2. Über die Gestalt und die Auflösung des fallenden Flüssigkeitsstrahles; von Robert Scheuermann.

(Bearbeitung der Gießener Dissertation.)

A. Einleitung.

Die Gestalt des Flüssigkeitsstrahles wurde bereits von Newton¹⁾ in seinen mathematischen Prinzipien zur Ableitung des Torricellischen Theorems benutzt und darin Katarakte genannt. Aber ihre Gleichung ist erst viel später von Weisbach²⁾ in seiner Experimentalhydraulik für einen unter Wirkung der Schwerkraft stehenden aus kreisförmiger Öffnung vertikal nach oben springenden Strahl berechnet worden. An einer anderen Stelle³⁾ berücksichtigt er bei ihrer Ableitung noch den Einfluß des Luftwiderstandes. Allein diese Gleichung wurde weder von ihm noch später von einem anderen Physiker einer genauen experimentellen Prüfung unterzogen. Die theoretischen Untersuchungen über die Ableitung der Strahlform aus den hydrodynamischen Grundgleichungen, die von Helmholtz, Kirchhoff, Lord Rayleigh u. a. für eine Anzahl besonderer Fälle ausgeführt wurden, haben mit der vorliegenden Arbeit nichts zu tun, da es sich dort um zweidimensionale Flüssigkeitsbewegungen handelt, die nicht unter dem Einfluß der Schwerkraft erfolgen.

Mehrmals ist die Gestalt des Wasserstrahles ausführlich beschrieben⁴⁾, einmal auch gemessen worden und zwar berichtet darüber Viktor von Lang⁵⁾ in einer Arbeit über Reibung zwischen Wasser und Luft. Allein er beschränkt sich darin bloß auf den Strahlteil in der Entfernung von 35–75 cm von der Ausflußöffnung und stellt dafür eine ganz empirisch gefundene Formel auf. In der vorliegenden Arbeit soll dagegen

1) Newton, Phil. nat. math. princ. S. 303. 1714.

2) Weisbach, Die Experimentalhydraulik. S. 51. 1855.

3) Weisbach, Ingenieur u. Maschinenmechanik. 1. S. 758. 1855.

4) Savart, Pogg. Ann. 33. S. 451. 1834; Magnus, Pogg. Ann. 95. S. 1. 1855; 106. S. 1. 1859.

5) von Lang, Wied. Ann. 3. S. 219. 1878.

hauptsächlich der Strahlteil unmittelbar an der Ausflußöffnung bis zu einem Abstand von ungefähr 9 cm von derselben betrachtet werden.

Da der senkrecht nach oben springende Strahl durch die nach seiner Auflösung wieder herabfallenden Tropfen erheblich gestört wird, eignet er sich nicht für die experimentelle Untersuchung der Strahlform. Viel bequemer dagegen ist die Ausmessung des vertikal nach unten fließenden Strahles, der in der Literatur kurz „der fallende Strahl“ genannt wird. Auf seine Untersuchung werde ich mich im folgenden daher beschränken.

B. Die Gestalt des fallenden Flüssigkeitsstrahles.

- a) Die Gleichung der unter Berücksichtigung der Schwerkraft abgeleiteten Meridiankurve des Strahles.

Ganz entsprechend der Weisbachschen Ableitung ergibt sich für die Meridiankurve des fallenden Strahles die Gleichung:

$$(1) \quad x = \frac{x_0}{\sqrt[4]{1 + \frac{2gy}{v_0^2}}},$$

in der v_0 die Anfangsgeschwindigkeit und x_0 den Radius der Ausflußöffnung bedeuten. (Für die Ableitung vgl. auch weiter unten unter b.) Sie läßt sich auch in der nach y aufgelösten Form:

$$(2) \quad y = \frac{v_0^2}{2g} \left[\left(\frac{x_0}{x} \right)^4 - 1 \right],$$

schreiben, und soll im folgenden kurz die „Weisbachsche Gleichung“ genannt werden.

Der Einfluß der Oberflächenspannung auf die Strahlform.

Die experimentellen Untersuchungen, auf die ich später ausführlich eingehen werde, zeigen, daß der wirkliche Strahlquerschnitt an allen Stellen größer ist, als der entsprechende, welchen man aus der Weisbachschen Formel erhält. Die Ursachen für diese Abweichungen sind sicherlich zum großen Teil in der Oberflächenspannung zu suchen, die ja bei der Weisbachschen Ableitung ganz vernachlässigt wird. Diese Annahme wird durch folgenden Versuch bestätigt: Setzt man die Oberflächenspannung dadurch herab, daß man die Strahloberfläche mit einer dünnen Ölschicht sich überziehen läßt,

oder indem man den Strahl durch eine mit Ätherdampf gesättigte Atmosphäre fließen läßt, so nimmt seine Dicke etwas ab, was man daran erkennt, daß der Strahl scheinbar etwas in die Öffnung hineingezogen wird.

Da nach dem Laplaceschen Gesetze der von der Krümmung einer Flüssigkeitsoberfläche herrührende Kohäsionsdruck:

$$(3) \quad p = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

ist, in der R_1 und R_2 der kleinste und größte Krümmungsradius und α die Kapillarkonstante bedeuten, sollen in folgendem Abschnitt zunächst die Krümmungsverhältnisse der Weibachschen Strahlform untersucht werden.

Die Krümmungsverhältnisse der Strahloberfläche.

Wir betrachten irgend einen Punkt der Strahloberfläche mit den Koordinaten x, y, z und denken uns durch ihn zwei senkrecht zueinander stehende ebene Schnitte gelegt. Der Einfachheit halber wählen wir einen Normalschnitt so, daß er aus der Strahloberfläche die Meridiankurve ausschneidet. Bezeichnet man dann die Krümmung im Punkte P dieses Normalschnittes mit $1/R_1$ und in dem senkrecht dazu stehenden Schnitt mit $1/R_2$, so beträgt die mittlere Krümmung h der Strahloberfläche im Punkte P :

$$h = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Was die Vorzeichenfestsetzung betrifft, soll der Teil der Flächennormalen, welcher von der Strahloberfläche aus betrachtet nach außen gerichtet ist, positiv gerechnet werden und entsprechend R positiv oder negativ sein, je nachdem der Krümmungsmittelpunkt des Normalschnittes auf der positiven oder negativen Seite der Flächennormalen liegt.

Für die Krümmung im Meridianschnitt erhält man:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{20 x_0^4 c^2 x^9}{(c^2 x^{10} + 16 x_0^8)^{5/2}},$$

worin der Abkürzung wegen

$$\frac{2g}{v_0^2} = c$$

gesetzt ist. Die Krümmung in dem dazu senkrecht stehenden Normalschnitt beträgt:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\sin \vartheta}{x},$$

worin

$$\tan \vartheta = \frac{dy}{dx}$$

ist, oder ausgerechnet:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{-4x_0^4}{x(c^2 x^{10} + 16x_0^8)^{3/2}}.$$

Die mittlere Krümmung im Punkte P ist folglich:

$$(4) \quad k = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{16x_0^4(c^2 x^{10} - 4x_0^8)}{x(c^2 x^{10} + 16x_0^8)^{3/2}}.$$

Hieraus ersieht man, daß das Vorzeichen für die mittlere Krümmung einzig und allein von dem Ausdruck $c^2 x^{10} - 4x_0^8$ abhängt. Sie wird für alle Werte von x , für die $c^2 x^{10} > 4x_0^8$ ist, positiv und entsprechend für $c^2 x^{10} < 4x_0^8$ negativ. Von besonderem Interesse ist die Lage derjenigen Stelle, für die die mittlere Krümmung Null ist. Dies ist für

$$x = \sqrt[5]{\frac{x_0^4 v_0^2}{g}}$$

der Fall. Der Abstand dieser Stelle von der Ausflußöffnung beträgt:

$$y = \frac{(g x_0)^{1/5} v_0^{2/5} - v_0^2}{2g}.$$

Diese Gleichung sagt aus, daß der Abstand der betrachteten Stelle von der Ausflußöffnung einerseits von der Größe derselben und andererseits von der Ausflußgeschwindigkeit abhängt. Für die Ausflußgeschwindigkeit $v_0 = \sqrt{g x_0}$ fällt diese Stelle auf den Rand der Ausflußöffnung und die Strahloberfläche hat dann überall für die mittlere Krümmung dasselbe Vorzeichen. Andererseits hat die betrachtete Stelle für die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v_0 = 0,3657 \sqrt{g x_0}$$

ihren größten Abstand von der Ausflußöffnung, nämlich:

$$y_{\max} = 0,2675 x_0.$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß die Stelle, an der die mittlere Krümmung der Strahloberfläche ihr Vorzeichen wechselt, sehr nahe an der Ausflußöffnung liegt und höchstens einen Abstand von ihr haben kann, der den 7,5. Teil des Öffnungsdurchmessers beträgt. Für denjenigen Teil der Strahloberfläche, der

zwischen der Ausflußöffnung und der zuletzt betrachteten Stelle von der mittleren Krümmung Null liegt, ist die mittlere Krümmung entsprechend der obigen Vorzeichenfestsetzung positiv, für den ganzen übrigen Teil negativ. Das würde bedeuten, daß in unmittelbarer Nähe der Ausflußöffnung der Kohäsionsdruck nach außen, jenseits der Stelle, wo die mittlere Krümmung Null ist, aber nach innen wirkt. Die Oberflächenspannung müßte also in dem Teil, wo der Kohäsionsdruck nach außen gerichtet ist, den Strahlquerschnitt vergrößern, im übrigen Strahlteile aber, da er dort nach innen wirkt, den Querschnitt verkleinern. Diese Überlegung stimmt aber nicht mit den tatsächlichen Verhältnissen überein, denn die experimentelle Untersuchung zeigt, daß der gemessene Strahlquerschnitt überall größer ist als der nach der Weisbachschen Gleichung berechnete. Das Fehlerhafte bei der letzten Betrachtung scheint mir darin zu liegen, daß das Problem gleichsam als ein statisches aufgefaßt wurde. Wir haben hier nämlich nicht untersucht, welchen Einfluß die Oberflächenspannung auf die Strahlform hat, sondern auf eine gleichsam ruhende Flüssigkeitsmasse, die die Gestalt eines unter der Wirkung der Schwerkraft ausfließenden Flüssigkeitsstrahles hat. Die Oberfläche bildet sich vielmehr fortwährend aus neuer Flüssigkeit. Jede aus der Ausflußöffnung austretende Flüssigkeitsmasse muß eine neue Oberfläche bilden, die sich, während sie den Strahl durchfließt, fortwährend in gesetzmäßiger Weise umbildet. Da die Oberflächenspannung aber jeder Oberflächenvergrößerung entgegen wirkt, kann eine solche nur auf Kosten der kinetischen Energie der Flüssigkeit erfolgen. Diese auf dem Energieprinzip beruhende Überlegung hat vor den Betrachtungen über die Krümmungsverhältnisse den Vorzug, daß sie zu einem verhältnismäßig einfachen Ansatz führt, der den wirklichen Verhältnissen näher kommt.

b) Ableitung der Gleichung für die Strahlform unter Berücksichtigung der Schwerkraft und der Oberflächenspannung.

Es kommt also im zweiten Ansatz darauf an, neben der Schwerkraft noch die Oberflächenspannung in die Formel einzuführen. Dies ermöglicht in einfachster Form folgende von Prof. Dr. König herrührende Überlegung. Nicht die gesamte Arbeit, welche die Schwerkraft leistet, findet ihr Äqui-

valent in dem Zuwachs der lebendigen Kraft der Flüssigkeitsteilchen, sondern ein Teil derselben wird den Kapillarkräften gegenüber zur Vergrößerung der Strahloberfläche verbraucht. Diesen Teil werde ich kurz die Kapillalarbeit nennen. Nach dem Energieprinzip besteht folgende Wortgleichung:

Schwerarbeit — Kapillalarbeit = Zuwachs der lebendigen Kraft.

Da die Kapillalarbeit gleich dem Produkt aus der Kapillarkonstanten α und der Oberflächenvergrößerung dO ist, so besteht folgende Gleichung:

$$(5) \quad mg \, dy = mv \, dv + \alpha \, dO,$$

in der y die Fallstrecke, m die Masse des Volums V und v die Geschwindigkeit bedeuten. Der weiteren Betrachtung lege ich einen ganz niederen Flüssigkeitszylinder von dem Radius x und der Höhe h zugrunde. Ist ferner σ die Dichte, so bestehen folgende Beziehungen:

$$V = \frac{m}{\sigma} \quad \text{und} \quad V = q \cdot h = \pi x^2 h.$$

Die Mantelfläche des Zylinders ist dann:

$$O = 2\pi x h = \frac{2V}{x} = \frac{2m}{\sigma x}$$

und somit die Oberflächenänderung:

$$dO = -\frac{2m}{\sigma x^2} dx.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung (5) dieser Ableitung ein, berücksichtigt noch die Kontinuitätsbedingung: $v \cdot q = v_0 q_0$ und läßt die y -Achse so mit der Zylinderachse zusammenfallen, daß ihre positive Richtung die Richtung der Flüssigkeitsbewegung angibt, dann erhält man:

$$mg \, dy = -\frac{m v_0^2 q_0^2 dq}{q^3} - \frac{2m \alpha dx}{\sigma x^2}.$$

Wenn man ferner q und q_0 durch x und x_0 ausdrückt und gleichzeitig einige Umformungen vornimmt, bekommt man folgende Differentialgleichung:

$$g \, dy = -\frac{2v_0^2 x_0^4 dx}{x^5} - \frac{2\alpha}{\sigma x^2} dx.$$

Das Integral dieser Differentialgleichung ist die Gleichung der Meridiankurve des Flüssigkeitsstrahles:

$$(6) \quad y = \frac{v_0^2}{2g} \left[\left(\frac{x_0}{x} \right)^4 - 1 \right] + \frac{2\alpha}{\sigma x_0 g} \left[\frac{x_0}{x} - 1 \right].$$

Ihre rechte Seite ist eine zweigliederige Summe, deren erstes Glied nichts weiter als die rechte Seite der Weisbachschen Gleichung (2) ist. Das zweite Glied ist im Gegensatz zum ersten von der Ausflußgeschwindigkeit völlig unabhängig und enthält neben der Schwerkbeschleunigung und dem Verhältnis x_0/x noch die Kapillarkonstante α und die Dichte σ . Für $\alpha = 0$ verschwindet dieses Glied und die Gleichung geht in die Weisbachsche Gleichung (2) über. Für einen bestimmten x -Wert erhält man die ihm nach dem zweiten Ansatz zugehörige Ordinate y_2 , indem man zu der nach der Weisbachschen Gleichung berechneten Ordinate y_1 noch das Glied

$$\frac{2\alpha}{\sigma x_0 g} \left(\frac{x_0}{x} - 1 \right),$$

hinzufügt, was die numerische Ausrechnung wesentlich vereinfacht. Aus dieser Betrachtung geht außerdem hervor, daß der aus dem Ansatz mit Berücksichtigung der Oberflächenspannung berechnete Strahlquerschnitt in der Tat größer ist als der nach der Weisbachschen Formel für denselben Abstand von der Ausflußöffnung sich ergebende Querschnitt.

Experimenteller Teil.

a) Versuchsbedingungen.

Bei der Ableitung der Meridiankurvengleichung wurde stillschweigend angenommen, daß die Flüssigkeitsbewegung stationär und die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen längs des ganzen Querschnittes der Ausflußöffnung der Größe und Richtung nach dieselbe sei. Die erste Voraussetzung läßt sich annähernd dadurch erfüllen, daß man ein weites Ausflußgefäß wählt, die zweite durch Anwendung eines Ausflußrohres von kreisförmigem Querschnitt. Die Geschwindigkeitsverteilung in der Ausflußöffnung und in dem oberen Strahlteil wurde mit Sonde und Manometer untersucht. Es zeigte sich, wie zu erwarten war, daß die Geschwindigkeit in der Mitte der Öffnung am größten und nach dem Rande zu zunächst allmählich, in nächster Nähe dagegen rasch abnimmt. Ähnlich ist die Verteilung im oberen Teil des freien Flüssigkeitsstrahles bis zu einem Abstand, der ungefähr dem Durchmesser der Ausflußöffnung gleichkommt, wo die Geschwindigkeitsunterschiede verschwinden. Wenn auch die Messungen mit der

Sonde keine völlig einwandfreien Resultate liefern, so geben sie doch annähernd ein Bild über die Geschwindigkeitsverteilung und im voraus einen Anhaltspunkt, wo eventuell größere Abweichungen zu erwarten sind.

b) Ausflußrohr und Ausflußgeschwindigkeit.

Als Ausflußröhren wurden Messingröhren von 15—30 cm Länge in drei verschiedenen Weiten, nämlich: 0,906, 1,114 und 1,578 cm benutzt. Der Rand der Ausflußöffnung wurde konisch von außen nach innen so abgedreht, daß die lichte Weite unverändert blieb und die Wandstärke höchstens 0,1—0,2 mm betrug.

Die Ausflußgeschwindigkeit wurde ausschließlich aus der Ausflußmenge M in der Zeiteinheit und dem Querschnitt Q der Ausflußöffnung nach der Beziehung:

$$v_m = M/Q$$

bestimmt.

c) Messung der Strahlform.

All die Schwierigkeiten, die die Messung am Strahle selbst mit sich bringt, konnten dadurch umgangen werden, daß die Ausmessung an seiner photographischen Momentaufnahme vorgenommen wurde. Um die Aufnahme (vgl. Fig. 1, S. 255) in genau derselben Größe, die der Strahl selbst hat, zu erhalten, wurde mit parallelem Licht ohne Kamera gearbeitet. Die Versuchsanordnung war folgende: ein Bündel Sonnenstrahlen fiel auf einen ebenen, silberbelegten Spiegel und wurde von da auf einen kleinen Projektionskopf geworfen und von diesem im Brennpunkte vereinigt. An dieser Stelle befand sich eine Blende mit feiner Öffnung und davor ein Momentverschluß. Ein zweiter Projektionskopf mit sehr großer Öffnung wurde so aufgestellt, daß sein Brennpunkt in die Blendenöffnung fiel. Die Strahlen mußten also, nachdem sie den zweiten Projektionskopf passiert hatten, untereinander parallel sein, was außerdem auf die üblichen Arten geprüft wurde. Bei späteren Versuchen wurde an Stelle der Blende eine Funkenstrecke aus Zinkelektroden gesetzt und die Aufnahme mit dem Funken einiger Leidener Flaschen beim Öffnen des Primärstromes eines Induktoriums gemacht. In dieses Parallelstrahlenbündel wurde dann der zu photographierende Flüssigkeitsstrahl und unmittelbar dahinter die photographische

Platte gebracht. Das Photogramm ist also das Schattenbild des Strahles auf der Platte. Daß die Strahlen parallel waren, konnte auch aus folgendem Vorversuch geschlossen werden. Ein kurzes Ausflußrohr, das vorher an verschiedenen Stellen gemessen worden war, wurde auf die angegebene Art aufgenommen. Die Ausmessungen seines Photogrammes stimmten, soweit die Genauigkeit des Kathetometers es zuließ, mit denjenigen des Originals vollständig überein. Daraus konnte ferner der für die folgenden Ausmessungen überaus wichtige Schluß gezogen werden, daß die beim Entwickeln und Fixieren der Platte eintretende Schichtverziehung nur sehr gering ist. Die Ausmessungen wurden mit dem Kathetometer ausgeführt, das anstatt des Fernrohres mit einem schwach vergrößernden Mikroskop versehen worden war.

Vergleich der Versuchsergebnisse mit den berechneten Werten.

In den folgenden Tabellen werde ich einige der Versuchsergebnisse wiedergeben, die auf die zuletzt angegebene Weise erhalten wurden. In der ersten Spalte steht der Abstand y von der Ausflußöffnung. Die zweite Spalte enthält den zu-

Tabelle 1.

Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 7,881$ cm/sec,
Radius der Ausflußöffnung $x_0 = 0,789$ cm.

Abstand v. d. Ausfluß- öffnung y (in cm)	Berechnet		gemessen x_2 (in cm)	Ab- weichung $x_2 - x_0$ (in cm)	Ab- weichung $x_2 - x_1$ (in cm)
	nach Weisbach x_0 (in cm)	u. Berücks. d. Oberfl. x_1 (in cm)			
0,0000	0,789	0,789	0,795	0,006	0,006
0,0168	0,709	0,750	0,763	0,054	0,013
0,0434	0,636	0,700	0,729	0,093	0,029
0,0775	0,579	0,650	0,688	0,109	0,038
0,1225	0,531	0,600	0,648	0,117	0,048
0,1846	0,488	0,550	0,599	0,111	0,049
0,2740	0,448	0,500	0,542	0,094	0,042
0,4100	0,408	0,450	0,489	0,081	0,039
0,6313	0,369	0,400	0,425	0,056	0,025
1,0226	0,328	0,350	0,363	0,035	0,013
1,7896	0,286	0,300	0,306	0,020	0,006
2,4645	0,265	0,275	0,277	0,012	0,002
3,5128	0,242	0,250	0,251	0,009	0,001
5,2230	0,220	0,225	0,226	0,006	0,001
8,1810	0,196	0,200	0,201	0,005	0,001

Tabelle 2.

Ausflußgeschwindigkeit $v_0 = 5,643$ cm/sec,
 Radius der Ausflußöffnung $x_0 = 0,572$ cm.

Abstand v. d. Ausfluß- öffnung y (in cm)	Berechnet		gemessen x_2 (in cm)	Ab- weichung $(x_2 - x_0)$ (in cm)	Ab- weichung $(x_2 - x_1)$ (in cm)
	nach Weißbach x_0 (in cm)	u. Berücks. d. Oberfl. x_1 (in cm)			
0,0000	0,572	0,572	0,577	0,005	0,005
0,0493	0,404	0,500	0,514	0,110	0,014
0,0972	0,352	0,450	0,471	0,119	0,021
0,1643	0,313	0,400	0,426	0,113	0,026
0,2657	0,280	0,350	0,374	0,094	0,024
0,4357	0,249	0,300	0,316	0,067	0,016
0,7659	0,217	0,250	0,255	0,038	0,005
1,0655	0,200	0,225	0,227	0,027	0,002
1,5567	0,182	0,200	0,202	0,020	0,002
2,4300	0,163	0,175	0,176	0,013	0,001
4,2317	0,142	0,150	0,151	0,009	0,001
6,4191	0,134	0,140	0,140	0,006	0,000

Tabelle 3.

Ausflußgeschwindigkeit $v_0 = 7,756$ cm/sec,
 Radius der Ausflußöffnung $x_0 = 0,453$ cm.

Abstand v. d. Ausfluß- öffnung y (in cm)	berechnet		gemessen x_2 (in cm)	Ab- weichung $(x_2 - x_0)$ (in cm)	Ab- weichung $(x_2 - x_1)$ (in cm)
	nach Weißbach x_0 (in cm)	u. Berücks. d. Oberfl. x_1 (in cm)			
0,0000	0,453	0,453	0,467	0,014	0,014
0,0636	0,342	0,400	0,418	0,076	0,018
0,1528	0,290	0,350	0,375	0,085	0,025
0,2976	0,250	0,300	0,312	0,062	0,012
0,5687	0,215	0,250	0,254	0,039	0,004
1,1950	0,179	0,200	0,201	0,022	0,001
1,8716	0,161	0,175	0,176	0,015	0,001
3,1881	0,142	0,150	0,150	0,008	0,000
4,6360	0,129	0,135	0,135	0,006	0,000
6,1258	0,120	0,125	0,125	0,005	0,000
7,1138	0,116	0,120	0,121	0,005	0,001

gehörigen nach der Weißbachschen Formel berechneten Radius x_0 des Strahles und die dritte den unter Berücksichtigung der Oberflächenspannung berechneten Radius x_1 . In der vierten Spalte dagegen steht der aus dem gemessenen Strahldurchmesser erhaltene Radius x_2 . Die letzten beiden

Kolumnen endlich enthalten die Abweichungen dieses Wertes von den berechneten Werten. Der bei der Berechnung von x_1 zugrunde gelegte Wert der Kapillarkonstanten α ist der aus den Methoden der Lamellenspannung und der Steighöhe gefundene Mittelwert für das benutzte destillierte Wasser. Er beträgt $\alpha = 73,89$ dyn/cm.

Die Tabellen zeigen, daß die unter Berücksichtigung der Oberflächenspannung berechneten x -Werte den gemessenen bedeutend näher kommen als die nach der Weisbachschen Formel gefundenen Werte. In einer Entfernung von der Ausflußöffnung, die etwas größer ist als der Durchmesser, stimmen jene Werte sehr gut mit den gemessenen Werten überein. Allein in nächster Nähe sind die Abweichungen von den gemessenen Werten sehr bedeutend. Die Ursachen, welche jene Abweichungen bedingen, sind im wesentlichen folgende:

Einmal wird der Strahlquerschnitt unmittelbar an der Ausflußöffnung infolge der Adhäsion der Flüssigkeit an der Rohrwand etwas vergrößert. Dieser von der Adhäsion herührende Fehler kann wohl durch das konische Abdrehen der Ausflußröhre verkleinert, nie aber, wie aus den vorstehenden Tabellen für $y = 0$ deutlich hervorgeht, völlig beseitigt werden. Die durch die Adhäsion bedingten Abweichungen betragen in den angeführten Beispielen für $y = 0$: 0,006; 0,005 cm und im dritten Fall, wo die Wandstärke weit größer war als in den beiden anderen Fällen, sogar 0,014 cm. Wohl ließe sich dieser Übelstand noch weiter dadurch abschwächen, daß man den Rand der Ausflußöffnung ein wenig einfettet. Weil aber dadurch die Strahloberfläche leicht verunreinigt und die Oberflächenspannung herabgesetzt wird, wurde bei den Versuchen davon Abstand genommen.

Ein weiterer Umstand, der mit als Ursache für diese Abweichungen angeführt werden muß, ist die ungleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung in der Ausflußöffnung selbst und in den Strahlquerschnitten in ihrer Nähe. Daß ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeitsverteilung und diesen Abweichungen besteht, geht schon daraus hervor, daß in einem Abstand von der Ausflußöffnung von der Größe ihres Durchmessers, wo mit Sonde und Manometer keine Ungleichmäßigkeit in der Geschwindigkeitsverteilung mehr festgestellt werden konnte, auch die Abweichungen kleiner werden.

Daß aber die eben angeführten Tatsachen zur Erklärung der beobachteten Abweichungen keineswegs ausreichen, ergibt sich daraus, daß auch bei kleinen Ausflußgeschwindigkeiten, wo die Geschwindigkeitsverteilung ziemlich gleichmäßig ist, trotzdem große Abweichungen eintraten. Zur vollständigen Erklärung dieser Erscheinung muß noch die Wirkung der Massenträgheit herangezogen werden. Die Flüssigkeitsteilchen, die sich in der Ausflußröhre parallel zueinander bewegen, suchen infolge ihrer lebendigen Kraft beim Austritt aus der Ausflußröhre ihre Bewegungsrichtung beizubehalten. Daher rühren zum großen Teil die beträchtlichen Abweichungen. Sie werden um so größer sein, je größer einerseits die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen und andererseits die Richtungsänderung ist, die sie beim Austritt aus der Röhre erfahren. Da aber bei großer Ausflußgeschwindigkeit selbst ein Flüssigkeitsteilchen, das nahe am Rande der Ausflußöffnung austritt, nur wenig seine Bewegungsrichtung zu ändern braucht, so wird trotz seiner großen lebendigen Kraft die durch seine Trägheit bedingte Abweichung nur klein sein. Die beobachteten Abweichungen werden also bei großen Ausflußgeschwindigkeiten größtenteils von der ungleichmäßigen Geschwindigkeitsverteilung herrühren. Betrachten wir dagegen ein entsprechendes Teilchen bei einem Strahl von sehr kleiner Ausflußgeschwindigkeit, so sehen wir, daß es seine Bewegungsrichtung um nahezu 90° ändern muß. Es ist daher klar, daß in diesem Falle selbst eine geringe lebendige Kraft der Flüssigkeitsteilchen genügt, um eine beträchtliche Vergrößerung des Strahlquerschnittes herbeizuführen. Wir haben also hier beim Ausfluß aus Röhren eine Erscheinung kennen gelernt, die geradezu das Gegenstück zur *Contractio venae* bildet, welche beim Ausfluß aus Öffnungen in dünnwandigen Gefäßen auftritt. Während in dem letzten Fall die von allen Seiten nach der Ausflußöffnung strömenden Flüssigkeitsteilchen je nach der Größe der lebendigen Kraft ihrer seitlichen, d. h. nach der Strahlachse gerichteten Bewegung eine mehr oder minder große Verkleinerung des Strahlquerschnittes bedingen, tritt beim Ausfluß aus Röhren infolge der gleichgerichteten Bewegung der Flüssigkeitsteilchen eine Querschnittsvergrößerung ein. Sie wird noch beträchtlich durch die Adhäsion an der Ausflußöffnung und die Oberflächenspannung der Flüssigkeiten vergrößert.

Vielleicht rührt auch ein Teil der Abweichungen von den größeren Werten der Kapillarkonstanten her, die Lenard¹⁾ bei frisch gebildeten Oberflächen an schwingenden Tropfen beobachtete. Es ist schade, daß die beträchtlichen Abweichungen in der Nähe der Ausflußöffnung es unmöglich machen, auf der Gestalt der Flüssigkeitsstrahlen eine Methode zur Bestimmung der Kapillarkonstanten zu gründen. Denn gerade auf diesem Wege war zu hoffen, der interessanten Frage nach dem Anfangswerte der Kapillarkonstanten und ihrer zeitlichen Abnahme auf den normalen Wert näher zu kommen.

Aber auch in größerer Entfernung von der Ausflußöffnung bestehen noch kleine Abweichungen, die wohl zum Teil von der inneren Reibung der Flüssigkeit herrühren. Auch dieser Strahlteil eignet sich zur Bestimmung der Kapillarkonstanten deswegen nicht, weil hier bereits Fehler von einem hundertstel Millimeter in der Messung des Strahldurchmessers ganz beträchtlich herausfallende Werte der Kapillarkonstanten hervorrufen.

C. Die Auflösung des Strahles in Tropfen.

In einer gewissen Entfernung, die von der Größe der Ausflußgeschwindigkeit und der Ausflußöffnung abhängt, ändert der Strahl plötzlich Gestalt und Aussehen. Während er in seinem oberen Teil vollständig klar und durchsichtig ist, ist er in dem unteren Teil trüb und unruhig. Anstatt daß sich sein Querschnitt immer mehr verkleinert, nimmt er hier periodisch zu und ab, bis sich der ganze Strahl in eine Reihe einzelner Tropfen auflöst. Durch die Methode der momentanen Beleuchtung hat Savart²⁾ und nach ihm Magnus³⁾ die Beschaffenheit dieses trüben Strahlteiles untersucht und festgestellt, daß er aus lauter einzelnen Tropfen besteht, die um ihre kugelförmige Gleichgewichtsgestalt Schwingungen ausführen. Den Grund für die Auflösung des Strahles sah man anfangs in der infolge der Schwerkraft mit der Entfernung von der Ausflußöffnung wachsenden Geschwindigkeit. Bei der Untersuchung des kontinuierlichen Strahlteiles bei momentaner Beleuchtung beob-

1) Lenard, Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. 1910. 18. Abh.

2) Savart, Ann. d. Chim. et de Phys. 53. S. 337, 1833; Pogg. Ann. 33. S. 451. 1834.

3) Magnus, Pogg. Ann. 95. S. 1. 1855; 106. S. 1. 1859.

achtete Savart auf dem unteren Teil desselben abwechselnd Anschwellungen und Einschnürungen. Diese Erscheinung zeigt auch die dieser Arbeit beigefügte photographische Momentaufnahme Nr. 3, auf die ich erst später ausführlich eingehen werde. Die Ursache, warum diese Anschwellungen das Zerfallen des Strahles bewirken, erkannte Plateau¹⁾ in der Oberflächenspannung. Seine experimentellen Ergebnisse wurden von Hagen²⁾ und später von Lord Rayleigh³⁾ auf theoretischem Wege bestätigt. In seiner Abhandlung: „On the Instability of Jets“ zeigte Lord Rayleigh in völliger Übereinstimmung mit Plateaus Versuchen, daß unter Wirkung der Oberflächenspannung jede wellenartige Anschwellung, deren Länge größer als der Strahlumfang ist, die Abschnürung eines Tropfens herbeiführt, und ferner, daß sie dem Zerfall des Strahles am günstigsten ist, wenn sie $4\frac{1}{2}$ mal so groß wie der Durchmesser des Strahles an der Zerfallsstelle ist.

Zunächst suchte man die Entstehungsursache dieser Anschwellungen auf dem Flüssigkeitsstrahle in der Wirkung der Schwerkraft, dann in den von außen kommenden Erschütterungen, die fortwährend das Ausflußgefäß treffen. Wie Savart gezeigt hat, können diese Erschütterungen auch durch das Auffallen der Tropfen, in die der Strahl zerfällt, selbst bedingt werden. Andere Forscher dagegen suchten in den mannigfachen Bewegungen, die beim Ausfluß im Innern der Flüssigkeit selbst, im Ausflußgefäß sowohl wie im Strahl entstehen, den Ursprung der Störung. So sah Abendroth⁴⁾ in der Contractio venae beim Ausfluß aus dünnwandigen Öffnungen, in der Reibung an der Rohrwand beim Ausfluß aus Ansatzröhren, Lord Rayleigh im Auftreten von Wirbelbewegungen, die infolge der Unebenheiten des Gefäßbodens und der Röhre entstehen, die erste Ursache für die Störungswellen. Durch erschütterungsfreies Auflängen des Ausflußgefäßes suchte Lord Rayleigh vergeblich die Frage zu entscheiden, ob der Ursprung der Störungen außerhalb oder innerhalb der Flüssigkeit zu suchen wäre.

1) Plateau, Statique des Liquides; Ann. d. Chem. u. Pharm. 78. S. 157. 1851.

2) Hagen, Pogg. Ann. 80. S. 559. 1850.

3) Lord Rayleigh, Proc. Lond. Math. Soc. 10. S. 4. 1878.

4) Abendroth, Über elektrisierte Flüssigkeitsstrahlen. Programm des Gymnasiums zum heiligen Kreuz, Dresden 1874.

Eine hiervon völlig abweichende, aber an und für sich sehr originelle Ansicht entwickelte Buff¹⁾ in den Liebigschen Annalen. Die Beobachtung des Abtropfens aus einer Röhre zeigte ihm, daß immer nach dem Ablösen eines Tropfens der zurückbleibende zu einer Spitze ausgezogene Teil der Flüssigkeit infolge der Adhäsion und der Oberflächenspannung nach der Öffnung zurückgezogen wird und dann noch eine Anzahl Schwingungen ausführt. „Es scheint mir“, so führt Buff aus, „daß die Ablösung der Tropfen beim ausfließenden Strahl in ganz ähnlicher Weise vor sich geht. Nur muß, da die hinteren Wasserteilchen den vorderen fast mit der gleichen Geschwindigkeit folgen oder richtiger, da der Unterschied ihrer Geschwindigkeit nur allmählich zunimmt, eine längere Wassersäule ausgezogen werden, bis endlich das Gewicht des sich bildenden Tropfens den Zusammenhang überwiegt. Durch das vermöge der Kapillarkräfte bewirkte Zurückspringen der im Augenblick, da der Tropfen abreißt, zu einem dünnen Faden ausgezogenen Flüssigkeit gegen ihren nach oben hin dickeren Stamm werden dann die erwähnten wellenartigen Anschwellungen am unteren Ende des klaren Teiles und dadurch die Bildung und Ablösung eines 2. Tropfens usw. herbeigeführt.“ Wie man sich auch das Entstehen des ersten Tropfens denken mag — die Erklärung, wie das weitere Tropfenspiel durch ihn in Gang gebracht wird, ist in der Tat sehr einleuchtend. Um aber die Richtigkeit dieser Ansicht prüfen zu können, ist ein eingehendes Studium der Kapillarwellen auf Flüssigkeitsstrahlen notwendig.

Kapillarwellen auf Flüssigkeitsstrahlen.

Mathiessen und Ahrendt²⁾ haben sich zuerst mit Kapillarwellen auf Flüssigkeitsstrahlen beschäftigt. Ihre Versuche beschränkten sich freilich auf jene Systeme stationärer Wellen, die dann entstehen, wenn man eine Spitze in nicht allzu großer Entfernung von der Ausflußöffnung in die Strahloberfläche eintauchen läßt. Dieses Wellensystem tritt aber auch dann auf, wenn der Strahl gegen einen festen Körper oder in ein mit Flüssigkeit gefülltes Gefäß fließt.

1) Buff, Ann d. Pharm. 78. S. 162. 1851.

2) Ahrendt, Rep. d. Phys. 24. S. 318. 1888.

Die Ahrendtschen Versuche wurden an horizontal ausfließenden Strahlen angestellt, weil auf dem horizontalen Teil derselben sich Wellen von gleicher Länge ausbilden. Die Versuche hatten die Aufgabe, das Thomsonsche Gesetz der Kapillarwellenbewegung experimentell zu prüfen. Nach dieser Theorie ist nämlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$(7) \quad v = \sqrt{\frac{2\pi\alpha}{\lambda}},$$

worin α die Kapillarkonstante und λ die Wellenlänge bedeuten. Damit sich ein stationäres Wellensystem ausbilden kann, müssen die Wellen der Strömungsrichtung der Flüssigkeit entgegenlaufen und eine solche Länge besitzen, daß ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich der Ausflußgeschwindigkeit ist. Nach dem Torricellischen Theorem ist dieselbe aber $v = \sqrt{2gh}$, in der h die Druckhöhe bedeutet. Aus der Vereinigung dieser Formel mit der Thomsonschen Gleichung erhält man folgende zwischen Wellenlänge und Druckhöhe bestehende Beziehung:

$$\lambda \cdot h = \frac{\pi\alpha}{g} = \text{const.}$$

Um also die Richtigkeit des Thomsonschen Gesetzes zu prüfen, konnte sich Ahrendt darauf beschränken, die Konstanz des Produktes $\lambda \cdot h$ nachzuweisen und zu zeigen, daß diese Konstante den nach der Theorie sich ergebenden Wert $\pi\alpha/g$ hat. Die Ahrendtschen Versuche bestätigen in der Tat annähernd die Konstanz von $\lambda \cdot h$. Allein die Konstante selbst ist bedeutend größer als der theoretische Wert 0,232. Nach den Versuchen hängt ihre Größe von der Entfernung der eintauchenden Spitze von der Ausflußöffnung ab und beträgt für den Abstand von 1 cm 0,523, von 2 cm 0,369 und von 3 cm 0,293. Die Erklärung dafür suchen Mathiessen und Ahrendt in der Verzögerung, welche die in der Mantelfläche befindlichen Teilchen durch Reibung und Adhäsion an der Wand des Ausflußrohres erleiden.

Allein ein großes Bedenken habe ich gegenüber dieser Arbeit, denn in ihr ist die Thomsonsche Theorie der Kapillarwellen, die nur für ebene Flüssigkeitsoberflächen bei unendlich großer Flüssigkeitstiefe abgeleitet ist, ohne weiteres auf Kapillarwellen auf zylinderförmigen Strahloberflächen übertragen, und

es ist in ihr die so nahe liegende Frage überhaupt nicht erörtert, ob bzw. wie weit das erlaubt ist.

**Ableitung einer Gleichung für Kapillarwellen
auf Flüssigkeitsstrahlen.**

Es handelt sich also für mich darum, eine der Thomson'schen Gleichung entsprechende Beziehung zu erhalten, die streng für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Kapillarwellen auf Flüssigkeitsstrahlen gültig ist. Zu einer solchen Gleichung gelangt man, wenn man von Betrachtungen ausgeht, die Lord Rayleigh in seiner Abhandlung: „On the Instability of Jets“ anstellte. Hier behandelte er die unter Einfluß der Oberflächenspannung erfolgenden Schwingungen eines ruhenden Flüssigkeitszylinders. Streng gilt diese Ableitung aber nur für ringförmig den Strahl umschließende Wellen. Solche Wellen erhält man besonders schön, wenn man sie nicht durch eine in die Flüssigkeitsoberfläche eintauchende Spitze, sondern durch das Auftreffen des Strahles auf irgend ein Hindernis erzeugt. Wie ich schon oben andeutete, ist dieses so entstehende Wellensystem kein stehendes, sondern besteht aus stationären Wellen. Man muß sie nämlich als fortschreitende Wellen auffassen, die sich auf einem Medium fortpflanzen, das sich selbst mit der gleichen Geschwindigkeit aber in der entgegengesetzten Richtung bewegt. Um die mathematische Behandlung diesem Fall möglichst anpassen zu können, soll vorausgesetzt werden, daß sich Kapillarwellen auf einem Flüssigkeitszylinder fortpflanzen, der sich in entgegengesetzter Richtung mit der konstanten Geschwindigkeit c bewegt. Die Zylinderachse wollen wir als z -Achse und zwei zu ihr und zu einander senkrecht stehende Richtungen als x - und y -Achse wählen.

Nehmen wir an, daß die Kapillarwellen in der positiven Richtung der z -Achse, der Flüssigkeitszylinder dagegen in der entgegengesetzten Richtung sich bewegt, so besitzt das für diese Flüssigkeitsbewegung geltende Geschwindigkeitspotential die Form:

$$\varphi = \psi \cdot \cos \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) + cz.$$

In dieser Gleichung ist ψ eine Funktion von r bzw. von x und y , die noch so zu wählen ist, daß die Funktion der Kontinuitätsbedingung:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

genügt.

Dies ist aber dann der Fall, wenn ψ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \psi \frac{4\pi^2}{\lambda^2} = 0$$

ist. Als Lösung dieser partiellen Differentialgleichung erhält man:

$$\psi = \gamma \cdot J_0\left(\frac{i 2\pi r}{\lambda}\right),$$

in der γ eine Konstante, r der Radius des Zylinders und $J_0(x)$ das Symbol für die Besselsche Funktion nullter Ordnung:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

bedeuten.

Das Geschwindigkeitspotential für die betrachtete Bewegung erhält somit die endgültige Gestalt:

$$\varphi = \gamma \cdot J_0\left(\frac{2\pi i r}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi z}{\lambda}\right) + cz.$$

Die Gleichung für die durch die Kapillarwellen deformierte Zylinderoberfläche hat die Form:

$$r = a + \eta,$$

worin a der mittlere Radius und η eine Funktion von z und der Zeit t bedeuten. Die Störungsfunktion η erhält man aus der Beziehung:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] \text{ für } r = a \text{ zu: } \eta = -\gamma \frac{2\pi i}{\lambda} J_0'\left(\frac{2\pi i a}{\lambda}\right) \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi}{\lambda} z\right).$$

Um die Schwingungszahl $n = 2\pi/T$ zu erhalten, kann man nach einer Methode, die im Lehrbuch der Hydrodynamik von Lamb¹⁾ angegeben ist, von der Oberflächenbedingung:

$$p - p_0 = \alpha (1/R_1 + 1/R_2)$$

1) Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsche Ausgabe von Dr. Friedel, B. G. Teubner, 1907, S. 551.

ausgehen, in der $p - p_0$ die Drucke zu beiden Seiten der Strahloberfläche und $1/R_1 + 1/R_2$ ihre mittlere Krümmung an der betrachteten Stelle bedeuten. Nach ihr ergibt sich für die Schwingungszahl n dieselbe Gleichung:

$$n^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{\alpha}{\varrho a^3} \cdot \frac{2\pi i a}{\lambda} \cdot \frac{J_0' \left(\frac{2\pi i a}{\lambda}\right)}{J_0 \left(\frac{2\pi i a}{\lambda}\right)} \left[\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 - 1 \right],$$

die Lord Rayleigh für die Schwingungen eines ruhenden Flüssigkeitszylinders auf einem anderen Wege erhalten hat.

Aus dieser Gleichung und der Beziehung $v = n \cdot \lambda$ erhält man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit auf zylindrischen Strahloberflächen:

$$(8) \quad v = \sqrt{\frac{i J_0' \left(\frac{2\pi i a}{\lambda}\right)}{J_0 \left(\frac{2\pi i a}{\lambda}\right)}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi \alpha}{\varrho \cdot \lambda}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2 a^2}}.$$

Die letzte Gleichung zeigt, daß, wie auch zu erwarten war, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine sehr komplizierte Funktion des Zylinderradius ist. Ihre rechte Seite ist ein Produkt aus drei Faktoren, von denen der zweite Faktor von dem Zylinderradius völlig unabhängig und mit der rechten Seite der Thomsonschen Formel identisch ist. Da die ebene Flüssigkeitsoberfläche auch als Zylinderoberfläche von unendlich großem Radius aufgefaßt werden kann, so muß die obige Gleichung für $a = \infty$ als Spezialfall die Thomsonsche Gleichung ergeben. Dies ist auch in der Tat der Fall, denn für $a = \infty$ nehmen die beiden übrigen Faktoren den Wert 1 an. Im ersten Faktor tritt sowohl im Zähler wie im Nenner des Bruches das Verhältnis des Zylinderumfanges zur Wellenlänge als Argument zweier Besselscher Funktionen, im 3. Faktor dagegen der reziproke Wert dieses Verhältnisses aber in einfacher Weise auf. Der Faktor

$$\sqrt{\frac{i \cdot J_0'}{J_0}}$$

ist immer ein echter Bruch, dessen Wert von 0 bis 1 wächst, während das Argument alle Werte von 0 bis ∞ durchläuft.

Zur Berechnung dieses Ausdruckes wurden die Tafeln für Besselsche Funktionen von rein imaginärem Argument benutzt,

Argument x	$\frac{i \cdot J_0'(ix)}{J_0(ix)}$	$\sqrt{\frac{i \cdot J_0'(ix)}{J_0(ix)}}$
0,0	0,0000	0,0000
1,0	0,4464	0,6681
2,0	0,6978	0,8353
3,0	0,8100	0,9000
3,6	0,8462	0,9199
4,0	0,8636	0,9293
4,6	0,8832	0,9398
5,0	0,8934	0,9452
5,6	0,9056	0,9517
6,0	0,9124	0,9552
7,0	0,9255	0,9620
8,0	0,9352	0,9671
9,0	0,9428	0,9710
10,0	0,9486	0,9740
11,0	0,9534	0,9764
.	.	.
∞	1,0000	1,0000

die in den Jahnke-Emdeschen¹⁾ Funktionentafeln zusammengestellt sind. Auch der 3. Faktor

$$\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2 a^2}}$$

ist für alle Werte von $\lambda < 2\pi a$ kleiner als 1. Wir sehen somit, daß für alle diese Wellenlängen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Kapillarwellen auf Strahloberflächen kleiner ist als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für entsprechend lange Wellen auf ebenen Flüssigkeitsoberflächen. Und zwar ist der Unterschied der beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten um so größer, je kleiner das Verhältnis $\frac{2\pi a}{\lambda}$ ist.

Für die Wellenlänge λ , die gleich dem Strahlumfang ist, wird der 3. Faktor Null, in diesem Falle ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $v = 0$ und zwar ganz unabhängig von der Natur, d. h. der Dichte und der Kapillarkonstanten der Flüssigkeit.

Für alle Wellenlängen aber, welche größer als der Strahlumfang sind, wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit imaginär. Wir haben es also hier nicht mehr mit richtigen Wellen zu

1) Jahnke-Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. B. G. Teubner 1909.

tun, da sie keine eigene Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzen, sondern mit wellenartigen Gebilden, denen die Flüssigkeitsströmung als Transportmittel dient. Sie sind es, die nach der Lord Rayleighschen Theorie das Zerfallen des Strahles in Tropfen bewirken.

Die Ahrendtschen Versuche von diesem Ergebnis aus betrachtet.

Durch Kombination des Thomsonschen Gesetzes mit der Torricellischen Formel erhielt man, wie ich oben ausführlich zeigte, die Beziehung:

$$\lambda \cdot h = \frac{\alpha \cdot \pi}{\varrho \cdot g} = \text{const.},$$

die Ahrendt seinen Versuchen zugrunde legte. Benutzt man aber an Stelle des Thomsonschen Gesetzes die oben nach der Lord Rayleighschen Theorie über Strahlschwingungen abgeleitete Gleichung, so findet man, daß das Produkt $\lambda \cdot h$ keineswegs eine Konstante, sondern eine Funktion der Wellenlänge und des Strahlradius ist:

$$\lambda \cdot h = \frac{i J_0' \left(\frac{2\pi i \alpha}{\lambda} \right)}{J_0 \left(\frac{2\pi i \alpha}{\lambda} \right)} \cdot \frac{\alpha \pi}{\varrho \cdot g} \left(1 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \alpha^2} \right).$$

Nur sobald die Wellenlänge klein gegenüber dem Strahlumfang ist, ist die rechte Seite nicht wesentlich kleiner als die Konstante

$$\frac{\alpha \cdot \pi}{\varrho \cdot g}.$$

Da in der Tat bei den Versuchen von Ahrendt diese Forderung annähernd erfüllt ist (von 25 Angaben ist bei 20 Angaben die Wellenlänge kleiner als der zehnte Teil des Strahlumfanges), so erklärt es sich, daß seine Versuche eine annähernde Konstanz von $\lambda \cdot h$ wenigstens für jede bestimmte Entfernung von der Ausflußöffnung ergeben haben. Wenn man aber die einzelnen Werte, die Ahrendt für dieses Produkt bei einer bestimmten Entfernung gefunden hat, untereinander vergleicht, so sieht man, wie sehr doch die Werte schwanken und wie bedeutend die äußersten Werte z. B. für den Abstand von 1 cm von der Ausflußöffnung 0,490 und 0,550 von dem Mittelwert 0,523 für diese Entfernung abweichen. Diese Schwankung rührt

aber vor allem von den Ungenauigkeiten her, die die Messung der Wellenlänge am Strahle selbst mit sich bringt. Eine genauere Messung derselben hätte sicherlich auch bei den Ahrendtschen Versuchen schon eine, wenn auch geringe Abnahme des Produktes mit wachsender Wellenlänge ergeben müssen, von der aber bei seinen Resultaten nicht die geringste Andeutung zu erkennen ist.

Experimentelle Untersuchung des Gesetzes.

Um schöne ringförmige Kapillarwellen zu erhalten, ließ ich den Strahl gegen ein Hindernis fließen. Diese Erzeugungsweise läßt sich aber nur mit Vorteil bei dem vertikal nach unten fließenden Strahl verwenden. Beim horizontal ausfließenden Strahle stört die von dem Hindernis abfließende Flüssigkeit meist den Strahl selbst und deformiert mehr oder weniger das entstehende Wellensystem. Andererseits gleicht sich auch die Verzögerung, die die Flüssigkeitsteilchen in der Mantelfläche in der Nähe der Ausflußöffnung besitzen, bei dem fallenden Strahl bedeutend schneller aus als bei dem horizontal ausfließenden. Diese beiden Umstände veranlaßten mich, die Versuche an dem fallenden Strahl vorzunehmen, trotzdem ich hier die verschiedenen Längen der einzelnen Wellen mit in Kauf nehmen mußte. Als Hindernis konnte in diesem Falle der Spiegel eines mit Wasser gefüllten Gefäßes dienen. Die Messung der Wellenlänge und der Strahldicke wurden wieder mit dem Kathetometer, aber nicht direkt am Strahle selbst, sondern an der photographischen Momentaufnahme vorgenommen. Die Aufnahme erfolgte ganz in derselben Weise, wie bei der Untersuchung der Strahlform. Nur wurde diesmal ausschließlich als Lichtquelle der zwischen zwei Zinkelektroden übergehende Funke einiger Leidner Flaschen benutzt. Daher konnte die bei längerer Belichtung sehr störende Unschärfe des Bildes, welche durch das unvermeidliche Zittern und Hinundherschwanken des Wellensystems hervorgerufen wird, gänzlich beseitigt werden. Auf jeder photographischen Platte wurden zwei zusammengehörige Aufnahmen gemacht. Zuerst wurde der Strahl mit und unmittelbar darauf ohne Wellensystem aufgenommen (vgl. Fig. 2 und 1).

Die zweite Aufnahme diente zur Geschwindigkeitsbestimmung an den verschiedenen Strahlstellen. Die Geschwindig-

keit wurde nämlich aus der Ausflußmenge und dem an der zweiten Aufnahme gemessenen Strahldurchmesser (bzw. dem daraus berechneten Strahlquerschnitt) an der betrachteten Stelle bestimmt. Dieser Strahldurchmesser stimmte im großen Ganzen mit dem arithmetischen Mittel aus den Durchmessern des durch die Wellen deformierten Strahles für die betrachtete Welle überein. Abweichungen traten nur bei der ersten bzw. auch hier und da bei der zweiten Welle vom Hindernis aus gerechnet ein, die, wie schon Ahrendt bemerkte, länger sind, als sie im Vergleich mit den übrigen sein sollten. Sie wurden daher bei den Messungen fortgelassen. Die Zahl der Wellen, die auf einmal gemessen werden konnte, richtete sich nach der Wellenlänge. Bei den kleinsten Wellen konnten 4 bis 5 Wellen zur Bestimmung der mittleren Wellenlänge, bei den größten dagegen nur eine benutzt werden. In dem letzten Falle wurde die Wellenlänge aus dem arithmetischen Mittel aus 5 verschiedenen Messungen bestimmt.

Fig. 1.

Die Versuchsergebnisse habe ich in folgender Tabelle wiedergegeben. In der ersten Spalte befindet sich die Wellenlänge λ , in der zweiten der mittlere Radius des Strahles der betreffenden Stelle, an der sich die Welle ausbildet. In der dritten Spalte habe ich das Verhältnis des Strahlumfanges zur Wellenlänge angegeben. Die vierte Spalte enthält die nach der Thomsonschen Gleichung aus der Kapillarkonstanten und der Wellenlänge berechnete Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_p der Kapillarwelle, die fünfte, die nach der oben abgeleiteten Gleichung aus den eben angeführten beiden Größen und dem Strahlradius berechnete Fortpflanzungsgeschwindigkeit v . In der sechsten Spalte endlich steht die aus der Ausflußmenge und dem betreffenden Strahlquerschnitt

Fig. 2.

sich ergebende mittlere Geschwindigkeit v_m . Da die Verzögerung der Flüssigkeitsteilchen in der Mantelfläche sich bei dem fallenden Strahl sehr schnell ausgleicht und die Wellen in hinreichender Entfernung von der Ausflußöffnung entstehen, so weicht die so bestimmte mittlere Geschwindigkeit nicht wesentlich von der Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen in der Mantelfläche ab.

Ein Vergleich der drei letzten Spalten der folgenden Tabelle zeigt uns, um wieviel besser die Fortpflanzungs-

Wellenlänge λ gemessen cm	Strahl- radius a gemessen cm	$\frac{2\pi a}{\lambda}$ berechnet	Fort- pflanzungs- geschwindig- keit nach Thomson v_p berechnet cm/sec	Fort- pflanzungs- geschwindig- keit nach Gleichung (8) v berechnet cm/sec	Mittlere Geschwindig- keit v_m gemessen cm/sec
0,074	0,1767	15,00	79,21	77,43	77,07
0,077	0,070	5,71	77,65	72,83	71,40
0,083	0,071	5,37	74,79	69,75	69,46
0,107	0,079	4,64	65,87	60,48	60,89
0,116	0,0855	4,63	63,26	58,08	57,22
0,121	0,1215	6,31	61,93	58,55	58,84
0,129	0,123	5,99	59,99	56,49	56,12
0,131	0,0878	4,21	59,53	53,85	53,33
0,138	0,1245	5,67	58,00	54,37	54,05
0,143	0,090	3,95	56,98	51,16	50,82
0,173	0,095	3,45	51,80	45,36	45,61
0,194	0,2275	7,37	48,92	46,72	46,50
0,202	0,1395	4,34	47,84	43,63	43,62
0,2285	0,127	3,49	45,08	39,57	39,51
0,234	0,2395	6,43	44,54	42,16	41,95
0,243	0,148	3,83	43,71	39,04	38,92
0,388	0,150	2,43	34,59	27,21	28,30

geschwindigkeit, welche nach der für die Kapillarwellen auf Flüssigkeitsstrahlen geltenden Formel berechnet worden ist, mit der mittleren Geschwindigkeit an der betreffenden Strahlstelle übereinstimmt, als die nach dem Thomsonschen Gesetz berechnete Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Zugleich bestätigt die Tabelle, daß die Abweichungen von dem Thomsonschen Gesetz um so bedeutender werden, je größer die Wellenlänge verglichen mit dem Strahlumfange ist, d. h. je kleiner das Verhältnis $2\pi r/\lambda$ ist. Leider ist es mir nicht ge-

lungen, auf dem fallenden Strahl Wellen zu erhalten, für die das Verhältnis kleiner als 2,43 ist.!

Damit nämlich das Verhältnis $2\pi a/\lambda$ so klein wie möglich wird, muß man den Strahlradius möglichst klein und die Wellenlänge möglichst groß machen. Jenes erreicht man dadurch, daß man den Durchmesser der Ausflußröhre sehr klein wählt, dieses durch Anwenden einer möglichst kleinen Ausflußgeschwindigkeit und durch Heranrücken des Wellensystems an die Ausflußöffnung. Bei der Ausführung treten aber eine Reihe von Schwierigkeiten auf, die in verschiedenen Umständen ihren Grund haben. Einmal muß die Ausflußgeschwindigkeit, bei der gerade noch ein Strahl und nicht ein Abtropfen entsteht, um so größer sein, je kleiner der Durchmesser der Ausflußröhre wird. Ferner verkleinert sich bei dem fallenden Strahl der Querschnitt in der Nähe der Ausflußöffnung, wo die Geschwindigkeit noch klein ist, so stark, daß dieser Strahlteil auch nicht annähernd als zylindrisch angesehen werden kann. Es gilt daher für Wellen, die auf diesem Strahlteil entstehen, nicht mehr streng die obige Formel. Andererseits ist auch die Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit und ferner die Messung der Wellenlänge sehr ungenau, da die Wellen in diesem Strahlstück nicht mehr sehr scharf ausgeprägt sind. Diese Ungenauigkeit zeigt sich auch schon bei der letzten Angabe der Tabelle, wo das Verhältnis $2\pi a/\lambda = 2,43$ ist.

Bis zu einem gewissen Grade geben diese experimentell gefundenen Resultate auch eine Bestätigung für die Richtigkeit der Lord Rayleighschen Theorie über die Instabilität der Flüssigkeitsstrahlen.

Anwendung dieser Ergebnisse auf die Buffsche Ansicht des Strahlzerfalls.

Nach der Buffschen Ansicht rühren die auf dem unteren Teil des kontinuierlichen Strahlstückes auftretenden wellenartigen Anschwellungen, welche bei Funkenlicht sichtbar werden und das Zerfallen des Strahles bewirken, von den Schwingungen des Strahlendes her, die durch den zuletzt abgerissenen Tropfen veranlaßt werden.

Wellen, die sich von der Auflösungsstelle aus auf dem fallenden Strahle gegen die Flüssigkeitsströmung nach oben bewegen können, müssen eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit

haben, die größer ist als die Strömungsgeschwindigkeit daselbst. Ihre Länge muß also kleiner sein als die der stationären Wellen in der Nähe der Auflösungsstelle. Alle Wellen, deren Wellenlänge größer ist als die der stationären, können gegen die Flüssigkeitsbewegung sich nicht fortpflanzen, sondern werden von ihr mitgenommen. Da die stationären Wellen in der Nähe der betrachteten Stelle bereits mikroskopisch klein sind, können die langen wellenartigen Anschwellungen, die Savart auf dem unteren Strahlstück beobachtete, nicht von den Schwingungen des Strahlendes herrühren. Daß aber kleinere Wellen auf diese Weise zustande kommen können, zeigt die photographische

Fig. 3.

Momentaufnahme Fig. 3. Die hierbei verwendete Anordnung unterschied sich von den früher benutzten nur dadurch, daß die photographische Platte, welche an einem Pendel befestigt war, während eines Funkens sich hinter dem Strahle vorbeibewegte. Dadurch wurde eine kinematographische Aufnahme des Auflösungsvorganges erzielt. Bei dem beigefügten Photographum folgen die einzelnen Aufnahmen zeitlich von links nach rechts aufeinander. Sie zeigen uns auf dem kontinuierlichen Strahlteile die Savartschen Anschwellungen, die von oben nach unten, d. h. mit zunehmender Entfernung von der Ausflußöffnung immer dicker werden. Diese Dickenzunahme erfolgt, wie man aus drei aufeinander folgenden Aufnahmen deutlich erkennt, sehr rasch, besonders wenn man bedenkt, daß

der ganzen Gruppe von Aufnahmen eine Zeitdauer von nicht ganz einer zehntel Sekunde entspricht. Zwei aufeinander folgende Anschwellungen sind durch einen dünnen Flüssigkeitsfaden miteinander verbunden, den Savart als Einschnürung bezeichnet hat. Sobald eine Anschwellung eine bestimmte Größe erlangt hat, löst sie sich in Form eines Tropfens vom Strahle los. Dabei wird der zurückbleibende dünne Flüssigkeitsfaden zu einer feinen Spitze ausgezogen, die dann nach Buff eine Anzahl von Schwingungen ausführt. Dies erkennt man an den Kapillarwellen, mit denen sich dieser Strahlteil in den folgenden Aufnahmen bedeckt hat. Diese Wellen aber führen nicht, wie Buff meinte, das Abreißen des folgenden Tropfens herbei. Das besorgt vielmehr die nächste Anschwellung, welche auf den vorhergehenden Aufnahmen strahlaufwärts bereits erkennbar ist und die mit den Schwingungen des Strahles gar nichts zu tun hat. Gleichzeitig mit dem Lostrennen von dem Flüssigkeitsstrahl löst sie sich auch von den zuletzt betrachteten, mit Wellen bedeckten Flüssigkeitsfaden. Aus der Anschwellung wird ein um seine kugelförmige Gleichgewichtsgestalt schwingender Tropfen. Aus dem Flüssigkeitsfaden entsteht ein einer Perlenkette ähnliches Gebilde, das nach einer Anzahl eigentümlicher Gestaltsveränderungen oft in zwei Tropfen zerfällt.

Diese Beobachtungen stimmen auch mit den oben angestellten theoretischen Erwägungen überein. Die Anschwellungen haben, da ihre Länge größer als der Strahlumfang ist, keine eigene Fortpflanzungsgeschwindigkeit, sondern müssen die Strömung selbst als Transportmittel benutzen. Daraus folgt aber, daß sie nicht, wie Buff annahm, durch die Schwingungen des Strahlendes hervorgerufen, sondern von der Ausflußöffnung her von dem Flüssigkeitsstrahl mitgenommen werden.

(Eingegangen 1. Juni 1919.)