XXIX. Erklärung der isochromatischen Farben, welche einaxige parallel mit der Axe geschnittene Krystalle in homogenem polarisirten Lichte zeigen; vom Dr. Johann Müller in Darmstadt.

Die Grundsätze der Vibrationstheorie sind in dem Folgenden als bekannt vorausgesetzt; um sie gründlich kennen zu lernen, ist nichts mehr zu empfehlen, als Fresnel's Schriften über diesen Gegenstand zu studiren ¹⁾. Der englische Physiker Airy hat, gestützt auf eben diese Grundsätze, die Erscheinungen, welche einaxige senkrecht auf die Axe geschnittene Krystalle im polarisirten Lichte zeigen, berechnet, und auch die Erscheinung erklärt, welche dadurch hervorgebracht wird, daß man ein sogenanntes Fresnel'sches Glasparallelipiped mit einem solchen Krystalle verbindet ²⁾. Auch die eigenthümlichen

1) Besonders in der Abhandlung über die Doppelbrechung in diesen Annalen, Bd. XXIII S. 372 und 494, und die über die Diffraction, Annal. Bd. XXX S. 100.

2) Bringt man zwischen zwei gekreuzte Turmalinplatten einen einaxigen senkrecht auf die Axe geschnittenen Krystall und ein Fresnel'sches Glasparallelipiped, dessen Reflexionsebene einen Winkel von 45° mit den Polarisationssebenen der Turmaline macht (es ist einerlei, ob vor oder hinter dem Krystall), so wird man die Erscheinung sehen, welche Airy in seiner Abhandlung (übersetzt in Poggendorff's Annalen, Bd. XXIII S. 211 und 226) beschrieben und erklärt hat. Es ist zu verwundern, daß er nicht seine Rechnung auch auf den Fall ausgedehnt hat, daß zwei solcher Parallelipede mit dem Krystall combinirt werden. Bringt man nämlich vor und hinter dem Krystall ein solches Parallelipiped in die eben erwähnte Lage, so sieht man sehr schöne, vollkommen ununterbrochene runde Ringe, und in der Mitte nach Umständen einen hellen oder dunkeln Fleck. (Vergl. Ann. XXVI S. 143.) Ich habe diesen Fall berechnet, und ebenfalls ein vollkommen genügendes Resultat gefunden.

Erscheinungen der sogenannten Circularpolarisation in Quarzplatten hat er mit Hülfe einiger von ihm selbst aufgestellten Hypothesen über Circularvibrationen im Quarz berechnet, und seine Resultate zeigen eine überraschende Uebereinstimmung mit der Erfahrung.

In dem Folgenden will ich nun versuchen, nach Fresnel's Principien die Curven zu berechnen, welche man in einaxigen *parallel* mit der Axe geschnittenen Krystallen beobachtet, wenn man sie zwischen zwei Turmalinplatten bringt und nach einem homogenen Lichte sieht.

Entwicklung eines allgemeinen Ausdrucks für die Intensität eines Lichtstrahls, welcher durch zwei Turmalinplatten und eine dazwischen liegende Platte eines doppelt brechenden Krystalls gegangen ist.

Trifft ein polarisirter Strahl, dessen Richtung in c , Fig. 6 Taf. I, und dessen Schwingungsebene in acb projectirt seyn mag, eine doppeltbrechende Krystallplatte, so theilt er sich in zwei ebenfalls polarisirte Strahlen, deren Schwingungsebenen, die in gcd und ecf projectirt seyn mögen, einen rechten Winkel mit einander machen. Nehmen wir nun an, daß der Hauptschnitt des Krystalls für den einfallenden Strahl in gcd projectirt sey, so ist derjenige der beiden Strahlen, dessen Schwingungsebene ecf ist, der ordentliche, der andere hingegen der außerordentliche Strahl ¹).

Ist J die absolute Geschwindigkeit der Vibrationen des ursprünglichen Strahls, d. h. die Geschwindigkeit, mit welcher ein schwingendes Aethermolecül des einfallenden Strahls durch die Lage des Gleichgewichts geht, so ist $J \cos \nu$ die absolute Geschwindigkeit der Vibrationen im außerordentlichen, $J \sin \nu$ die absolute Geschwindigkeit derselben im ordentlichen Strahl, wenn ν den Winkel

1) Bekanntlich macht die Schwingungsebene eines polarisirten Strahls mit seiner Polarisationsebene einen rechten Winkel.

gcb bezeichnet, welchen der Hauptschnitt mit der Schwingungsebene des einfallenden Strahls macht.

Es sey, Fig. 7 Taf. I, $ABCD$ der Durchschnitt der Krystallplatte mit der Einfallsebene des Strahls ab , der sich durch die doppelte Brechung in die Strahlen bc und bd theilt ¹⁾, so werden diese nach ce und df , parallel mit ab austreten, vorausgesetzt, daß die Austrittsfläche CD parallel mit der Eintrittsfläche AB ist. Lassen wir nun aber umgekehrt zwei parallele in einer Ebene schwingende Strahlen in eben diesen Richtungen ec und fd an der Fläche CD eintreten, so ist klar, daß jeder in zwei Strahlen gebrochen wird, und zwar so, daß in b ein ordentlicher und ein außerordentlicher Strahl zusammentreffen, welche ursprünglich verschiedenen Strahlen angehörten, nun aber nach einer und derselben Richtung ba austreten. Die beiden in b zusammentreffenden Strahlen haben aber im Krystall verschiedene Wege zurückgelegt, und die Wellenlängen sind auf beiden Wegen auch ungleich; folglich liegen zwischen dem gemeinschaftlichen Ursprung beider Strahlen und dem Punkte b auf dem Wege des ordentlichen Strahls eine bestimmte Anzahl (ϑ) Wellenlängen mehr oder weniger, als auf dem Wege des außerordentlichen.

Bezeichnen wir durch

$$J \cos \nu \sin 2\pi g$$

die Geschwindigkeit, mit welcher ein in b gelegenes Aethermolecül zu einer bestimmten Zeit durch den außerordentlichen Strahl afficirt wird, so ist:

$$J \sin \nu \sin 2\pi(g \pm \vartheta)$$

die Geschwindigkeit, welche ihm gleichzeitig der ordentliche Strahl mittheilt.

Obgleich nun diese Strahlen von b an nach derselben Richtung ba geben, so können sie doch nicht inter-

1) Im Allgemeinen liegt nur der ordentliche Strahl mit dem Einfallslothe und dem einfallenden Strahl in einer Ebene.

feriren, weil ihre Schwingungsebenen einen rechten Winkel mit einander machen.

Zerlegen wir aber die Vibrationen der austretenden Strahlen durch eine Turmalinplatte, deren Schwingungsebene lch , Fig. 6 Taf. I, seyn mag, welche einen Winkel ν' mit dem Hauptschnitt des Krystalls macht, so können nun die beiden Strahlen interferiren. Wenn die Geschwindigkeit, welche der außerordentliche Strahl einem in der Richtung ba liegenden Molecül zu irgend einer Zeit mittheilt, reducirt auf die Schwingungsebene des zweiten Turmalins

$$J \cos \nu \cos \nu' \sin 2\pi g$$

ist, so ist die durch den ordentlichen Strahl in derselben Ebene dem Molecül gleichzeitig mitgetheilte Geschwindigkeit:

$$J \sin \nu \sin \nu' \sin 2\pi(g \pm \vartheta).$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher das Molecül nun wirklich afficirt seyn wird, ist demnach:

$$J[\cos \nu \cos \nu' + \sin \nu \sin \nu' \sin 2\pi g(g \pm \vartheta)] \dots (1)$$

wenn die Schwingungsebene des zweiten Turmalins innerhalb des Winkels gce fällt, hingegen:

$$J[\cos \nu \cos \nu' \sin 2\pi g - \sin \nu \sin \nu' \sin 2\pi(g \pm \vartheta)]$$

oder, was dasselbe ist:

$$J[\cos \nu \cos \nu' \sin 2\pi g + \sin \nu \sin \nu' \sin 2\pi(g + \vartheta + \frac{1}{2})] \dots (2)$$

wenn sie innerhalb des Winkels gcf fällt. Es ist zu bemerken, daß man in (1) nur $\vartheta + \frac{1}{2}$ für ϑ zu setzen braucht, um (2) zu erhalten.

Der Ausdruck bei (1) läßt sich verwandeln in:

$$J[(\cos \nu \cos \nu' + \sin \nu \sin \nu' \cos 2\pi \vartheta) \sin 2\pi g + \sin \nu \sin \nu' \sin 2\pi \vartheta \cos 2\pi g],$$

woraus sich für die Intensität S des resultirenden Strahls ergibt:

$$S = J^2 [(\cos \nu \cos \nu' + \sin \nu \sin \nu' \cos 2\pi \vartheta)^2 + \sin^2 \nu \sin^2 \nu' \sin^2 2\pi \vartheta^2],$$

oder:

$$S = J^2 [\cos(\nu - \nu')^2 - \frac{1}{2} \sin 2\nu \sin 2\nu' (1 + \cos 2\pi \vartheta)] \dots (3)$$

Diese Formel giebt uns allgemein die Intensität eines jeden Lichtstrahls, welcher durch zwei Turmaline und eine zwischen beiden liegende doppelt brechende Krystallplatte gegangen ist, wenn wir nur ν , ν' und ϑ gehörig bestimmen. ν und ν' sind immer unmittelbar gegeben, ϑ aber hängt von der Natur des doppeltbrechenden Krystalls, von der Richtung seiner Oberflächen gegen die Axen der doppelten Brechung und von der Richtung des einfallenden Strahls ab, und erst wenn dies alles bestimmt ist, kann man ϑ berechnen. Wir wollen jetzt zur Bestimmung von ϑ für den Fall übergehen, daß der zu betrachtende Krystall nur Eine optische Axe hat, und daß er parallel mit dieser Axe geschnitten ist.

Berechnung von ϑ für einaxige parallel mit der Axe
geschnittene Krystalle.

Das Umdrehungsellipsoid, dessen Gleichung ist:

$$A^2 x^2 + B^2 y^2 + A^2 z^2 = A^2 B^2 \dots\dots (4)$$

stellt nach Fresnel's Theorie die Wellenoberfläche des außerordentlichen Strahls in einem einaxigen Krystall dar, dessen optische Axe mit der Axe der y zusammenfällt. Vermittelst dieser Wellenoberfläche läßt sich nun nach der bekannten, schon von Huyghens angegebenen Construction die Richtung des außerordentlichen Strahls nach der Brechung bestimmen, wenn die Neigung der brechenden Oberfläche gegen die optische Axe und die Richtung des einfallenden Strahls bekannt ist. Die Gleichung der mit der Axe parallelen Oberfläche sey:

$$z=0.$$

Wenn die Linie, in welcher der einfallende Strahl auf den Krystall trifft, einen Winkel i mit der Axe der z , und ihre Projection auf die Ebene, die xy einen Winkel α mit der Axe der x macht, so sind ihre Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} y &= \tan \alpha \cdot x \\ z &= \frac{\cotang i}{\cos \alpha} \cdot x \end{aligned} \right\}$$

Um nun die Richtung des Strahls nach der Brechung zu construiren, muß man mit der Richtung des Strahls, welche durch ab , Fig. 8 Taf. I, dargestellt werden mag, während AB den Durchschnitt der Ebene der xy mit der Ebene der Figur bezeichnet, eine andere cd parallel ziehen, und zwar so, daß wenn man von b ein Perpendikel auf sie fällt, der Fußpunkt e desselben um die Länge einer Welle in der Luft von d entfernt ist. Setzen wir die Wellenlänge gleich 1, so ist $ed=1$, $bd=\frac{1}{\sin i}$.

Durch den Punkt d nun hat man eine Linie so zu legen, daß sie in der Ebene der xy liegt und senkrecht auf cd steht. Man findet leicht, daß die Gleichungen dieser Linie:

$$\left. \begin{aligned} z &= 0 \\ y + \cotang \alpha \cdot x &= \frac{1}{\sin \alpha \cdot \sin i} \end{aligned} \right\} \dots \dots (5)$$

sind. Legt man nun durch diese Linie eine Berührungsebene an das Ellipsoid, so giebt bekanntlich der von dem Mittelpunkt desselben nach dem Berührungspunkt gezogene Radius vector die Richtung des gebrochenen Strahls an, die Länge desselben aber die Wellenlänge eines in dieser Richtung durch den Krystall gehenden Strahls.

Die Gleichungen einer durch den Punkt

$$z=0, x=0, y=\frac{1}{\sin i \sin \alpha}$$

der Linie bei (5) gehenden Ebene ist:

$$z + \gamma x + \beta \left(\gamma - \frac{1}{\sin i \sin \alpha} \right) = 0 \dots \dots (6)$$

Sei diese Ebene das Ellipsoid berühren, so muß der erste Differentialquotient von z in Beziehung auf x aus (4) gleich dem entsprechenden Differentialquotienten aus (6) seyn. Dasselbe muß auch für die in Beziehung auf

y genommenen Differentialquotienten von z stattfinden.
Gleichung (4) giebt:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{B^2 y}{A^2 x}$$

Gleichung (6) giebt:

$$\frac{dz}{dx} = -\gamma, \quad \frac{dz}{dy} = -\beta,$$

es muß also nach obiger Bedingung:

$$\gamma = \frac{x}{z}$$

$$\beta = \frac{B^2 y}{A^2 z}$$

seyn. Substituirt man nun diese Werthe in (6), multiplicirt alsdann die ganze Gleichung mit $A^2 z$ und zieht die Gleichung (4) von ihr ab, so bleibt:

$$\frac{y}{\sin \alpha \sin i} = A^2$$

oder:

$$y = A^2 \sin i \sin \alpha \dots \dots \dots (7)$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene, welche die Berührungspunkte des Ellipsoids mit sämmtlichen durch den erwähnten Punkt an dasselbe gelegten Berührungsebenen enthält. Die Gleichung einer Ebene, welche auf dieselbe

Weise dem Punkte $z=0, y=0, x=\frac{1}{\sin i \cos \alpha}$ der Linie bei (6) entspricht, ist:

$$x = B^2 \sin i \cos \alpha \dots \dots \dots (8)$$

Eine durch die Linie bei (5) an das Ellipsoid gelegte Berührungsebene muß aber das Ellipsoid in einem Punkte berühren, welcher den Ebenen (7) und (8) gemeinschaftlich ist; durch Combination der Gleichungen (4), (7) und (8) müssen sich also die Coordinaten des Berührungspunktes bestimmen lassen. Die Gleichungen (7) und (8) geben unmittelbar die Werthe von x und y ; substituirt man sie in (4) und bringt z auf eine Seite, so kommt

DER PHYSIK UND CHEMIE.

BAND XXXIII.

$$z^2 = B^2 [1 - \sin^2 i (B^2 \cos^2 \alpha + A^2 \sin^2 \alpha)].$$

Es läßt sich nun leicht die Länge λ des erwähnten Radius vector bestimmen, es ist nämlich:

$$\lambda^2 = x^2 + y^2 + z^2 = B^2 + A^2 \sin^2 i \sin^2 \alpha (A^2 - B^2) \dots (9)$$

Die Gleichungen der Linie, mit welcher dieser Radius vector zusammenfällt, sind:

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{1 - \sin^2 i (B^2 \cos^2 \alpha + A^2 \sin^2 \alpha)}}{B \sin i \cos \alpha} x \\ y &= \frac{A^2 \tan \alpha}{B^2} x \end{aligned} \right\}$$

Ist der Krystall mit parallelen Ebenen begrenzt, so ist die Gleichung der Austrittsfläche:

$$z = T,$$

wenn T die Dicke der Krystallplatte bezeichnet. Diese Ebene wird von dem in Rede stehenden Strahl in einem Punkte getroffen, dessen Coordinaten sind:

$$\left. \begin{aligned} z &= T \\ x &= \frac{T B^2 \sin i \cos \alpha}{B \sqrt{1 - (A^2 \sin^2 \alpha + B^2 \cos^2 \alpha) \sin^2 i}} \\ y &= \frac{T A^2 \sin i \sin \alpha}{B \sqrt{1 - (A^2 \sin^2 \alpha + B^2 \cos^2 \alpha) \sin^2 i}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Das Quadrat der Entfernung D des Eintrittspunktes vom Austrittspunkt erhält man, wenn man die Werthe von x , y und z bei (10) quadriert und addirt, und aus der Summe die Wurzel zieht. Dividirt man den gefundenen Werth von D durch den aus (9) gezogenen Werth von λ , so erhält man die Anzahl der Wellenlängen, welche auf dem Wege des außerordentlichen Strahls innerhalb des Krystalls liegen; man erhält:

$$\frac{D}{\lambda} = \frac{T}{B \sqrt{1 - (A^2 \sin^2 \alpha + B^2 \cos^2 \alpha) \sin^2 i}} \dots (11)$$

Die Coordinaten des Punktes, in welchem der zu dem bisher betrachteten Strahl gehörige ordentliche die Aus-

trittsfläche trifft, erhält man, wenn man in (10) $B=A$ setzt; es kommt alsdann:

$$\left. \begin{aligned} z &= T \\ x &= \frac{AT \sin i \cos \alpha}{\sqrt{1 - A^2 \sin^2 i}} \\ y &= \frac{AT \sin i \sin \alpha}{\sqrt{1 - A^2 \sin^2 i}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

Setzen wir auch in (11) $B=A$, so erhält man die Anzahl der Wellenlängen, welche auf dem Wege des ordentlichen Strahls innerhalb des Krystalls liegen, sie ist:

$$\frac{D'}{\lambda'} = \frac{T}{A \sqrt{1 - A^2 \sin^2 i}} \dots \dots (13)$$

Ist der Krystall, von dem es sich handelt, negativ, so ist bc , Fig. 7 Taf. I, der ordentliche, bd der außerordentliche Strahl, mithin bezeichnet (11) die Anzahl der Wellenlängen, welche zwischen b und d , (13) die Anzahl der Wellenlängen, welche zwischen b und c liegen; bei positiven Krystallen ist es gerade umgekehrt, indem bei diesen bc der außerordentliche, bd aber der ordentliche Strahl ist; wir wollen vor der Hand annehmen, daß wir mit einem negativen Krystall zu thun haben, daß also $A < B$.

Es ist klar, daß wenn fd und ec , Fig. 7 Taf. I, die beiden parallel in den Krystall eintretenden Strahlen sind, von denen oben gesprochen wurde, zwei Aethermoleküle, welche sich in solchen Punkten dieser Strahlen befinden, welche man durch eine senkrecht auf beiden Strahlen stehende Linie sich verbunden denken kann, wie z. B. d und g , sich immer in gleichen Schwingungszuständen befinden. Von den Punkten d und g an laufen die Strahlen db und gcb nicht mehr parallel, und haben auf ihren Wegen auch nicht mehr gleiche Wellenlängen. Die Größe ϕ aber findet man nun leicht, wenn man die Anzahl der Wellenlängen, welche zwischen b und d liegen, von der auf dem Wege gcb liegenden abzieht.

Da nun die Anzahl der Wellenlängen zwischen b

und d , und zwischen c und b bekannt ist, so fehlt zur Bestimmung von ϑ weiter nichts mehr als die zwischen g und c liegende Anzahl von Wellenlängen, die wir jetzt bestimmen wollen.

Legt man durch d eine Ebene, welche senkrecht auf dem einfallenden Strahl steht, so trifft diese den Strahl cc im Punkte g , dessen Coordinaten sich leicht ermitteln lassen; sind diese bekannt, so kann man vermittlest ihrer die Entfernung P der Punkte c und g von einander bestimmen, da ja auch die Coordinaten des Punktes c bekannt sind, man findet:

$$P = T \sin^2 i \left\{ \frac{A}{\sqrt{[1 - A^2 \sin^2 i]}} - \frac{A^2 \sin^2 \alpha + B^2 \cos^2 \alpha}{B \sqrt{[1 - (A^2 \sin^2 \alpha + B^2 \cos^2 \alpha) \sin^2 i]}} \right\}$$

welches auch der zwischen c und g liegenden Anzahl von Wellenlängen gleich ist, da wir die Wellenlänge für die Luft gleich 1 gesetzt haben, und demnach ist:

$$\vartheta = P + \frac{D'}{\lambda} - \frac{D}{\lambda} \\ = T \left\{ \frac{B-A}{AB} + \frac{3 \sin^2 i}{2B} (AB - A^2 \sin^2 \alpha - B^2 \cos^2 \alpha) \right\}$$

wenn man nämlich den Ausdruck von ϑ nach Potenzen von $\sin i$ entwickelt und bei der zweiten stehen bleibt. Dieser Werth läßt sich auch so ausdrücken:

$$\vartheta = T \left\{ \frac{B-A}{AB} - \frac{3 \sin^2 i}{2B} (B-A) [B - (A+B) \sin^2 \alpha] \right\} \quad (14)$$

Für positive Krystalle, für welche $B < A$ ändert dieser Werth das Zeichen, ausserdem bleibt es unverändert.

Construction der isochromatischen Curven.

In dem Falle, welchen wir bisher betrachtet haben, liegt die Axe des Krystalls parallel mit den beiden Flächen, durch welche die zu untersuchenden Strahlen ein- und austreten, daraus folgt aber, dafs, welche auch die Richtung des einfallenden Strahls seyn mag, die Rich-

tung des Hauptschnitts immer parallel mit gcd , Fig. 6 Taf. I, bleibt, dafs also in unserem Fall ν und ν' constante Gröfsen sind.

Setzen wir $\nu=\nu'=0$, oder $\nu=\nu'=90^\circ$, so giebt die Formel bei (3):

$$S=J^2,$$

was auch ϑ für einen Werth haben mag, d. h. wenn die Schwingungsebenen der beiden Turmaline parallel sind, und die Axe des Krystalls parallel mit denselben liegt oder senkrecht auf ihnen steht, so ist die Intensität aller durchgehenden Strahlen gleich der Intensität der einfallenden (wenn man freilich den Verlust an Intensität durch die Färbung der Turmaline und die theilweise Reflexion an den Ein- und Austrittsflächen nicht in Anschlag bringt).

Ist aber $\nu=0$ und $\nu'=90^\circ$, oder $\nu=90^\circ$ und $\nu'=0$, so erhalten wir aus (3):

$$S=0,$$

d. h. wenn die Schwingungsebenen der Turmaline gekreuzt sind und die optische Axe des Krystalls mit einer derselben parallel ist, so geht gar kein Licht durch.

Lassen wir nun $\nu=\nu'=45^\circ$ seyn, so giebt uns (3):

$$S=J^2 \left[1 - \frac{1}{2} (1 + \cos 2\pi\vartheta) \right]$$

oder:

$$S=\frac{J^2}{2} [1 - \cos 2\pi\vartheta] \dots\dots\dots (15)$$

Hier sieht man nun leicht ein, dafs wenn ϑ ein Vielfaches von 1 ist, $S=0$, hingegen wenn ϑ ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ ist $S=J^2$ seyn wird; für alle zwischenliegende Werthe von ϑ bekommt man auch Werthe welche zwischen J^2 und 0 fallen. Da aber nun bei ein und demselben Werthe von T , also bei einer und derselben Krystallplatte, der Werth von ϑ sich durch Veränderung von i und α ändert, welche die Richtung der aus dem Krystall in's Auge kommenden Strahlen bestimmen, so sind offenbar die Strahlen, welche von verschiedenen

Stellen des Krystalls in's Auge kommen, auch verschiedenen intensiv.

Wir wollen jetzt den Zusammenhang, welcher zwischen den gleich hellen (isochromatischen) Stellen stattfindet, näher betrachten, d. h. die Form der isochromatischen Curven bestimmen.

Denken wir uns von dem betrachtenden Auge ein Perpendikel auf die Oberfläche des Krystalls gefällt, und durch den Fußpunkt c , Fig. 9 Taf. I, desselben eine Linie de rechtwinklig auf die Axe pq des Krystalls gezogen (diese Linie fällt mit derjenigen zusammen, welche wir eben bei der Berechnung von ϑ für die Axe der x nahmen), so kann man sich von jedem Punkt g der Oberfläche des Krystalls eine Linie nach diesem Fußpunkt c gezogen denken, welche einen Winkel α mit de macht. (Es ist dieß derselbe Winkel den wir auch bisher mit α bezeichneten.) Die Länge der Linie cg ist der Tangente des Winkels i proportional, welchen eine von g nach dem Auge gezogene Linie mit dem Perpendikel macht, welches vom Auge auf den Krystall gefällt wird. Wenn der Winkel i nicht zu groß ist, so kann man auch ohne bedeutenden Fehler cg dem Sinus des Winkels i proportional setzen.

Setzt man nun den Werth von ϑ in (14) gleich einer constanten C , so enthält die Gleichung nur noch zwei veränderliche i und α , und wir können sie als die Polargleichung einer Curve betrachten, deren Radius vector $\sin i$ einen Winkel α mit der Axe der Polarcoordinaten de macht. Es läßt sich nun behaupten, daß alle Strahlen, welche von denjenigen Punkten der Oberfläche des Krystalls kommen, die in einer solchen Curve liegen, gleiche Intensität haben; denn da für alle diese Punkte $\vartheta = C$ ist, so muß auch der allen diesen Punkten entsprechende Werth von S in (15) constant seyn, da ϑ die einzige veränderliche Größe in diesem Werthe ist.

Um die Form der isochromatischen Curven zu bestimmen, haben wir also jetzt nur die Gleichung

$$T \left\{ \frac{B-A}{AB} - \frac{3}{2} \frac{\sin^2 i}{B} (B-A) [B - (A+B) \sin^2 \alpha] \right\} = C \quad (16)$$

zu discutiren. Diese Gleichung lässt sich verwandeln in:
 $T(B-A) - \frac{3}{2} A T \sin^2 i (B-A) [B - (A+B) \sin^2 \alpha] = ABC$

oder:

$$\sin^2 i = \frac{T(B-A) - ABC}{\frac{3}{2} A T (B-A) [B - (A+B) \sin^2 \alpha]} \dots (17)$$

oder:

$$\sin^2 i = \frac{M}{B - (A+B) \sin^2 \alpha} \dots \dots \dots (18)$$

wenn wir $\frac{T(B-A) - ABC}{\frac{3}{2} A T (B-A)} = M$ setzen. Die Gleichung (18) ist nun offenbar die Polargleichung einer Hyperbel, deren Axen sind:

$$\sqrt{\left\{ \frac{T(B-A) - ABC}{\frac{3}{2} A T (B-A)} \right\}} \sqrt{\frac{1}{B}}$$

und:

$$\sqrt{\left\{ \frac{T(B-A) - ABC}{\frac{3}{2} A T (B-A)} \right\}} \sqrt{\frac{1}{A}}$$

woraus denn folgt, dass der Sinus des Winkels, welchen die Asymptoten mit der Axe der Polarcoordinaten machen, ist:

$$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A+B}} \dots \dots \dots (19)$$

Es seyen, Fig. 9 Taf. I, *no* und *lm* diese Asymptoten. Aus dem Werthe des Sinus des Winkels *dcn* bei (19) folgt, dass dieser Winkel bei positiven Krystallen, für welche $B < A$, kleiner, für negative hingegen, für welche $B > A$, gröfser als 45° ist, so dass also der Winkel der

Asymptoten lcn für positive Krystalle kleiner, für negative Krystalle gröfser als 90° ist.

Der Winkel lcn ist nicht viel von einem rechten verschieden, da A und B nicht sehr von einander verschieden sind, und offenbar wird dieser Winkel sich um so mehr einem rechten nähern, je schwächer die doppelte Brechung des Krystalls ist, den man betrachtet. Für Kalkspath ist A ungefähr 0,6, B aber 0,67; für Kalkspath ist demnach:

$$\sin dcn = \frac{\sqrt{0,67}}{\sqrt{0,67 + 0,6}} = \frac{\sqrt{0,67}}{\sqrt{1,27}},$$

woraus sich für den Winkel lcn ungefähr 94° ergibt.

Für Bergkrystall ist $B=0,645$, $A=0,649$, es ist demnach hier der Winkel lcn ungefähr $89^\circ 56'$.

Die Gleichung (18) giebt, so lange M positiv ist, nur dann reelle Werthe für $\sin i$, wenn

$$\sin \alpha < \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B+A}}$$

ist, in diesem Fall aber ist sie die Gleichung einer Hyperbel, welche in den Asymptotenwinkel lcn und seinem Verticalwinkel liegt. Wenn M negative Werthe erhält, so ist (18) die Gleichung einer Hyperbel, welche zwischen dem Asymptotenwinkel ncm liegt, die hellen und dunkeln Ringe, welche man sieht, werden also ungefähr die in Fig. 9 Taf. I verzeichnete Gestalt haben.

Wenn M positiv seyn soll, so mufs bei negativen Krystallen:

$$C < \frac{T(B-A)}{AB},$$

wenn aber M negativ seyn soll, mufs:

$$C > \frac{T(B-A)}{AB}$$

seyn, d. h. in Worten ausgedrückt die Anzahl ϑ der Wellenlängen, um welche die Strahlen, derer Interferenz die im Winkel ncm gelegenen Hyperbeln bildet, differiren, ist

größer, die Anzahl der Wellenlängen aber, um welche die, die andern Hyperbeln bildenden Strahlen gegen einander zurückbleiben, ist kleiner als die Anzahl der Wellenlängen, um welche der ordentliche und außerordentliche perpendicular durch den Krystall gehende Strahl gegen einander zurückbleiben, denn für $i=0$ wird ja

$$\vartheta = \frac{T(B-A)}{AB}.$$

Wir haben oben gesehen, daß für positive Krystalle ϑ das Zeichen wechselt, mithin müssen wir in dem Ausdruck für M so wie sonst überall C mit entgegengesetztem Zeichen einführen; soll nun M einen positiven Werth haben, so muß der absolute Werth von

$$C < \frac{T(B-A)}{AB},$$

soll hingegen M negativ seyn, so muß auch

$$C > \frac{T(B-A)}{AB}$$

seyn. Es folgt daraus, daß das Zurückbleiben der Strahlen gegen einander, welche innerhalb des Winkels lcn austreten, weniger, das Zurückbleiben derjenigen aber, welche innerhalb des Winkels ncm austreten, mehr beträgt, als das gegenseitige Zurückbleiben der mitten durch den Krystall gehenden Strahlen.

Die Formel (3) bezieht sich, wie dort schon bemerkt wurde, nur auf den Fall, daß die Schwingungsebene des zweiten Turmalins innerhalb desjenigen durch die Schwingungsebenen des ordentlichen und außerordentlichen Strahls gebildeten Quadranten gce , Fig. 6 Taf. I, liegt, welcher die Schwingungsebene des ersten Turmalins einschließt. Alles, was wir bisher betrachtet haben, bezieht sich demnach auf den Fall, daß die Schwingungsebenen der beiden Turmaline parallel sind. Um unsere Formeln auf den Fall anzuwenden, daß sich die Turmaline kreuzen, haben wir nur ϑ mit $\vartheta + \frac{1}{2}$ zu vertauschen, wodurch in der Form der Ringe durchaus nichts

geändert wird; nur werden alle diejenigen Stellen, die vorher hell erschienen, dunkel seyn, und umgekehrt.

Bisher haben wir bloß die Gestalt der Ringe betrachtet, wir wollen nun zur Untersuchung ihrer Größe übergehen.

Setzen wir in dem Ausdruck für ϑ bei (14) $i=0$, so reducirt sich ϑ auf $\frac{T(B-A)}{AB}$, und dieser Werth in die Gleichung (15) gesetzt, giebt uns die Intensität des Strahls, welche von dem Mittelpunkt der Figur in unser Auge trifft. Geben wir nun α einen bestimmten Werth, z. B. setzen wir es $=0$ und lassen i wachsen, so ändert sich zugleich der Werth von S , und giebt uns nach und nach die Intensitäten aller Strahlen, welche von den auf der Linie dc auf einander folgenden Punkten herkommen. (Wenn α einen anderen Werth hat, so ist dadurch eine andere Linie bestimmt). Lassen wir nun so i von 0 an wachsen, so wird S größer oder kleiner, bis wir zu einem Werthe $S=J^2$ oder $S=0$ kommen. Solche hyperbolische Curven nun, für welche $S=J^2$ oder $S=0$ ist, können wir als die Mitte der hellen und dunkeln Curven überhaupt betrachten, und die Entfernung der Durchschnittspunkte zweier ganz dunkeln oder ganz hellen Curven mit der Linie cd als Breite der Ringe in dieser Richtung betrachten.

Es sey i_1 der Winkel, den ein von der Linie dc in's Auge kommender Strahl, welcher ganz dunkel seyn soll, mit dem vom Auge auf den Punkt c gefällten Perpendikel macht; läßt man nun $\sin i_1$ wachsen, um

$$\sqrt{\frac{2}{3T(B-A)} + \sin i_1^2} - \sin i_1 \dots (20)$$

so wächst dadurch ϑ um 1, und der Werth von S wird wieder derselbe seyn, der es für i_1 war, nämlich 0. (20) giebt uns demnach ein Maass für die Breite der Ringe. Die Breite der Ringe nimmt, wie aus (20) folgt, um so mehr ab, je weiter sie vom Mittelpunkte entfernt sind.

Wenn i nicht sehr groß ist, so ist der Ausdruck nicht sehr von $\sqrt{\frac{2}{3T(B-A)}}$ verschieden, woraus hervorgeht, daß die Breite der Ringe sich sehr nahe umgekehrt wie die Wurzeln aus den Dicken der Platten verhalte.

Der Ausdruck:

$$\sqrt{\frac{2}{3T(B-A)}} \dots \dots \dots (21)$$

kann überhaupt die Breite des innersten Ringes ohne bedeutenden Fehler darstellen. Will man diesen Ausdruck in Zahlen übersetzen, so muß man alle Größen auf einerlei Einheit reduciren. Die Einheit, in welcher A und B ausgedrückt ist, ist offenbar die Länge einer Lichtwelle in der Luft, und in dieser Einheit muß auch T ausgedrückt werden. Auf den Zoll gehen aber ungefähr 45000 Wellenlängen der mittleren Strahlen des Spectrums, ist also T in Zollen ausgedrückt, so hat man ihre Anzahl mit 45000 zu multipliciren und in (21) zu setzen, alsdann giebt uns (21) den Sinus des Gewichtswinkels, unter welchem uns der erste Ring erscheinen muß.

Haben wir z. B. eine Kalkspathplatte von 1" Dicke, so wird der Sinus des Gewichtswinkels t , unter welchem der innerste Ring erscheint, seyn:

$$\sin t = \sqrt{\frac{2}{3 \times 4500 \times 0,07}} = \sqrt{\frac{2}{21 \cdot 45}}$$

und also ungefähr:

$$t = 2^\circ 40'.$$

Für eine 1 Zoll dicke Bergkrystallplatte haben wir:

$$\sin t = \sqrt{\frac{2}{3 \times 45000 \times 0,001}} = \sqrt{\frac{2}{12 \cdot 45}},$$

woraus ungefähr folgt:

$$t = 3^\circ 30',$$

wie es sich auch bei Anstellung der Versuche bestätigt findet.

Einiges über die zur Bestätigung des Gesagten anzustellenden Versuche.

Wir haben bisher die Länge einer Lichtwelle in der Luft als eine beständige Gröfse betrachtet und sie sogar als Längeneinheit angenommen. Für verschiedenfarbige Strahlen aber ist bekanntlich die Wellenlänge in einem und demselben Mittel verschieden; alles, was bisher gesagt worden ist, bezieht sich demnach nur auf homogenes Licht. Die obigen Formeln zeigen, dafs die Breite der Ringe für eine und dieselbe Krystallplatte bei verschiedenen Farben verschieden ist; läfst man daher in unserem Falle weifses Licht einfallen, so fallen die Ringe der verschiedenen Farben, wenn der Kryetall nur einigermassen dick ist, so über einander, dafs aus ihrer Vermischung ein etwas unreines Weifs hervorgeht. (Herschel, über das Licht.) Sind die Blättchen dünn genug, so erscheinen sie bekanntlich lebhaft gefärbt; vermittelst des Ausdrucks (21) kann man sich aber leicht überzeugen, dafs alsdann die Breite der Ringe viel zu grofs ist, als dafs man nur einigermassen die Form derselben erkennen könnte, da das Gesichtsfeld nur einen zu kleinen Theil der Figur umfaßt. Um die Curven wirklich zu übersehen, bleibt also nichts übrig, als dickere Krystallplatten und homogenes Licht anzuwenden.

Das reinste homogene Licht kann man sich auf jeden Fall durch ein Prisma verschaffen, jedoch auch die Flamme des Weingeistes giebt ein sehr homogenes Gelb, namentlich wenn man etwas Kochsalz zusetzt, und deshalb eignet sich die Weingeistflamme sehr für unsere Versuche, die man aber im Dunkeln anstellen mufs, weil das Licht der Spirituslampe nur eine sehr geringe Intensität hat, die man durch künstliche Mittel, wie z. B. grofse Hohlspiegel, möglichst zu verstärken suchen mufs.

Um die hellen und dunkeln Curven in den Dimensionen zu sehen, wie sie aus den obigen Formeln folgen, braucht man nur den Krystall in die gehörige Lage

zwischen zwei Turmalinplatten zu bringen und nach einem homogenen Lichte zu sehen. Am besten eignen sich für diese Versuche solche cinaxige Krystalle, welche in sechsseitigen Säulen krystallisirt sind, wie Bergkrystall und zuweilen auch Kalkspath, weil die natürlichen Oberflächen schon parallel mit der Axe sind. Sehr schön übersieht man mehrere Ringe zugleich in einem solchen Stück Kalkspath von 2 bis 3 Linien Dicke; Bergkrystall muß schon eine ziemlich bedeutende Dicke haben, wenn man mehrere Curven zugleich übersehen will.

Wenn man die Krystalle erst schneiden und schleifen muß, so ist es durchaus nöthig, namentlich bei stärker doppelt brechenden Krystallen, die Oberflächen so genau als möglich parallel zu machen, weil sonst die ordentlichen und außerordentlichen Strahlen nicht mehr parallel austreten würden, und alsdann durchaus keine Interferenz mehr stattfinden kann.

In der schon oben angeführten Airy'schen Abhandlung ist ein Apparat beschrieben, vermittelst dessen man in Krystallen, in welchen die Ringe zu groß sind, um ganz übersehen zu werden, in einer sehr zusammengezogenen Gestalt erscheinen; dieser Apparat ist für diese Versuche sehr vortheilhaft anzuwenden, nur muß man homogenes Licht auf den Polarisationspiegel des Apparates fallen lassen.