SULLA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA DELLE FORZE D'ATTRITO.

Nota di E. DANIELE.

1. In un lavoro precedente ¹⁾ ebbi ad osservare che, se si hanno due sistemi meccanici ad attrito, di cui il secondo si deduca dal primo semplicemente coll' aumentarne i vincoli, si alterano, nel passaggio dal primo sistema al secondo, le espressioni delle forze vincolari e delle forze d'attrito, in quanto aumenta il numero dei parametri λ coi quali si compongono le forze vincolari, mentre diminuisce di altrettanto quello dei parametri μ coi quali si esprimono le forze d'attrito. Per cui si notava, e si verificava sopra un caso particolare, che le espressioni delle forze vincolari del primo sistema dovevano potersi dedurre da quelle del secondo ponendo le λ relative a quest'ultimo eguali a opportune combinazioni lineari delle λ relative a quello; per contro, eguagliando le μ del primo sistema a convenienti combinazioni lineari delle μ del secondo, le forze d'attrito di quello dovevano trasformarsi nelle analoghe forze di questo sistema.

Per ciò che riguarda la relazione fra le forze vincolari, la proprietà, anche nel caso generale, si riscontra immediatamente. Difatti se

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n a_{ri} \delta x_i = a_r \delta t \quad (r = 1 \dots m)$$

sono le equazioni dei vincoli del primo sistema, e

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_{pi} \delta x_i = \alpha_p \delta t \quad (p = 1 \dots m + m')$$

quelle del secondo, dall'ipotesi che quest'ultimo non sia altro che il primo coi vincoli aumentati segue che le (1) si possono

1) L'attrito nel movimento d'un solido in contatto con un piano, n. 12; N. Cimento, 1905 (Marzo).

considerare come m combinazioni lineari distinte delle (2); esistono cioè dei coefficienti f_{pr} tali da aversi identicamente

$$\sum_i a_{ri} \delta x_i - a_r \delta t = \sum_p f_{pr} (\sum_i \alpha_{pi} \delta x_i - \alpha_p \delta t),$$

da cui si deduce

$$(3) \quad a_{ri} = \sum_p f_{pr} \alpha_{pi}.$$

Ora, se indichiamo con L i parametri del secondo sistema analoghi ai λ del primo, le forze vincolari del primo e del secondo sistema hanno risp. le espressioni ¹⁾

$$\rho'_i = \sum_r a_{ri} \lambda_r, \quad \tau'_i = \sum_p \alpha_{pi} L_p;$$

ed allora è evidente che si identificano le τ'_i colle ρ'_i prendendo

$$(A) \quad L_p = \sum_r f_{pr} \lambda_r.$$

2. Quanto alla relazione già enunciata fra le forze d'attrito dei due sistemi, possiamo stabilirla nel modo seguente. Chiamando ρ_i e τ_i le forze d'attrito del primo e del secondo sistema, e M i parametri del secondo analoghi ai μ del primo, si ha ²⁾

$$\rho_i = \sum_{s=1}^{n-m} b'_{is} \mu_s, \quad \tau_i = \sum_{\sigma=1}^{n-m-m'} \beta'_{i\sigma} M_\sigma,$$

dove b'_{is} e $\beta'_{i\sigma}$ hanno analoghi significati. Posto allora

$$(B) \quad \mu_s = \sum_\sigma c_{s\sigma} M_\sigma,$$

vediamo se sia possibile determinare i coefficienti $c_{s\sigma}$ in modo che, sostituendo quella espressione di μ_s nelle ρ_i , queste si identifichino colle τ_i . Si dovranno perciò verificare, fra le b' e le β' , le relazioni

$$(4) \quad \sum_s b'_{is} c_{s\sigma} = \beta'_{i\sigma};$$

si tratterà dunque di vedere se sia possibile ricavarne i coefficienti $c_{s\sigma}$.

1) V. la mia Nota " Sulla teoria meccanica dell'attrito, n. 2, N. Cim. 1904.

2) Id. id. Anche per le formole e notazioni usate nel seguito, è sempre a questa Nota che intendo di riferirmi.

Ora le (4) sono $n(n-m-m')$ equazioni lineari nelle c , che sono in numero di $(n-m)(n-m-m')$; e si possono raggruppare in $n-m-m'$ sistemi di n equazioni ciascuno, per modo che in un medesimo sistema l'indice σ abbia un valore fisso: in un tale sistema figurano $n-m$ coefficienti c . È però facile vedere che di queste n equazioni ve ne sono al più $n-m$ indipendenti. Difatti moltiplicando la (4) per a'_{ri} e sommando rispetto ad i si trova

$$(5) \quad \sum_s c_{s\sigma} \sum_i a'_{ri} b'_{is} = \sum_i a'_{ri} \beta'_{i\sigma}.$$

Per la (5') della Nota ora citata il coefficiente di $c_{s\sigma}$ è nullo identicamente; inoltre abbiamo, per la (8) di quella Nota e per la (3) di poco sopra:

$$a'_{ri} = \sum_p f_{pr} \sum_j e_{ij} \alpha_{pj},$$

e quindi

$$\sum_i a'_{ri} \beta'_{i\sigma} = \sum_p f_{pr} \sum_i \sum_j e_{ij} \alpha_{pj} \beta'_{i\sigma},$$

ed il coefficiente di f_{pr} è sempre nullo. Ne segue che le (5) sono tante identità, cioè fra le n equazioni considerate ve ne sono almeno m conseguenza delle rimanenti. Mostriamo ora che le equazioni indipendenti del sistema sono appunto $n-m$. Basta moltiplicare la (5) per b_{ih} e sommare rispetto ad i ; si trovano così le equazioni

$$(5') \quad \sum_s c_{s\sigma} \sum_i b_{ih} b'_{is} = \sum_i b_{ih} \beta'_{i\sigma}, \quad (h = 1 \dots n-m)$$

nelle quali il determinante dei coefficienti non è nullo, perchè è dello stesso tipo di quelli delle (13) e (16) della solita Nota, determinanti che furono trovati essenzialmente diversi da zero. Le (5') sono dunque $n-m$ combinazioni lineari distinte delle n equazioni ottenute dalle (4) tenendo fisso l'indice σ , e poichè i termini noti nelle (5) non sono generalmente nulli, così queste equazioni determinano in modo unico le c .

Resta così provato che è sempre possibile esprimere le μ mediante forme lineari delle M in modo da trasformare le forze d' attrito del primo sistema in quelle del secondo; le formole di sostituzione (B) sono le analoghe delle (A) che per-

mettono di trasformare le forze vincolari del secondo sistema in quelle del primo.

3. I coefficienti $c_{s\sigma}$ si possono interpretare in un modo molto semplice, che fa apparire anche meglio l'analogia tra le (A) e le (B).

Mediante le equazioni

$$(1') \quad \sum_i a_{ri} \delta x_i = 0 ,$$

che definiscono uno spostamento virtuale del primo sistema ad un istante fissato, si possono esprimere le δx_i come forme lineari di $n - m$ parametri indipendenti $\delta q_1 \dots \delta q_{n-m}$:

$$(1'') \quad \delta x_i = \sum_s b_{is} \delta q_s ,$$

ed i coefficienti b_{is} sono quelli stessi che compaiono nelle (5'). Così pure le equazioni

$$(2') \quad \sum_i \alpha_{pi} \delta x_i = 0 ,$$

colle quali si definisce uno spostamento virtuale del secondo sistema a un dato istante, permettono di esprimere le δx_i come forme lineari di $n - m - m'$ parametri indipendenti $\delta \chi_1 \dots \delta \chi_{n-m-m'}$:

$$(2'') \quad \delta x_i = \sum_\sigma \beta_{i\sigma} \delta \chi_\sigma ,$$

ove i coefficienti $\beta_{i\sigma}$ sono gli analoghi dei b_{is} . Il passaggio dal primo al secondo sistema effettuandosi colla sola aggiunta di nuovi vincoli, vuol dire che le componenti δx_i di uno spostamento virtuale del secondo sistema ad un istante fissato debbono potersi ottenere da quelle del primo ponendo le δq eguali a forme lineari delle $\delta \chi$; vi sono cioè dei coefficienti $\phi_{s\sigma}$ tali che facendo

$$\delta q_s = \sum_\sigma \phi_{s\sigma} \delta \chi_\sigma ,$$

si identificano i secondi membri delle (1'') e (2''), e a definire quei coefficienti si hanno le equazioni

$$(6) \quad \beta_{i\sigma} = \sum_s \phi_{s\sigma} b_{is} .$$

Queste non sono tutte indipendenti, ma si riducono, con un calcolo analogo a quello fatto per le (4), alle seguenti :

$$\sum_s \phi_{s\sigma} \sum_i b_{is} b'_{ih} = \sum_i b'_{ih} \beta_{i\sigma},$$

le quali coincidono colle (5'); ne segue

$$c_{s\sigma} = \phi_{s\sigma}.$$

Questa eguaglianza ci dà il significato dei coefficienti c , che presenta stretta analogia con quello degli f nelle formole (3) (A): nel restringere, cioè, il grado di libertà del primo sistema per ottenere il secondo le f , da un lato, permettono il passaggio dalle equazioni dei vincoli del primo sistema alle equazioni del secondo; dall'altro lato le ϕ stabiliscono la dipendenza fra gli elementi caratteristici di uno spostamento virtuale di entrambi i sistemi ad un medesimo istante.

Accanto all'analogia conviene però notare una differenza sostanziale che intercede fra i coefficienti f e ϕ : i primi, oltre alle coordinate, contengono esplicitamente anche il tempo, che vi figura come una variabile indipendente; invece nelle ϕ si deve intendere fissato il valore del tempo, perchè così avviene dei coefficienti nelle (1') (2'), come pure delle funzioni b_{is} e $\beta_{i\sigma}$. Questa differenza non ha più ragione d'essere, naturalmente, quando i vincoli dei due sistemi non dipendono dal tempo.

4. Applichiamo, come esempio, le formole precedenti al caso in cui il primo sistema sia libero. Le forze d' attrito, calcolate secondo la formola (3) della mia Nota « *Forze d' attrito ed equazioni del movimento nei sistemi liberi* » ¹⁾ sono

$$p_i = \sum_s E_{is} \mu_s,$$

ed allora le equazioni (4), che definiscono i coefficienti $\phi_{s\sigma}$, si riducono a

$$\sum_s E_{is} \phi_{s\sigma} = \beta'_{i\sigma} = \sum_s E_{is} \beta_{s\sigma}.$$

Di qui si deduce

$$\phi_{s\sigma} = \beta_{s\sigma},$$

1) N. Cimento, Aprile (1905).

ciò che risulta anche dalla (6) osservando che nel nostro caso dobbiamo fare

$$b_{is} = \begin{cases} 1 & (i = s) \\ 0 & (i \text{ diverso da } s) . \end{cases}$$

La nostra formola (B) diventa quindi

$$(B) \quad \mu_s = \sum_{\sigma} \beta_{s\sigma} M_{\sigma} ,$$

e stabilisce, come risulta dal confronto colle (2'), fra le μ e le M le stesse relazioni che passano fra le componenti δx di uno spostamento virtuale del secondo sistema e gli elementi caratteristici $\delta \chi$. Come s'è visto al n. 1 della Nota ora citata, le μ si possono interpretare come forze d'attrito del primo sistema relative non più alle coordinate x , ma ad un sistema speciale di caratteristiche $p_1 \dots p_n$ legate alle x dalle equazioni

$$x_i = y_i(x_1 \dots x_n, t) + \sum_h e_{ih} p_h .$$

Le caratteristiche p hanno dunque questa proprietà, che le forze d'attrito μ (del primo sistema) ad esse relative diventano forze d'attrito del secondo sistema, relative alle stesse velocità p (che ora non fungono più da caratteristiche, perchè legate da equazioni lineari), quando si esprimano le μ mediante i parametri M colle stesse formole con cui si esprimono le δx in funzione delle $\delta \chi$. La cosa si verifica subito scrivendo, in corrispondenza alla formola precedente, l'altra

$$\delta x_i = \sum_h e_{ih} \epsilon_h ,$$

che esprime le componenti d'uno spostamento virtuale del primo sistema a un dato istante in funzione di n quantità infinitesime ϵ , ed osservando che, in virtù anche della (B_1) , si ha identicamente

$$\sum \mu_s \epsilon_s = \sum \tau_i \delta x_i .$$

5. Come secondo esempio supponiamo che i due sistemi dati abbiano lo stesso grado di libertà, e quindi coincidano in un medesimo sistema, i cui vincoli si rappresentino o colle (1) o colle (2). Questi due sistemi di equazioni sono allora alge-

bricamente equivalenti, e dovrà essere $m' = 0$, se ammettiamo che i vincoli si esprimano ogni volta con equazioni indipendenti fra di loro; quanto ai coefficienti b e β possiamo intenderli come due diverse soluzioni del sistema

$$\sum_i a_{is} B_{is} = 0,$$

dove le B_{is} sono le incognite. Le (1'') e (2'') ci danno due diverse rappresentazioni parametriche delle δx_i in corrispondenza alle due soluzioni delle equazioni precedenti, mentre i $\phi_{s\sigma}$ sono i coefficienti della sostituzione lineare (in generale invertibile) che, eseguita sopra l'un sistema di parametri, riproduce l'altro.

Anche le forze d' attrito del nostro sistema materiale si rappresentano diversamente con due serie di parametri μ e M ; la sostituzione (B), che trasforma gli uni negli altri, ed i cui coefficienti sono gli stessi che nella sostituzione precedente, ha dunque, nel caso attuale, questo significato, di esprimere la dipendenza che intercede fra i parametri μ di due qualunque delle infinite rappresentazioni diverse possibili per le forze d' attrito d' uno stesso sistema.

**UN APPARECCHIO PER LA DIMOSTRAZIONE DEL PRINCIPIO
DELL' AZIONE E DELLA REAZIONE,**

del Prof. EMILIO COMINOTTO.

Se in un corso di meccanica si presenta qualche modo di dimostrare la terza legge della dinamica, manca però un' apparecchio che dia di questa legge una dimostrazione pronta affinché meglio si presti agli usi didattici. A siffatta dimostrazione risponde benissimo un' apparecchio da me ideato e che mi ha servito efficacemente nella scuola.

Esso consta di due bilance indipendenti, di eguale sensibilità, sospese al medesimo asse mediante cuscinetti d' acciaio annulari fissativi attraverso. Una di esse AB (fig. 1) è piegata a forchetta e comprende fra le sue aste l'altra CD girevole