Über die Darstellung der Fuchs'schen Functionen erster Familie durch unendliche Producte.

Von Otto Biermann in Klagenfurt.

Will man die Theorie der Fuchs'schen Functionen derart entwickeln, dass man solche Functionen bei vorgegebenen Null- und Unendlichkeitsstellen bilden kann, reichen die $\mathcal{O}$. Fuchs'schen Functionen*) nicht aus, weil man deren Nullstellen nicht anzugeben weiß. Man bedarf vielmehr Hilfsfunctionen, bei denen die Null- und Unendlichkeitsstellen stets ersichtlich bleiben, also Producte gewisser Primfunctionen.**)

Ich stelle in folgendem zunächst diejenigen Sätze kurz zusammen, welche für die Bildung einer Gruppe linearer Substitutionen erster Familie nöthig sind, um nicht allein Gelegenheit zu haben, späterhin gebrauchte Bezeichnungen einzuführen, sondern um auch eine bestimmte Form der den Einheitskreis nicht ändernden linearen Substitutionen abzuleiten und bei einem allgemeinen Polygon von $2n$ Seiten und beliebigem Range eine Conjunction der Seiten anzugeben. Im zweiten Paragraphen construere ich die einfachste Form einer eindeutigen, analytischen Function, welche an einer Stelle a des Fundamentalpolygons und ferner an den durch die Substitutionen $(z, f_r(z))$ einer Gruppe erster Familie transformierten Stellen $a_r = f_r(a)$ von der ersten Ordnung verschwindet, indes jede Stelle des durch die Substitutionen nicht alterierten Einheitskreises eine wesentlich singuläre Stelle ist.

Der Kernpunkt der Untersuchung liegt in dem Nachweise, dass dann, wenn b_r die gegenüber dem Fundamentkreise zu a_r symmetrische Stelle ist, die Reihe

$$\sum_r |a_r - b_r|^2$$

convergiert. Auf den auffallenden Umstand, dass hier der

*) Poincaré, Acta mathematica. Bd. 1.

**) Biermann, Sitzber. d. Akad. d. W. in Wien. Bd. 92. Novemberheft 1885.

Exponent 2 auftritt, indes dann, wenn a_ν die Nullstellen der Weierstraß'schen Function $\sigma(z)$ bedeuten, die Reihe

$$\sum_{\nu} |a_\nu - \infty|^2 = \sum_{\nu} \left| \frac{1}{a_\nu} \right|^2$$

divergiert, wende ich meine Aufmerksamkeit.

Ferner untersuche ich das Verhalten der besagten Function gegenüber einer Substitution der Gruppe, leite dann den allgemeinsten Ausdruck einer innerhalb des Einheitskreises eindeutigen analytischen Function mit vorgegebenen Null- und Unendlichkeitsstellen ab, und kennzeichne auch deren Verhalten gegenüber einer Substitution. Dann ist es möglich, die Bedingungen anzugeben, unter welchen die Function eine Fuchs'sche wird; doch habe ich dieselben noch nicht auf die nothwendigen und hinreichenden zurückgeführt.

§. 1.

Es sei in der durch die reelle Achse begrenzten positiven Halbebene oder innerhalb des Einheitskreises der Ebene einer unbeschränkten Veränderlichen z eine Eintheilung in convexe Polygone vollzogen, deren Begrenzungen durch Kreisbogen gegeben sind, welche die reelle Achse oder den Einheitskreis senkrecht schneiden, und es bestehe eine Gruppe linearer Substitutionen:

$$\left(z, \frac{\alpha_\nu z + \beta_\nu}{\gamma_\nu z + \delta_\nu} \right) \text{ oder } (z, f_\nu(z)),$$

welche die reelle Achse, beziehungsweise den „Fundamentalkreis“ nicht alterieren und die genannten Polygone ineinander überführen.

Um einen bestimmten Fall vor uns zu haben, nehmen wir ein für allemal an, dass die begrenzenden Seiten der Polygone niemals einen Theil der reellen Achse oder des Einheitskreises ausmachen und die Ecken stets innerhalb des durch die Eintheilung überdeckten Bereiches der z Ebene liegen. Die Seiten seien also von der „ersten Art“ und die Ecken von der „ersten Kategorie“.

Zwei Stellen heißen äquivalent oder entsprechend und zwei Figuren heißen congruent, wenn die eine die durch eine Substitution der Gruppe Transformierte der anderen ist. Die Polygone sind daher congruent. Grenzt an ein Polygon R_0 längs seiner Seite l_p das Polygon R_p , welches durch die Substitution $(z, f_p(z))$ aus R_0 hervorgeht, so werden die auf l_p liegenden und zu R_p gezählten Punkte durch die Substitution $(z, f_p^{-1}(z))$ auf eine Seite l'_p von R_0 übertragen, die R_0 von dem durch Anwendung der letzten Substitution aus R_0 hervorgehenden Bereiche R'_p trennt. Zwei Seiten l_p und l'_p der ge-

nannten Art, heißen conjugiert; sie sind congruent und müssen in dem Polygon in gerader Zahl vorkommen.

Die Ecken des Polygons lassen sich in Gruppen von ein oder mehreren einander entsprechenden Punkten bringen. Die Gesammtheit einander äquivalenter Ecken bildet einen „Cyclus“. Bei der getroffenen Annahme über die Lage der Ecken und Seiten innerhalb des eingetheilten Bereiches gibt es nur „geschlossene Cyclen“, und die Polygone sind von der ersten Familie.

Ist A_1 eine beliebige Ecke, B_1 eine der angrenzenden Seiten, C_1 ihre conjugierte Seite, A_2 die folgende Ecke, dann wieder B_2 die nächste Seite, C_2 ihre conjugierte und A_3 die folgende Ecke u. s. f., so kommt man zu A_1 zurück und hat alle Ecken desjenigen Cyclus berührt, welchem A_1 , sowie jede der besagten Ecken angehört.

Beschreibt man um A_1 einen beliebigen kleinen Kreis und tritt aus dem Polygon R_0 durch die Seite B_1 in den Bereich R_1 , so ist B_1 , als Seite von R_1 betrachtet, homolog C_1 und die Ecke A_1 homolog A_2 . Bei dem weiteren Umkreisen tritt man durch eine B_2 homologe Seite in den Bereich R_2 . In diesem ist die eben überschrittene Seite homolog C_2 und die Ecke A_1 homolog A_3 . So fortschreitend gelangt man endlich wieder zu dem Bereich R_0 . Ähnliches gilt bei dem Umkreisen der übrigen Ecken $A_2, A_3, \dots A_m$ des die Ecke A_1 umfassenden Cyclus. Da die entsprechenden Winkel in congruenten Polygonen gleich groß sind, indem die linearen Substitutionen die Winkel nicht ändern, ist die Anzahl der in jeder Ecke eines m gliederigen Cyclus zusammenstoßenden Bereiche dieselbe, und zwar ein ganzes Vielfache von m z. B. pm . Die Summe der Polygonwinkel an den Ecken des m gliederigen Cyclus ist dann der p^{te} Theil von 2π .

Diese Bedingung und die frühere, über die Congruenz conjugierter Seiten sind nothwendig und hinreichend dafür, dass zu der getroffenen Eintheilung eine discontinuierliche Gruppe linearer Substitutionen gehört. Die Gruppe ist aus denjenigen Substitutionen abzuleiten, welche die conjugierten Seiten in einander übertragen, doch gibt es zwischen diesen „Fundamentalsubstitutionen“ noch Beziehungen von der Anzahl der Cyclen, welche ausdrücken, dass man bei Umkreisung je einer Ecke des einzelnen Cyclus durch die Substitutionen zu dem Ausgangspolygon zurückgelangt.

Besitzt das Polygon $2n$ Seiten und q Cyclen, dann ist auf der aus dem Polygon durch Aneinanderheften seiner conjugierten Seiten und Zusammenfügen der Ecken jedes gesonderten Cyclus zu bildenden Fläche die größte Zahl der geschlossenen Curven, welche keine Theilung der Fläche hervor-

rufen: $q = \frac{n+1-q}{2}$. Da q , der „Rang“ der Fläche, des Polygons und der zugehörigen Gruppe eine positive ganze Zahl sein muss, ist die Zahl q der Cyclen höchstens $n+1$, und q ist ungerade, wenn n gerade ist, und gerade im entgegengesetzten Falle.

Umfasst der erste, zweite u. s. w., endlich der q^{te} Cyclus $n_1, n_2, \dots n_q$ Ecken, so ist

$$n_1 + n_2 + \dots + n_q = 2n.$$

Die Anzahl der möglichen Cyclen bei einem Polygon von $2n$ Seiten, wo $n = 2m+1$ oder $n = 2m$ ist, ist durch die Summe der Anzahl ganzzahliger Lösungen jeder der $(m+1)$ Gleichungen:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1-\nu} = 2n \quad (\nu = 0, 2, 4, \dots 2m),$$

gegeben, wobei $x_1 > 0$, $x_\lambda \leq x_{\lambda+1}$, $x_{n+1-\nu} \leq n + \nu$ ist. Der Rang ist bei $n+1-\nu$ Cyclen $\frac{\nu}{2}$.

Die Anzahl der verschiedenen Cyclen bei gleich bleibendem Range ist nicht von Belang; denn die Polygone von gleicher Seitenzahl und gleichem Range lassen sich dadurch aufeinander zurückführen, dass man zu einem Polygon R_0 mit bestimmter Zuordnung seiner Seiten einen Bereich passend hinzufügt und den zufolge einer Substitution der Gruppe congruenten Bereich wegnimmt.

Theilt man z. B. R_0 durch einen Kreis, der die Begrenzung des eingetheilten Bereiches der z Ebene senkrecht schneidet, in zwei Bereiche P_0 und Q_0 derart, dass zwei conjugierte Seiten B_i und C_i getrennt werden und stößt an die Seite C_i von Q_0 der Bereich R'_i , der durch einen dem früheren congruenten Bogen in P'_i und Q'_i getheilt wird, so kann man $Q_0 + P'_i$ als den für die Eintheilung fundamentalen Bereich auffassen. Doch bei diesem können die aufeinanderfolgenden Seiten in geänderter Zuordnung vorkommen, und wenngleich die Zahl der Cyclen erhalten bleibt, brauchen die einzelnen Cyclen nicht gleichviele Ecken, wie vordem in R_0 zu umfassen.

Nach diesen Bemerkungen genügt es, eine Art der Conjunction der Seiten des Polygons vom Range q anzugeben.

Nehmen wir an, dass unter den $n - 2q + 1$ Cyclen $n - 2q = i$ aus einer Ecke allein bestehen und der letzte Cyclus die übrigen $2n - i$ Ecken umfasst, welcher Fall der Gleichung

$$1 + 1 + \dots + 1 + (2n - i) = 2n$$

entspricht. Schreibt man die conjugierten Seiten nebeneinander, eine erste und ihre conjugierte, die zweite und die conjugierte, u. s. w. Dann ist das Schema für die Zuordnung:

$$\begin{pmatrix} 1, n+i+1; & 2, n+i+2; & \dots & n-i, 2n; \\ n-i+1, n-i+2; & \dots & n+i-1, n+i. \end{pmatrix}$$

Dieses Beispiel ist durch die folgende Figur beschrieben, wo die Ecken des mehrgliederigen Cyclus mit unteren, die übrigen mit oberen Indices versehen sind und die Seiten eine passende Bezeichnung finden.

Es ist

$$B_\nu = C_{n+\nu}, \quad C_\nu = B_{n+\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n-i)$$

$$B_{n-i+j} = C^{(i-j)}, \quad C_{n-i+j} = B^{(i-j)} \quad (j = 1, 2, \dots, i)$$

Die Summe der Winkel an den Ecken A des $(2n-i)$ gliederigen Cyclus sei $\frac{2\pi}{p}$ der Winkel an der Ecke $A^{(j-1)}$ sei $\frac{2\pi}{p^{(j-1)}}$.

Heißt die Substitution, welche das Polygon R_0 bei dem Austritt durch B_ν in den Bereich R_ν überführt, $(z, f_\nu(z))$, und bezeichnet man

$$f_1 f_2 \dots f_{2n-i}(z) = F(z),$$

dann wird $z = F^p(z)$. (1)

Nennt man die Substitution, welche R_0 in den an die Seite $B^{(j-1)}$ grenzenden Bereich führt, $(z, \varphi_{j-1}(z))$, wird auch

$$z = \varphi_{j-1}^{p_{j-1}}(z). \quad (2)$$

Weil aber

$$\varphi_{j-1}(z) \equiv f_{n-j+1}^{-1}(z) \quad (j = 1, 2, \dots, i)$$

und

$$f_{n+1}(z) \equiv f_1^{-1}(z), \quad f_{n+2}(z) \equiv f_2^{-1}(z), \quad \dots, \quad f_{n+(n-i)}(z) \equiv f_{n-i}^{-1}(z)$$

ist, kann man

$$f_1, f_2, \dots, f_{n-i}, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}$$

als Fundamentalsubstitutionen betrachten und dann geht die „Fundamentalrelation“ (1) in die folgende Beziehung über:

$$z = \{f_1 f_2 \cdots f_{i-1} \varphi_{i-1}^{-1} \varphi_{i-2}^{-1} \cdots \varphi_0^{-1} f_1^{-1} f_2^{-1} \cdots f_{n-1}^{-1}(z)\}^p.$$

Im Falle eines Vierecks mit einem Cyclus und dem Range $\varrho = 1$ hat man eine erste Seite der dritten, die zweite der vierten zuzuordnen. Sind die zugehörigen Substitutionen $(z, f_1(z))$, $(z, f_3(z))$, so lautet die Fundamentalrelation zwischen diesen:

$$z \equiv (f_1 f_2 f_1^{-1} f_2^{-1}(z))^p.$$

Es handelt sich nun um die wirkliche Berechnung der Gruppen und zunächst um die Bestimmung der reellen Substitutionen

$$t = \frac{Az + B}{Cz + D},$$

welche die reelle Achse der z Ebene ungeändert lassen. Nennt man die z Werte an den Ecken einer Seite des (der fraglichen Gruppe zugehörigen) Polygons R_0 $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, und die z Werte an den Ecken der conjugierten Seite $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, $\delta = \delta_1 + i\delta_2$, sind weiter die conjugiert imaginären Stellen mit $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ bezeichnet, so hat man die Coefficienten A, B, C, D derart zu bestimmen, dass den Werten $z = \alpha, \beta, \alpha', \beta'$ die Werte $t = \gamma, \delta, \gamma', \delta'$ entsprechen. Es sollen demnach die Gleichungen bestehen

$$A\beta + B - C\beta\delta - D\delta = 0$$

$$A\beta' + B - C\beta'\delta' - D\delta' = 0$$

$$A\alpha + B - C\alpha\gamma - D\gamma = 0$$

$$A\alpha' + B - C\alpha'\gamma' - D\gamma' = 0.$$

Die Determinante des Gleichungssystems muss verschwinden, doch diese Forderung ist erfüllt, indem die selbstverständliche Beziehung zwischen vier z Werten z_1, z_2, z_3, z_4 und ihren entsprechenden t Werten t_1, t_2, t_3, t_4 :

$$\frac{t_1 - t_2}{t_1 - t_3} : \frac{t_4 - t_2}{t_4 - t_3} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} : \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_3}$$

im besonderen die Gleichung

$$\frac{\gamma' - \delta}{\gamma' - \gamma} : \frac{\delta' - \gamma}{\delta' - \delta} = \frac{\alpha' - \beta}{\alpha' - \alpha} : \frac{\beta' - \alpha}{\beta' - \beta}$$

nach sich zieht. Die reellen Substitutionscoefficienten werden^{*)}:

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_2 & \gamma_1 & 1 \\ \beta_1 \delta_1 - \beta_2 \delta_2 & \delta_1 & 1 \\ \beta_1 \delta_2 + \beta_2 \delta_1 & \delta_2 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_2 & \alpha_1 & \gamma_1 \\ \beta_1 \delta_1 - \beta_2 \delta_2 & \beta_1 & \delta_1 \\ \beta_1 \delta_2 + \beta_2 \delta_1 & \beta_2 & \delta_2 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_2 & \alpha_1 & 1 \\ \beta_1 \delta_1 - \beta_2 \delta_2 & \beta_1 & 1 \\ \beta_1 \delta_2 + \beta_2 \delta_1 & \beta_2 & 0 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 1 \\ \beta_1 & \delta_1 & 1 \\ \beta_2 & \delta_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

^{*)} In der Arbeit von M. Poincaré lautet das dritte Glied der zweiten Horizontalreihe in der Determinante B γ_3 statt δ_1 .

Hat man auf solche Weise die reellen Fundamentalsubstitutionen gefunden, so sind deren Coefficienten noch den Bedingungen zu unterwerfen, welche die Convexität des Polygons mit sich bringt, ferner den Forderungen, welche der Satz über die Summe der Winkel an den Ecken jedes Cyclus verlangt und endlich den durch die Fundamentalrelationen vorgeschriebenen Beziehungen. Dann erst ist die Gruppe bestimmt.

Um auch eine Gruppe linearer Substitutionen anzugeben, welche den Einheitskreis ungeändert lassen, brauchen wir die obige Gruppe nur passend umzuformen.

Setzt man

$$t = u + iv = \frac{az + b}{cz + d}$$

und verlangt, dass zufolge dieser Substitution der reellen Achse der z Ebene in der t Ebene der Einheitskreis entspricht, müssen die complexen Coefficienten

$$a = a_1 + ia_2, \quad b = b_1 + ib_2, \quad c = c_1 + ic_2, \quad d = d_1 + id_2$$

den Gleichungen gemäß gewählt werden:

$$a_1 d_2 - a_2 d_1 + c_1 b_2 - c_2 b_1 = 0$$

$$a_1 d_1 + a_2 d_2 - c_1 b_1 - c_2 b_2 = 0$$

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1 = 0,$$

denn der der reellen Achse der z Ebene entsprechende Kreis hat die Gleichung:

$$(u^2 + v^2)(c_2 d_1 - c_1 d_2) - (a_1 b_2 - a_2 b_1) + u(c_1 b_2 + a_1 d_2 - c_2 b_1 - a_2 d_1) + v(a_1 d_1 + a_2 d_2 - c_1 b_1 - c_2 b_2) = 0.$$

Man sieht, dass a oder b , c oder d nicht verschwinden dürfen. Unterwirft man nun z einer reellen Substitution:

$$(z, f_v(z) = \left(z, \frac{A_v z + B_v}{C_v z + D_v} \right),$$

so ändert die entstehende Substitution:

$$\left(\frac{az + b}{cz + d}, \frac{af_v(z) + b}{cf_v(z) + d} \right)$$

oder:

$$\left(z, \frac{(-d(aA_v + bC_v) + c(aB_v + bD_v))z + (b(aA_v + bC_v) - a(aB_v + bD_v))}{(-d(cA_v + dC_v) + c(cB_v + dD_v))z + (b(cA_v + dC_v) - a(cB_v + dD_v))} \right)$$

den Einheitskreis nicht.

Wir setzen hier und im folgenden

$$a = i, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad d = i,$$

wobei einem Punkte z oberhalb der reellen Achse ein Punkt

$$t = \frac{iz + 1}{z + i}$$

im Innern des Einheitskreises entspricht, und nunmehr lautet die letzte Substitution:

$$\left(z, \frac{(A_v + D_v + i(B_v - C_v))z + (B_v + C_v + i(A_v - D_v))}{(B_v + C_v - i(A_v - D_v))z + (A_v + D_v - i(B_v - C_v))} \right),$$

die wir noch so umformen, dass die Determinante Eins wird; d. h. wir dividieren alle Coefficienten durch $2\sqrt{A_v D_v - B_v C_v}$.

§. 2.

Angenommen, man habe aufgrund der Angaben des vorigen Paragraphen eine Gruppe aus n Fundamentalsubstitutionen

$$(z, f_i(z)) = \left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right) \quad (\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = 1),$$

welche den Einheitskreis nicht alterieren, abgeleitet, so ist nunmehr die Aufgabe zu lösen: eindeutige, analytische Functionen $F(z)$ zu bilden, welche durch die verschiedenen Substitutionen der Gruppe nicht geändert werden.

Eine solche Function erhält offenbar jeden Wert, den sie überhaupt annimmt, an den Stellen eines Polygons, zu welchen die Stellen innerhalb der Begrenzung zu rechnen sind, ferner die Stellen je einer Seite jedes Paares conjugierter Seiten und endlich je eine Ecke jedes Cyclus, doch zählt diese p fach, wenn die Summe der Winkel an den Ecken des m gliederigen Cyclus $\frac{2\pi}{p}$ ist, oder — was dasselbe bedeutet — wenn in jeder Ecke des Cyclus pm Bereiche zusammenstoßen. Hat die Function $F(z)$ an einer solchen Ecke $z = \alpha$ den Wert a , muss sie in der Umgebung von $z = \alpha$ eine Entwicklung der Gestalt

$$F(z) = a + a_1(z - \alpha)^p + a_2(z - \alpha)^{p+1} + \dots$$

besitzen, denn $F(z)$ durchläuft auf p verschiedenen, aber congruenten, in $z = \alpha$ endigenden Wegen dieselbe Wertereihe.

Die Function nimmt aber auch jeden Wert an und wird an bestimmten Stellen eines Polygons von endlicher Ordnung Null und an anderen Stellen desselben Bereiches wie eine rationale Function unendlich. Die äquivalenten Stellen in dem Einheitskreise sind Null- und außerwesentlich singuläre Unendlichkeitsstellen gleicher Ordnung, aber die Punkte des Einheitskreises selbst werden wesentlich singuläre Stellen für $F(z)$.

Zur Herstellung einer Function $F(z)$ mit vorgegebenen Null- und Unendlichkeitsstellen bedarf man anderer Hilfsfunctionen als der $\Theta(z)$ Functionen, und zwar eindeutiger Functionen, bei welchen die als wesentlich verschieden gezählten Null- und Unendlichkeitsstellen eines Polygons stets ersichtlich bleiben. Wir wollen darum zunächst eine eindeutige Function bilden, welche innerhalb des Fundamentalpolygons R_0 die einfache Nullstelle a und in dem aus R_0 durch die Substitution $(z, f_v(z))$ unserer Gruppe hervorgehenden Polygone R_v die einfache Null-

stelle $f_\nu(a)$ besitzt; doch sei fürs erste weder a noch $f_\nu(a)$ gleich Null. Ferner aber soll die Function innerhalb des Einheitskreises regulären Verhaltens und über denselben nicht fortzusetzen sein.

Wir haben in den Stellen

$$a, f_1(a), f_2(a), \dots, f_\nu(a), \dots$$

eine unendliche Punktmenge Q , die in Verbindung mit der ersten abgeleiteten Punktmenge Q' einen zusammenhängenden Bereich begrenzt. Ordnen wir den genannten Stellen, die auch

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_\nu, \dots$$

heißen mögen, neue Punkte

$$b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_\nu, \dots$$

außerhalb des Einheitskreises oder auf demselben, zu und zwar so, dass nach Bezeichnung der unteren Grenze von $|b_\nu - b|$ mit β_ν , wo unter b irgend ein Punkt der Menge Q' verstanden ist,

$$\lim_{\nu=\infty} (|a_\nu - b_\nu| - \beta_\nu) = 0$$

wird, oder so dass jeder positiven GröÙe η eine solche positive ganze Zahl n zugeordnet werden kann, dass für alle $\nu \geq n$

$$|a_\nu - b_\nu| - \beta_\nu < \eta$$

ist und endlich die obere Grenze der β_ν eine endliche GröÙe β ist, dann hat man in dem Product von Primfunctionen:

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} \left(1 - \frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu}\right) c^{\sum_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu}\right)^\mu} = \prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu}\right)$$

eine Function der verlangten Art, wenn nach Wahl einer unendlichen Folge positiver GröÙen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\nu, \dots$ von endlicher Summe und nach Wahl einer zweiten Folge positiven GröÙen $\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \dots, \varepsilon^{(\nu)}, \dots$ mit der Grenzstelle 1 ($\lim_{\nu=\infty} \varepsilon^{(\nu)} = 1$)

über m_ν so verfügt worden ist, dass für die an die Bedingung $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu}\right| \leq \varepsilon^{(\nu)}$ geknüpften z Werte

$$\left| \sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu}\right)^\mu \right| < \varepsilon_\nu$$

Ist $a_\nu = 0$ und $b_\nu = \infty$, so setze man E_ν gleich z .

So lautet ein allgemeiner Satz von Herrn Mittag-Leffler ungeachtet eines besonderen Zusammenhanges zwischen den Stellen a_ν .*) In unserem Falle ist die untere Grenze von

*) Acta mathematica. Bd. 4.

$|b_\nu - b|$ offenbar $|b_\nu| - 1 = \beta_\nu$. Die weitere Forderung an $q_\nu = b_\nu^{(1)} + i b_\nu^{(2)}$ gegenüber $a_\nu = a_\nu^{(1)} + i a_\nu^{(2)}$ lautet daher:

$$\lim (V(a_\nu^{(1)} - b_\nu^{(1)})^2 + (a_\nu^{(2)} - b_\nu^{(2)})^2 + 1 - V(b_\nu^{(1)2} + b_\nu^{(2)2})) = 0.$$

Doch weil $\lim (a_\nu^{(1)2} + a_\nu^{(2)2}) = \lim |a_\nu|^2 = 1$ ist, geht für $\lim b_\nu$ die Bedingung hervor:

$$b_\nu^{(1)2} (a_\nu^{(1)2} - 1) + b_\nu^{(2)2} (a_\nu^{(2)2} - 1) + 2 a_\nu^{(1)} a_\nu^{(2)} b_\nu^{(1)} b_\nu^{(2)} = 0.$$

Diese Gleichung für den Ort des Punktes $(b_\nu^{(1)}, b_\nu^{(2)})$ stellt aber die durch die Punkte $z = 0$ und $z = a_\nu$ gehende Doppelgerade dar.

Nach dieser Bemerkung erscheint es am naheliegendsten, jedem Punkt a_ν seinen symmetrischen

$$\frac{1}{a_\nu} = \frac{a}{|a_\nu|^2}$$

als Punkt b_ν zuzuordnen, was unter anderem den Vortheil gewährt, dass jetzt der durch eine Substitution $(z, f_\mu(z))$ aus b_ν abgeleitete Punkt $f_\mu(b_\nu)$ mit dem zu $f_\mu(a_\nu)$ zuzuordnenden zusammenfällt. Es wird

$$|a_\nu - b_\nu| = \frac{1 - |a_\nu|^2}{|a_\nu|}, \quad \beta_\nu = \frac{1 - |a_\nu|}{|a_\nu|}, \quad |a_\nu - b_\nu| - \beta_\nu = 1 - |a_\nu|.$$

Wir treffen diese Wahl, werden aber das Zeichen b_ν beibehalten, und untersuchen nunmehr das obige Product mit Rücksicht darauf, dass die Stellen $a_0, a_1, \dots, a_\nu, \dots$ die Transformaten einer unter ihnen sind.

Nehmen wir innerhalb des Einheitskreises eine von den Stellen a_ν verschiedene Stelle z_0 heraus, geben z alle an die Bedingung $|z - z_0| \leq \varrho$ geknüpften Werte, unter denen kein a_ν vorkommen soll, und lassen dann ν in dem Ausdruck $|z - b_\nu| - \beta_\nu$ die natürliche Zahlenreihe durchlaufen, so gibt es eine positive, untere Grenze l für $|z - b_\nu| - \beta_\nu$. Es wird

$$|z - b_\nu| \geq \beta_\nu + l > 0.$$

Da man aber jeder positiven GröÙe $\eta < l$ eine ganze, positive Zahl n_1 so zuordnen kann, dass für $\nu \geq n_1$

$$|a_\nu - b_\nu| < \beta_\nu + \eta$$

ist, gelten die Ungleichungen

$$\left| \frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu} \right| < \frac{\eta + \beta_\nu}{l + \beta_\nu} < \frac{\eta + \beta}{l + \beta}.$$

Weil noch β endlich ist, kann man auch eine ganze Zahl n_2 so bestimmen, dass für $\nu \geq n_2$

$$\frac{\eta + \beta}{l + \beta} < \varepsilon^{(\nu)}$$

Nennt man n die größere der Zahlen n_1 und n_2 , ist für alle $\nu \geq n$

$$\left| \frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu} \right| < \varepsilon^{(\nu)}.$$

Wenn aber $\left| \frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu} \right| < 1$ ist, gilt die Entwicklung

$$E_\nu \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu} \right) = e^{-\sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu} \right)^\mu}$$

Wählt man deshalb m_ν , wie es der Mittag-Leffler'sche Satz vorschreibt, wird offenbar für jede positive ganze Zahl ν'

$$\sum_{\nu=\nu'}^{\nu+\nu'} \left| \sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu} \right)^\mu \right| < \delta$$

gemacht werden können, wo δ willkürlich klein ist, und man darf

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} E_\nu \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu} \right) = e^{-\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu} \right)^\mu}$$

setzen. Das Product der Primfunctionen ist in der Umgebung ϱ der Stellen z_0 gleichmäßig convergent.

Nach dieser wegen der Deutlichkeit absichtlich geführten Wiederholung des Beweises von Herrn Mittag-Leffler für seinen Satz, bemerken wir auch, dass für hinlänglich große n

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left| \sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu} \right)^\mu \right| &< \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left| \frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu} \right|^{m_\nu+1} \frac{1}{1 - \left| \frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu} \right|} < \\ &< \frac{1}{1 - \frac{\eta + \beta}{l + \beta}} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left| \frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu} \right|^{m_\nu+1} \end{aligned}$$

ist. Daher hängt die gleichmäßige Convergenz unseres Productes von der der Reihe

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left| \frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu} \right|^{m_\nu+1}$$

ab. Weil aber für genügend große n $|z - b_\nu|$ in der Umgebung ϱ von z_0 $\geq \beta + l$ ist, wird diese Reihe convergieren, sobald

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu - b_\nu|^{m_\nu+1}$$

convergent ist.

Jetzt ist zu entscheiden, ob man in der letzten Reihe die Convergenz dadurch erzielen kann, dass man allen Zahlen m_ν

ein und denselben Wert m beilegt, ob also die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\nu} - b_{\nu}|^{m+1}$$

für einen positiven, endlichen, ganzzahligen Wert von m convergiert.

M. Poincaré nennt die Größe L eines Bogens das längs dem Bogen erstreckte Integral $\int_1 \frac{dz}{|z|^2}$, und die Größe S einer Fläche, das über dieselbe ausgedehnte Doppelintegral $\iint \frac{\varrho d\varrho d\omega}{1-\varrho^2}$, wo $z = \varrho e^{i\omega}$ gesetzt ist. Die Größe L des Radius ϱ eines um den Punkt $z=0$ gelegten Kreises ist $\frac{1}{2} \log \frac{1+\varrho}{1-\varrho}$, und man hat $\varrho = \frac{e^{2L}-1}{e^{2L}+1}$. Die Größe S des Kreises ist

$$\frac{\pi \varrho^2}{1-\varrho^2} = \frac{\pi}{4} (e^{2L} + e^{-2L} - 2)$$

und diese Größe ist $< \frac{\pi}{4} e^{2L}$.

Denkt man um einen innerhalb des Einheitskreises befindlichen Punkt z eine Kreisfläche C_0 gelegt, welche keinen äquivalenten Punkt im Innern oder auf ihrer Begrenzung enthält, bestimmen wir ihre Größe S gleich σ , welche den Größen der congruenten Flächen um die z entsprechenden Punkte $f_{\nu}(z)$ gleichkommt, legen alle Orthogonalkreise des Einheitskreises, bestimmen die Größe L jedes durch C_0 ausgeschnittenen Bogens und nennen deren oberen Grenze λ , so ist die Zahl der z äquivalenten Stellen innerhalb zweier Kreise K_{n-1} und K_n um den Punkt $z=0$, deren Radien ϱ_{n-1} und ϱ_n derart gewählt sind, dass die zugehörigen Größen L :

$$L_{n-1} = \frac{1}{2} \log \frac{1+\varrho_{n-1}}{1-\varrho_{n-1}} = (n-1)r, \quad L_n = \frac{1}{2} \log \frac{1+\varrho_n}{1-\varrho_n} = nr$$

werden, d. h. in arithmetischer Reihe wachsen, kleiner als

$$\frac{\pi}{4\sigma} (e^{2(nr+\lambda)} + e^{-2(nr+\lambda)} - 2) < \frac{\pi}{4\sigma} e^{2(nr+\lambda)}.$$

Verwenden wir diesen Satz, ersetzen aber in

$$\sum_{\nu} |a_{\nu} - b_{\nu}|^{m+1} = \sum_{\nu} \left(\frac{1+|a_{\nu}|}{1-|a_{\nu}|} \right)^{m+1}$$

die Beträge $|a_{\nu}|$, welche $> \varrho_{n-1}$ aber $\leq \varrho_n$ sind, durch den kleineren Betrag ϱ_{n-1} , wobei das einzelne Glied größer wird, — was immer durchgeführt werden soll außer bei den innerhalb des ersten Kreises liegenden Stellen, die wir nämlich bei dieser Untersuchung gang außeracht lassen können, weil sie nur in

endlicher Anzahl vorkommen, — dann folgt die Ungleichung:

$$\sum' |a_\nu - b_\nu|^{m+1} < \frac{\pi}{4\sigma} e^{2\lambda} \sum_{n=2}^{\infty} e^{2nr} \left[\frac{1 - \left| \frac{e^{2(n-1)r} - 1}{e^{2(n-1)r} - 1} \right|^2}{\left| \frac{e^{2(n-1)r} - 1}{e^{2(n-1)r} - 1} \right|} \right]^{m+1}$$

oder

$$\sum' |a_\nu - b_\nu|^{m+1} < \frac{4^{nr}}{\sigma} e^{2\lambda} \sum_{n=2}^{\infty} e^{2nr} \frac{e^{2(n-1)r}}{(e^{2(n-1)r} - e^{-2(n-1)r})^{m+1}}.$$

Bezeichnet man e^{2r} mit u , so handelt es sich nur mehr um die Frage, für welchen Wert von m die Reihe

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{u}{u^{\mu n}} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{u^{2\mu}}\right)^{m+1}}$$

convergieren kann. Weil diese Reihe eine kleinere Summe hat als

$$\frac{u}{u^m} \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^{-(m+1)} \left(1 - \frac{1}{u^m}\right)^{-1},$$

indem zufolge der Bedeutung von r $u > 1$ ist, besteht die Convergenz schon für den Fall $m = 1$.

Darnach ist

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} \left(1 - \frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu}\right) e^{\frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu}} = \tau(z; a_0)$$

eine der zu Beginn des Paragraphen verlangten Functionen, und jede andere geht durch Multiplication mit einer willkürlichen Function der Form $e^{G(z)}$ hervor, wenn $G(z)$ eine innerhalb des Einheitskreises durchaus reguläre und eindeutige Function bedeutet.

Es ist klar, dass bei Vertauschung von a_ν mit b_ν die außerhalb des Einheitskreises reguläre, eindeutige Function

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} \left(1 - \frac{b_\nu - a_\nu}{z - a_\nu}\right) e^{\frac{b_\nu - a_\nu}{z - a_\nu}} = \tau(z; b_0)$$

mit den einfachen Nullstellen $b_0, b_1, \dots, b_\nu, \dots$ entspringt.

Heben wir die frühere Beschränkung über die Lage der Stellen $a_0, a_1, \dots, a_\nu, \dots$ innerhalb der Polygone auf und nehmen an, dass die Stellen $f_\nu(a)$ mit den p -fach zu zählenden Ecken eines m -gliederigen Cyclus zusammenfallen, so ist die $\tau(z; a_0)$ analoge Function:

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} \left(1 - \frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu}\right)^p e^{p \frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu}}.$$

Ist ferner eine der Stellen a_ν innerhalb eines Polygons Null, worauf die durch die Substitution $\left(z, \frac{\alpha_\nu z + \beta_\nu}{\gamma_\nu z + \delta_\nu}\right)$ transformierte Stelle $a_\nu = \frac{\beta_\nu}{\delta_\nu}$ ist, so haben wir $a = 0$, $b = \infty$ und $a_\nu = \frac{\beta_\nu}{\delta_\nu}$ die durch die obige Substitution der Stelle ∞ entsprechende Stelle $b_\nu = \frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu}$ zuzuordnen. Es soll aber $b_\nu = \frac{1}{a_\nu} = \frac{\alpha_\nu}{[\alpha_\nu]^2}$ sein. Diese Forderung ist gemäß der allgemeinen Form unserer Substitutionen (auf Seite 10) erfüllt, es ist

$$\frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu} = \frac{A_\nu + D_\nu + i(B_\nu - C_\nu)}{B_\nu + C_\nu - i(A_\nu - D_\nu)} = \frac{1}{\left(\frac{\beta_\nu}{\delta_\nu}\right)'} = \frac{1}{\left(\frac{B_\nu + C_\nu + i(A_\nu - D_\nu)}{A_\nu + D_\nu - i(B_\nu - C_\nu)}\right)'}$$

Es wird darnach:

$$\tau(z; 0) = z \prod_\nu \left(1 - \frac{\frac{\beta_\nu}{\delta_\nu} - \frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu}}{z - \frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu}} \right) e^{\frac{\frac{\beta_\nu}{\delta_\nu} - \frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu}}{z - \frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu}}}$$

und

$$\tau(z; \infty) = \frac{1}{z} \prod_\nu \left(1 - \frac{\frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu} - \frac{\beta_\nu}{\delta_\nu}}{z - \frac{\beta_\nu}{\delta_\nu}} \right) e^{\frac{\frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu} - \frac{\beta_\nu}{\delta_\nu}}{z - \frac{\beta_\nu}{\delta_\nu}}}$$

Die oben erwiesene Convergenz der Reihe $\sum_\nu |a_\nu - b_\nu|^2$ erscheint auffallend, wenn man die Convergenz, beziehungsweise Divergenz der Reihen $\sum' |a_\nu|^{-3}$, $\sum' |a_\nu|^{-2}$ beachtet, wo a_ν — bis auf $z = 0$ — die Nullstellen $2\mu\omega + 2\mu'\omega'$ ($\mu, \mu' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) der in der Weierstraß'schen Theorie der doppelperiodischen Functionen benützten Hilfsfunction $\sigma(z)$ bedeuten. Hier ist jeder Stelle a_ν die Stelle $b_\nu = \infty$ zugeordnet, und die Substitutionen $(z, f_\nu(z))$ sind $(z, z + a_\nu)$.

Wir sehen nach, wo unser Convergenzbeweis in dem Ausnahmefalle eine Änderung erheischt. Die für Bogen und Flächen gegenüber den Substitutionen bestehenden Invarianten L und S sind hier:

$$L = \int |dz|, \quad S = \iint dx dy,$$

daher ist die Größe L des Radius ϱ eines um den Punkt $z = 0$ beschriebenen Kreises ϱ selbst, und die Größe S der Kreisfläche ist $\varrho^2 \pi$. Beschreibt man um eine Stelle z einen Kreis, der keine z -äquivalente Stelle im Innern oder auf seiner Begrenzung besitzt, heißt seine Fläche σ , ist ferner λ der Durchmesser dieser Fläche,

dann wird die Zahl der in dem Kreise ϱ um $z=0$ befindlichen transformierten Stellen von z kleiner sein als $\frac{\pi(\varrho+\lambda)^2}{\sigma}$. Legt man jetzt Kreise $K_1, K_2, \dots K_n, \dots$ mit den Radien $r, 2r, \dots nr, \dots$ um den Punkt $z=0$, ersetzt jeden Wert $|a_\nu|$ außerhalb des $(n-1)^{\text{ten}}$ und nicht außerhalb des n^{ten} Kreises durch den kleineren Betrag $(n-1)r$, auf dass

$$\left| \frac{1}{a_\nu} \right|^{m+1} < \left| \frac{1}{(n-1)r} \right|^{m+1}$$

ist, und bezeichnet endlich λ mit kr , dann gilt Ungleichung

$$\sum_\nu \left| \frac{1}{a_\nu} \right|^{m+1} < \frac{\pi}{\sigma} \sum_n \frac{(nr + kr)^2}{((n-1)r)^{m+1}} = \frac{\pi}{\sigma r^{m-1}} \sum_n \frac{(n+k)^2}{(n-1)^{m+1}},$$

wo die Summation von $n=2$ bis $n=\infty$ zu erstrecken ist, wenn man wieder die in und auf dem ersten Kreise K_1 befindlichen Stellen a_ν , welche nur in endlicher Anzahl vorkommen, ausschließt.

Die für die Convergenz der erhaltenen Reihe nothwendige Bedingung, dass das allgemeine Glied für $n=\infty$ den Grenzwert Null hat, ist offenbar erst erfüllt, wenn $m=2$ ist, und das steht mit der Divergenz von $\sum_\nu |a_\nu|^{-2}$ in Einklang.

Bevor wir unsere Function $\tau(z; a_0)$ weiterhin untersuchen, bilden wir gelegentlich andere eindeutige Functionen von Bedeutung; zunächst eine Function, welche innerhalb des Einheitskreises die Stellen a_ν zu außerwesentlich singulären hat und in deren Umgebung die Entwicklungsform besitzt:

$$\frac{b_\nu - a_\nu}{z - a_\nu} + \mathfrak{P}_\nu(z - a_\nu).$$

Für Werte von z , welche an die Bedingung $\left| \frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu} \right| < 1$ geknüpft sind, gilt die Entwicklung:

$$\frac{b_\nu - a_\nu}{z - a_\nu} = - \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu} \right)^\mu.$$

Bildet man

$$F_\nu(z) = \frac{b_\nu - a_\nu}{z - a_\nu} + \sum_{\mu=1}^{m_\nu} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu} \right)^\mu$$

für den Fall $m_\nu=1$, auf dass

$$F_\nu(z) = (b_\nu - a_\nu) \left(\frac{1}{z - a_\nu} - \frac{1}{z - b_\nu} \right)$$

entsteht, ist

$$F(z) = \sum_\nu F_\nu(z) = \sum_\nu (b_\nu - a_\nu) \left(\frac{1}{z - a_\nu} - \frac{1}{z - b_\nu} \right)$$

die verlangte Function, denn die Reihe

$$\sum_{\nu} |F_{\nu}(z)| \leq \sum_{\nu} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left| \frac{a_{\nu} - b_{\nu}}{z - b_{\nu}} \right|^{\mu+1}$$

ist convergent.

Construiert man diejenige eindeutige Function, welche außerhalb des Einheitskreises die Stellen b_{ν} zu außerwesentlich singulären hat, und in der Umgebung von b_{ν} eine Darstellung der Form

$$\frac{a_{\nu} - b_{\nu}}{z - b_{\nu}} + \mathfrak{P}^{(\nu)}(z - b_{\nu})$$

zulässt, gelangt man zu dem arithmetisch gleichartig gebildeten Ausdruck

$$\sum_{\nu} (a_{\nu} - b_{\nu}) \left(\frac{1}{z - b_{\nu}} - \frac{1}{z - a_{\nu}} \right).$$

Darum stellt derselbe Ausdruck außerhalb und innerhalb des Einheitskreises je eine analytische Function dar.

Eine andere wichtige Function geht durch logarithmische Differentiation von $\tau(z; a_0)$ hervor, und zwar:

$$\frac{\tau'(z; a_0)}{\tau(z; a_0)} = \sum_{\nu} \frac{a_{\nu} - b_{\nu}}{z - b_{\nu}} \left(\frac{1}{z - a_{\nu}} - \frac{1}{z - b_{\nu}} \right).$$

Sie lässt sich auch finden, indem man eine Function fordert, welche in der Umgebung von a_{ν} die Darstellungsform

$$\frac{1}{z - a_{\nu}} + \mathfrak{P}_{\nu}(z - a_{\nu})$$

besitzt, oder in der Umgebung von b_{ν} die Entwicklung zulässt:

$$\frac{1}{z - b_{\nu}} - \frac{a_{\nu} - b_{\nu}}{(z - b_{\nu})^2} + \mathfrak{P}^{(\nu)}(z - b_{\nu}).$$

Man hat bei der Bildung von $F_{\nu}(z)$, die entsprechend dem früheren Falle vorzunehmen ist, nur $m_{\nu} = 2$ zu setzen.

Jetzt gehen wir zu der Function $\tau(z; a_0)$ zurück und sehen nach, wie sie sich gegenüber einer Substitution der Gruppe

$$(z, f(z)) = \left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right) \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

verhält.

Wir notieren die Beziehungen:

$$(z, f^{-1}(z)) = \left(z, \frac{-\delta z + \beta}{\gamma z - \alpha} \right), \quad f(z) - c = \frac{\alpha - c\gamma}{\gamma z + \delta} (z - f^{-1}(c)),$$

und bemerken, dass die Gleichung besteht:

$$1 - \frac{a_{\nu} - b_{\nu}}{f(z) - b_{\nu}} = \frac{1 - \frac{f^{-1}(a_{\nu}) - f^{-1}(b_{\nu})}{z - f^{-1}(b_{\nu})}}{1 - \frac{\frac{\alpha}{\gamma} - a_{\nu}}{z - f^{-1}(b_{\nu})}}.$$

Setzt man

$$e^{\frac{a_\nu - b_\nu}{f(z) - b_\nu}} = e^{\frac{f^{-1}(a_\nu) - f^{-1}(b_\nu)}{z - f^{-1}(b_\nu)}} \frac{h_\nu}{\frac{b_\nu - a_\nu}{\frac{a}{\gamma} - a_\nu}} e^{\frac{a}{\gamma}},$$

wird

$$h_\nu = \left(z - \left(-\frac{\delta}{\gamma} \right) \right)^{\frac{a_\nu - b_\nu}{z - f^{-1}(b_\nu)}} \left(\frac{1}{\frac{a}{\gamma} - b_\nu} - \frac{1}{\frac{a}{\gamma} - a_\nu} \right)$$

oder

$$h_\nu = \frac{a_\nu - b_\nu}{f(z) - b_\nu} \frac{b_\nu - a_\nu}{\frac{a}{\gamma} - a_\nu}.$$

Wir werden fernerhin zur näheren Bezeichnung der Function h_ν ausführlicher schreiben $h_\nu(f(z), \frac{a}{\gamma}; a_\nu)$ oder $h_\nu(f(z), f(\infty); a_\nu)$

Weil nun die Punktmenge $f^{-1}(a_\nu)$ ($\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$) von der gegebenen $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ nur in der Anordnung abweicht, ist zunächst auch

$$\tau(z; a_0) = \prod_\nu \left(1 - \frac{f^{-1}(a_\nu) - f^{-1}(b_\nu)}{z - f^{-1}(b_\nu)} \right) e^{\frac{f^{-1}(a_\nu) - f^{-1}(b_\nu)}{z - f^{-1}(b_\nu)}}$$

und man kann hierauf

$$\tau(f(z); a_0) = \frac{\tau(z; a_0)}{\tau\left(\frac{a}{\gamma}; b_0\right)} e^{\left(z - \left(-\frac{\delta}{\gamma} \right) \right) \sum_\nu \frac{a_\nu - b_\nu}{z - f^{-1}(b_\nu)} \left(\frac{1}{\frac{a}{\gamma} - b_\nu} - \frac{1}{\frac{a}{\gamma} - a_\nu} \right)}$$

setzen, sobald nur nachgewiesen ist, dass die in der Exponentialfunction stehende Reihe gleichmäßig convergiert und $\left| z - \left(-\frac{\delta}{\gamma} \right) \right|$ nicht unendlich wird.

Da oben die gleichmäßige Convergenz von $F(z)$ in der Umgebung der außerhalb des Einheitskreises liegenden Stellen, welche von den Stellen b_ν verschieden sind, bewiesen wurde, und $z = \frac{a}{\gamma}$ die durch die Substitution $(z, f(z))$ transformierte Stelle von $z = \infty$ ist, also $\left| \frac{a}{\gamma} \right| > 1$ ist und $\frac{a}{\gamma}$ niemals einem b_ν gleichkommt, convergiert

$$\sum_\nu \left| a_\nu - b_\nu \right| \left| \frac{1}{\frac{a}{\gamma} - b_\nu} - \frac{1}{\frac{a}{\gamma} - a_\nu} \right|.$$

Ferner ist $|z - f^{-1}(b_\nu)|$ in der Umgebung ϱ jeder innerhalb des

Einheitskreises befindlichen Stelle endlich und von Null verschieden. Dadurch ist die Convergenz der obigen Reihe bewiesen.

Zufolge der im Paragraphen 1 getroffenen Verfügungen hat jede lineare Substitution, welche den Einheitskreis nicht ändert und durch den Wert $\gamma = 0$ ausgezeichnet ist, die Gestalt

$$\left(z, \frac{A + iB}{\sqrt{A^2 + B^2}} z \right) \equiv \left(z, \frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}} z \right) \equiv (z, \psi(z)).$$

Die Primfunction

$$\left(1 - \frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu} \right) e^{\frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu}}$$

geht bei Anwendung einer solchen Substitution in die folgende über

$$\left(1 - \frac{\psi^{-1}(a_\nu) - \psi^{-1}(b_\nu)}{z - \psi^{-1}(b_\nu)} \right) e^{\frac{\psi^{-1}(a_\nu) - \psi^{-1}(b_\nu)}{z - \psi^{-1}(b_\nu)}},$$

ohne dass ein Factor e^h hinzutritt. Demnach besteht die Gleichung

$$\tau(\psi(z); a_0) = \tau(z; a_0).$$

Bei Substitutionen $(z, f(z))$ hingegen, in welchen γ von Null verschieden ist, drückt nach Bezeichnung von Σh_ν mit $h(f(z), f(\infty); a_0)$ die Gleichung

$$\tau(f(z); a_0) = \frac{\tau(z; a_0)}{\tau\left(\frac{a}{\gamma}; b_0\right)} e^{h(f(z), f(\infty); a_0)}$$

das Verhalten der Function $\tau(z; a_0)$ gegenüber der Substitution aus. *)

Wir haben auch einen Ausdruck für $\tau(f(z); a_0)$ abzuleiten. Hierzu beachte man, dass

$$f(0) = \frac{\beta}{\delta}, f(\infty) = \frac{\alpha}{\gamma}, f^{-1}(0) = -\frac{\beta}{\alpha}; f^{-1}(\infty) = -\frac{\delta}{\gamma}$$

ist und die Beziehungen bestehen:

$$f(z) = \frac{1 - \frac{f^{-1}(0) - f^{-1}(\infty)}{z - f^{-1}(\infty)}}{\frac{1}{\frac{\alpha}{\gamma}}}; \quad 1 - \frac{f(0) - f(\infty)}{f(z) - f(\infty)} = \frac{1 - \frac{f(0) - f(\infty)}{z - f(\infty)}}{-\frac{\delta}{\gamma}} = \frac{z}{-\frac{\delta}{\gamma}}.$$

*) $h(f(z), f(\infty); a_0)$ kann man auch in der Form $\sum_{\nu} \frac{a_\nu - b_\nu}{f(z) - b_\nu} \frac{b_\nu - a_\nu}{\frac{\alpha}{\gamma} - b_\nu}$ in

Rechnung bringen, denn die Convergenz dieser Reihe besteht anch.

Darnach wird

$$\tau(f(z); o) = \frac{\tau(z; o)}{-\frac{\delta}{\gamma} \left(\tau\left(\frac{\alpha}{\gamma}; \infty\right) \right)} \times \\ \times e^{(z - (-\frac{\delta}{\gamma})) \sum_{\nu}' \frac{\frac{\beta_{\nu}}{\delta_{\nu}} - \frac{\alpha_{\nu}}{\gamma_{\nu}}}{z - f^{-1}\left(\frac{\alpha_{\nu}}{\gamma_{\nu}}\right)} \left(\frac{1}{\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha_{\nu}}{\gamma_{\nu}}} - \frac{1}{\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta_{\nu}}{\delta_{\nu}}} \right)} + g(z),$$

wo die Striche bei dem Producte $\left(\tau\left(\frac{\alpha}{\gamma}; \infty\right)\right)$ und dem Summenzeichen anzeigen, dass α_{ν} , β_{ν} , γ_{ν} , δ_{ν} niemals mit α , β , γ , δ übereinstimmen sollen und unter dem Summenzeichen nicht $\alpha_{\nu}=1$, $\beta_{\nu}=0$, $\gamma_{\nu}=0$, $\delta_{\nu}=1$ zu setzen ist. Die Function $g(z)$ ist gleich:

$$-\frac{f^{-1}(o) - f^{-1}(\infty)}{z - f^{-1}(\infty)} + \frac{f(o) - f(\infty)}{f(z) - f(\infty)} = -\frac{1}{\alpha\gamma} \frac{1}{z - \left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)} + \frac{\gamma}{\delta} \left(z - \left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) \right).$$

Denken wir nun in dem Polygon R_{ν} des regulär eingetheilten Einheitskreises die Stellen

$$c_{\nu}^{(1)}, c_{\nu}^{(2)}, \dots, c_{\nu}^{(k)}; c_{\nu}^{(1)}, c_{\nu}^{(2)}, \dots, c_{\nu}^{(l)}$$

gegeben, nennen die symmetrischen Stellen

$$d_{\nu}^{(1)}, d_{\nu}^{(2)}, \dots, d_{\nu}^{(k)}; d_{\nu}^{(1)}, d_{\nu}^{(2)}, \dots, d_{\nu}^{(l)}$$

und bezeichnen mit $G(z)$ eine innerhalb des Einheitskreises bestehende analytische Function, dann ist

$$F(z) = C \frac{\prod_{k=1}^k \tau(z; c_0^{(k)})}{\prod_{\lambda=1}^l \tau(z; c_{\lambda}^{(\lambda)})} e^{G(z)}$$

der Ausdruck für die allgemeinste innerhalb des Einheitskreises gültige eindeutige analytische Function mit den vorgegebenen Null- und Unendlichkeitsstellen

$c_{\nu}^{(x)} (x=1, 2, \dots, k) \left\} (\nu=0, 1, 2, \dots) \right.$
beziehungsweise $c_{\nu}^{(\lambda)} (\lambda=1, 2, \dots, l) \left\} (\nu=0, 1, 2, \dots) \right.$
 C bezeichnet eine Constante.

Unterwirft man in $F(z)$ das Argument einer Substitution $(z, f(z))$ der vorgegebenen Gruppe und dividirt $F(f(z))$ durch $F(z)$, folgt die Beziehung

$$\frac{F(f(z))}{F(z)} = \frac{\prod_{\lambda=1}^l \tau\left(\frac{\alpha}{\gamma}; d_{\lambda}^{(\lambda)}\right)}{\prod_{x=1}^k \tau\left(\frac{\alpha}{\gamma}; d_{\lambda}^{(x)}\right)} \frac{\sum_{\lambda} h(f(z); f(\infty); c_{\lambda}^{(x)})}{\sum_{\lambda} h(f(z); f(\infty); c_{\lambda}^{(\lambda)})} e^{G(f(z)) - G(z)},$$

in welcher man zufolge der Gleichung:

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} E_{\nu} \left(\frac{b_{\nu} - a_{\nu}}{z - a_{\nu}} \right) = e^{-\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=2}^{\infty} \frac{1}{\mu} \left(\frac{b_{\nu} - a_{\nu}}{z - a_{\nu}} \right)^{\mu}}$$

$$\frac{\prod_{\lambda} x \left(\frac{\alpha}{\gamma}; \delta_{\nu}^{(\lambda)} \right)}{\prod_x x \left(\frac{\alpha}{\gamma}; d_{\nu}^{(x)} \right)} = \frac{e^{\sum_{x=1}^h \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=2}^{\infty} \frac{1}{\mu} \left(\frac{d_{\nu}^{(x)} - c_{\nu}^{(x)}}{\gamma} \right)^{\mu}}}{e^{\sum_{\lambda=1}^l \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=2}^{\infty} \frac{1}{\mu} \left(\frac{d_{\nu}^{(\lambda)} - c_{\nu}^{(\lambda)}}{\gamma} \right)^{\mu}}}$$

setzen darf. Im folgenden werden wir diesen Ausdruck mit

$$e^{\sum_{x=1}^k M_x(f(\infty)) - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \mathfrak{M}_{\lambda}(f(\infty))}$$

bezeichnen.

Für $G(z)$ kann man z. B. die Form gebrauchen:

$$G(z) = \sum_{x=1}^k G_x(z) - \sum_{\lambda=1}^l \mathfrak{G}_{\lambda}(z),$$

wo

$$G_x(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{A_{x\mu}^{(\nu)}}{\mu} \left(\frac{c_{\nu}^{(x)} - d_{\nu}^{(x)}}{z - d_{\nu}^{(x)}} \right)^{\mu}, \quad \lambda(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{A}_{\lambda\mu}^{(\nu)}}{\mu} \left(\frac{c_{\nu}^{(\lambda)} - d_{\nu}^{(\lambda)}}{z - d_{\nu}^{(\lambda)}} \right)^{\mu}$$

ist. Bringt man

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{c_{\nu}^{(x)} - d_{\nu}^{(x)}}{f(z) - d_{\nu}^{(x)}} \right)^{\mu} \text{ auf die Form } \frac{1}{\mu} \left(\frac{c_{\nu}^{(x)} - d_{\nu}^{(x)}}{\gamma} \right)^{\mu} \frac{\left(\frac{1}{\gamma^2 \left(\frac{\alpha}{\gamma} - d_{\nu}^{(x)} \right)} + z - f^{-1}(d_{\nu}^{(x)}) \right)^{\mu}}{(z - f^{-1}(d_{\nu}^{(x)}))^{\mu}}$$

und versteht unter $A_{x\mu}^{(\nu-1)}$ den bei dem Gliede

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{f^{-1}(c_{\nu}^{(x)}) - f^{-1}(d_{\nu}^{(x)})}{z - f^{-1}(d_{\nu}^{(x)})} \right)^{\mu}$$

stehenden Coefficienten A , wird der Coefficient von $(z - f^{-1}(d_{\nu}^{(x)}))^{-m}$ der Entwicklung von $G_x(f(z))$ in der Umgebung der Stelle $f^{-1}(d_{\nu}^{(x)})$

$$\left\{ -A_{x^m}^{(\nu-1)} + \sum_{\mu=m}^{\infty} A_{x^m}^{(\nu)} \binom{\mu-1}{m-1} \left(\frac{\frac{\alpha}{\gamma} - c_{\nu}^{(x)}}{\frac{\alpha}{\gamma} - d_{\nu}^{(x)}} \right)^m \left(\frac{c_{\nu}^{(x)} - d_{\nu}^{(x)}}{\frac{\alpha}{\gamma} - d_{\nu}^{(x)}} \right)^{\mu} \right\} \frac{\left(\frac{c_{\nu}^{(x)} - d_{\nu}^{(x)}}{\frac{\alpha}{\gamma} - d_{\nu}^{(x)}} \right)}{m! \gamma^{2m} \left(\frac{\alpha}{\gamma} - c_{\nu}^{(x)} \right)^m},$$

falls $G_x(z)$ auch außerhalb des Einheitskreises eine analytische Function ist.

Verlangen wir, dass $F(z)$ durch die Fundamentalsubstitutionen $(z, f_i(z))$ ($i = 1, 2, \dots, n$) keine Änderung erfahre und damit auch ungeändert bleibe bei irgend einer anderen Substitution der zugehörigen Gruppe, müssen die n Beziehungen bestehen:

$$\sum_{k=1}^k M_k(f_i(\infty)) - \sum_{\lambda=1}^i M_\lambda(f_i(\infty)) + \sum_{k=1}^k h(f_i(z); f_i(\infty); c_0^{(k)}) - \\ - \sum_{\lambda=1}^i h(f_i(z); f_i(\infty); c_0^{(\lambda)}) + G(f_i(z)) - G(z) = 2m_i \pi \sqrt{-1},$$

wo m_i ganze Zahlen bedeuten; die links stehenden Functionen haben in dem Einheitskreise die constanten Werte $2m_i \pi \sqrt{-1}$ anzunehmen. Entwickelt man die genannten Functionen in der Umgebung der Stelle $z = 0$ und erfüllt die hervorgehenden Gleichungen identisch, entstehen für die Coefficienten von

$G(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} C_\mu z^\mu$ n Systeme von Gleichungen. Bei Untersuchung derselben hat man aber noch weitere Relationen in Rücksicht zu ziehen. Wenn man nämlich auf $\tau(z; a_0)$ oder $\tau(z; 0)$ successive die Substitutionen anwendet, welche in einem der Fundamentalrelationen der Gruppe:

$$z = f j_1 (f j_2 (\dots f j_s (z)))$$

eintreten, wo

$$(z; f j_1(z), f j_2(z), \dots, f j_s(z))$$

nur Fundamentalsubstitutionen sind, muß ja

$$\tau(f j_1 (f j_2 (\dots f j_s (z)))); a_0 \equiv \tau(z; a_0)$$

sein. Indem aber

$$\tau(f j_1 (f j_2 (\dots f j_s (z)))); a_0 = \\ = \sum_{\sigma=1}^3 h(f j_{s-\sigma+1} (f j_{s-\sigma} (\dots f j_\sigma (z)))); f j_{s-\sigma+1}^{(\infty)}; a_0 \\ = \frac{\tau(z; a_0)}{\prod_{\sigma=1}^3 \tau(f j_\sigma(\infty); a_0)} e$$

zu setzen ist, erhält man die von dem Werte a_0 nothwendig unabhängige Beziehung:

$$\sum_{\sigma=1}^3 h(f j_{s-\sigma+1} (f j_{s-\sigma} (\dots f j_\sigma (z)))); f j_{s-\sigma+1}^{(\infty)}; a_0 - \sum_{\sigma=1}^3 \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=2}^{\infty} \frac{1}{\mu} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{f j_\sigma^{(\infty)} - b_\nu} \right)^\mu = \\ = 2k \pi \sqrt{-1},$$

in der k wieder eine ganze Zahl ist. — Bei q Cyclen gibt es q solche Gleichungen für die Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen.

Jetzt hat man die Bedingungen, unter welchen $F(z)$ eine Fuchs'sche Function wird, auf die nothwendigen und hinreichenden zurückzuführen. Wenn man die Fundamentalrelationen in allgemeiner Form niederschreibt, ist der Einblick in den Zusammenhang der Substitutionscoefficienten, und andererseits der willkürlichen Größen $C_\mu, e_o^{(\alpha)}, c_o^{(\lambda)}$ nicht leicht; ich habe ihn noch nicht gewonnen und halte es für das beste, die Art und Form der verlangten Bedingungen zunächst an Beispielen zu suchen, damit man das Ziel deutlicher sehe. Doch auf Beispiele gehe ich an dieser Stelle nicht ein.

Nachträgliche Bemerkung. Die im 33. Bd. der math. Annalen enthaltene Abhandlung von Herrn Stahl über die Productdarstellung eindeutiger linearperiodischer Functionen wurde mir erst nach Beendigung meiner Arbeit bekannt, und leider fand ich bisher nicht die Zeit, jene Abhandlung zu verwerten.