geben schon beträchtliche Abweichungen von σ_0 vor dem Vertauschen und σ'_0 nach demselben. Ist in P_0 das Feld D , in P_1 $D(1 + \delta)$, so wird

$$s_0 = c D,$$

$$s_1 = c(1 + \delta) B,$$

nach dem Vertauschen

$$s'_0 = c \cdot (1 + \delta) D,$$

$$s'_1 = c \cdot B,$$

$$\frac{B}{D} = \frac{s_1 + s'_1}{s_0 + s'_0}$$

und daraus folgt, durch Anwendung von Gleichung (2),

$$\mu = \frac{s_1 + s'_1}{3(s_0 + s'_0) - (s_1 + s'_1)} = \frac{s_1 + s'_1}{\sigma_0 + \sigma'_0};$$

wir können den Fehler, der in einer Ungleichheit der Felder P_1 und P_0 beruht, durch Mittelwertbildung eliminieren, und zwar korrekt, nicht nur angenähert.

2. Der Abstand, den die Achse des auf die Kugel gewickelten Drahtes von der Kugeloberfläche besitzt, bedingt einen Fehler, der aber klein ausfällt, weil das Feld in der

Nähe des Kugeläquators sehr vermindert ist, infolge des geringen magnetischen Widerstandes der Kugel. Der Ausschlag s_1 wird dadurch zu groß, daß die ringförmige Fläche zwischen Kugelumfang und Drahtachse von Kraftlinien durchsetzt wird. Die Kugel wird durchsetzt von

$$h = \frac{3\mu}{\mu + 2} D \cdot a^2 \pi^1)$$

Kraftlinien. Die genannte Ringfläche von

$$K' = \left\{ -\frac{\mu - 1}{\mu + 1} D \left(\frac{a^3}{r^3} - 3 \frac{a^3}{r^3} \frac{x^2}{r^2} \right) + D \right\} \cdot 2 a \delta \pi^1),$$

worin a den Kugelradius, δ den genannten Achsenabstand bedeutet. Das zweite Glied in der Klammer () können wir von vornherein vernachlässigen, da x gegen r stets klein ist. Und es wird die Kraftlinienzahl

$$D \left(1 - \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \frac{a^3}{r^3} \right) \cdot 2 a \delta \pi,$$

In unserer Ausführung ist

$$a = 20,288 \text{ mm}, \quad \delta = 0,098$$

also

$$r = 20,386,$$

$$\left(1 - \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \frac{a^3}{r^3} \right) = 0,092,$$

$$\left(1 - \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \cdot \frac{a^3}{r^3} \right) \cdot 2 \delta = 0,0180,$$

$$K' = 0,0180 \cdot a \pi D,$$

während

$$K = 56,5 \cdot a \pi D$$

ist. Also haben wir an s_1 eine Korrektion von

$$-0,032 \text{ Proz.}$$

auszuführen. Im Zähler ist das zu vernachlässigen. Im Nenner, also an σ_0 angebracht, macht es, wie bereits erwähnt,

1) Vgl. E. Cohn, l. c. p. 114, Formel (82).

den 18fachen Betrag, und zwar mit umgekehrtem Vorzeichen. Es ist also σ_0 zu ersetzen durch:

$$\sigma_0(1 + 0,0058).$$

3. Wenn der Kugeldurchmesser nicht genau den gleichen Durchmesser hat wie die Achse des auf die Hartgummirolle S_0 aufgewickelten Drahtes, so wird ein Fehler gemacht, der der Abweichung der umspannten Flächen voneinander proportional ist. Die Kugel und die Hartgummirolle lassen sich mit Sorgfalt sehr exakt herstellen. Es betrug bei unserem Beispiel der Kugelradius

$$20,288 \text{ mm},$$

der der Hartgummispule, gemessen zwischen den Achsen eben aufgewickelten Drahtes

$$20,281 \text{ mm},$$

das bedingt einen Fehler von 0,035 Proz. des Radius, also von 0,070 Proz. der Windungsfläche. Wir brauchen also hier wieder s_1 im Zähler nicht zu korrigieren, σ_0 dagegen muß um + 1,26 Proz. korrigiert werden. Wir haben also jetzt insgesamt σ_0 zu ersetzen durch

$$\sigma_0(1 + 0,017).$$

4. Wegen der Kugelgestalt umfassen die äußeren der n Windungen von S_1 nicht alle Kraftlinien. Es ist dies in unserem Falle der bedenklichste Fehler, wie wir sehen werden.

Nennen wir λ den Abstand der Achse einer Windung vom Äquator, r ihren Abstand vom Kugelmittelpunkt, so ist ihre „geographische Breite“

$$\varphi = \frac{\lambda}{r}.$$

Die Drahtachse umfaßt dann die Fläche $r^2 \pi \cdot \cos^2 \varphi$ statt der Fläche $r^2 \pi$, also eine um

$$r^2 \pi \sin^2 \varphi \sim r^2 \pi \varphi^2$$

zu kleine Fläche. $\varphi^2 \cdot 100$ gibt uns also direkt den Fehler in

Prozenten. Da wir $n/2$ Windungen auf jeder Seite des Äquators haben, so ist der gesamte Fehler

$$\frac{\sum \lambda/r^2}{n/2} \cdot 100 \text{ Proz.}$$

Die Breite aller Windungen zusammen genommen war, obwohl nach der Drahtdicke weniger zu erwarten wäre, 1,8 mm, von äußerster bis äußerster Drahtachse gemessen. Es ist also λ im Maximum 0,9 mm. Zwischen 0 und 0,9 cm liegen 13 halbe Drahtdicken, jede gleich 0,9/13 mm. Die Achsen liegen somit bei

$$\frac{0,9}{13}, \quad 3 \cdot \frac{0,9}{13}, \quad 5 \cdot \frac{0,9}{13} \dots \quad 13 \cdot \frac{0,9}{13}$$

und es wird unser Fehler:

$$\frac{1}{r^2} \frac{0,9^2}{13^2} \cdot (1 + 3^2 + 5^2 + \dots + 13^2) \cdot \frac{100}{7} \text{ Proz.,}$$

worin $2r = 20,386$ ist.

Das macht eine Korrektion an s_1 von +0,293 Proz., also an σ_0 eine Korrektion von -5,3 Proz. Wir haben also im ganzen σ_0 zu ersetzen durch

$$(7) \quad \sigma_0(1 - 0,036)$$

und an s_1 etwa eine Korrektion von +0,2 Proz. anzubringen.

Ausführung der Messungen.

Die Primärrollen P_0 und P_1 waren 12 cm lang, 32 mm im Durchmesser, hatten 290 Windungen eines 0,35 mm dicken Cu-Drahtes und einen Widerstand von je etwa 5 Ohm. Sie waren parallel geschaltet und die eine durch einen Vorschaltwiderstand abgeglichen, so daß σ_0 nahezu gleich σ_0' war. In dem Stromkreis lagen außerdem noch 2 Ohm Vorschaltwiderstand, eine Wippe und zwei hintereinander geschaltete Akkumulatoren.

Die Stahlkugel bestand aus Remystahl¹⁾, war sorgfältig

1) Aus der Fabrik von H. Remy in Hagen. Ich habe diesen Stahl wegen seiner starken Magnetisierbarkeit öfters verwendet.

abgedreht und gehärtet. Der Durchmesser am Äquator wurde als das Mittel von zehn verschiedenen Messungen bestimmt, die im Maximum um etwa 1 Promille voneinander abwichen. Der Mittelwert betrug 20,288 mm. Das Aufwickeln der n Windungen S_1 gelingt, wenn man die Kugel mit einem dünnen Wachstüberzug bedeckt, der von kaum meßbarer Dichte sein kann. Die Windungen wurden dann der Haltbarkeit wegen lackiert und die Zuleitungen — vier an Zahl, wegen der Unterteilung — umeinander gewunden, um keine Induktion in ihnen zu erhalten.

Die Spule S_0 war auf eine Hartgummirolle aufgewickelt, die durch Abschleifen auf feinem Schmirgelpapier auf ihre definitive Dicke gebracht wurde. Diese war so gewählt, daß die Achse des aufgewickelten Drahtes einen Kreis von gleichem Durchmesser bildete wie die Kugel. Auch hier ist es nicht schwer, die Durchmesser nach den verschiedensten Richtungen hin bis auf 1 Promille übereinstimmend zu bekommen. Das Mittel aus 20 Messungen betrug

20,165 mm

ohne Umwicklung und

20,397

mit Umwicklung, so daß als Durchmesser der Drahtachse

20,281

gesetzt werden kann.

Der aufgewickelte Draht hat einen Durchmesser von 0,05 mm blank. Er wurde mir in liebenswürdiger Weise von der Firma Hartmann & Braun zur Verfügung gestellt.

Die Windungszahl von S_0 betrug 42, die von S_1 $6+8=14$. Die Widerstände waren 19,2 und 8,0 Ohm.

Die Spulen S_0 und S_1 waren hintereinander (gegeneinander) geschaltet in einen Kreis mit einem Du Bois-Rubensschen Galvanometer, das bei einem inneren Widerstand von 20 Ohm eine Empfindlichkeit von $7 \cdot 10^{-9}$ Amp. besaß. Das ist in Anbetracht des geringen inneren Widerstandes ziemlich empfindlich. Mehr ist jedenfalls in Heidelberg auch bei nächtlichem Arbeiten nicht zu erreichen. Es zeigte sich hierbei immer eine ganz langsame Schwankung der Ruhelage um

etwa 1 Skt., was bei der Größenordnung der Ausschläge schon wesentlich in Betracht kommt. Ich möchte diese Schwankungen dem Dreileitersystem der hiesigen Zentrale zuschreiben. Bei Tage zu arbeiten ist gänzlich ausgeschlossen, da die am Hause vorbeifahrende elektrische Straßenbahn Ausschläge verursacht, die die größten in den Messungen vorkommenden Ausschläge weit überschreiten.

Die folgende Tab. 1 enthält die Ausschläge σ_0 , σ_1 , σ_0 , wie sie sich bei aufeinanderfolgenden Messungen ergaben. Die Tab. 2 enthält die entsprechenden Werte nach Vertauschung der Primärrollen P_1 , P_0 gegenüber den Sekundärspulen S_1 , S_0 .

Tabelle 1.

σ_0	σ_1	σ_0
18,7	50,0	18,2
18,2	49,4	18,2
18,2	49,9	18,8
18,2	49,2	19,0
18,7	50,2	18,9
18,3	50,0	18,9
Mittel: 18,4	49,8	18,7

Tabelle 2.

σ_0'	σ_1'	σ_0'
18,8	49,4	19,2
18,9	49,7	19,9
18,6	49,8	19,2
19,1	49,3	19,3
18,9	49,7	19,2
19,0	49,2	19,5
Mittel: 18,9	49,5	19,4

Die einzelnen Ablesungen weichen also im Maximum um etwa 2 Proz. vom Mittelwert ab. Ein Fehler von 1 Proz. dürfte also beim Mittelwert wohl kaum zu befürchten sein.

Es ergibt sich aus den Messungen nach Formel (6) und (7)

$$\mu = 14 \cdot \frac{49,65}{18,8 \cdot (1 - 0,036)} = 38,44$$

als Permeabilität des gehärteten Remystahles.

Das in der Kugel vorhandene Magnetfeld beträgt nach Berechnung etwa $1\frac{1}{4}$ Gauss. Man mißt also mit sehr geringen Feldänderungen.

Eine weit größere Genauigkeit läßt sich an störungsfreien Orten und bei Anwendung größerer Kugeln erreichen. Es ist nicht ausgeschlossen, daß man sogar Eisenkugeln wird verwenden können.

Heidelberg, Physik. Institut, im August 1905.

(Eingegangen 6. September 1905.)