SULL' EQUILIBRIO DI UN VELO PESANTE TRIANGOLARE

BRUTO CALDONAZZO

Una superficie materiale omogenea flessibile ¹⁾ ed inestendibile si trova in equilibrio sotto l'azione del suo peso nelle condizioni seguenti.

La superficie, che è applicabile ad un triangolo piano isoscele di altezza h ed angolo 2α al vertice opposto alla base, viene sospesa fissando questo vertice ad un punto O e la base ad un'asta rigida rettilinea AB orizzontale, in modo che il piano normale alla base nel suo punto di mezzo C contenga il punto O , (vedi fig.). Come si disporrà questo velo triangolare nella configurazione di equilibrio e quale sarà la distribuzione degli sforzi interni? A questi quesiti risponde la presente nota.

Il velo, come si può presumere a priori, assume una configurazione cilindrica a generatrici orizzontali e questa configurazione è indipendente tanto dall'apertura 2α quanto dal peso dell'unità di superficie. La sezione normale del cilindro coincide colla funicolare di un filo la cui densità è proporzionale all'arco. Si trova infatti che l'equazione di tale linea coincide con quella della funicolare in questione, risultato questo che si può giustificare anche nel modo seguente. Il velo si può pensare composto di tante liste, di ugual spessore infinitesimo, parallele alle generatrici. L'equilibrio non viene alterato supponendo ciascuna lista irrigidita (si pensi al caso concreto di una persiana) e sostenuta nel suo centro

¹⁾ Ogni superficie è sempre perfettamente flessibile per la sua natura stessa; proprietà questa che mi propongo di mettere in evidenza in una prossima pubblicazione; la specificazione fatta non è quindi indispensabile.

dalla sezione mediana del velo. Poichè il peso di ciascuna lista è proporzionale alla sua lunghezza che a sua volta è proporzionale all'arco contato sulla mediana a partire dal vertice O , questa mediana viene a costituire un filo su cui è distribuito un carico che varia proporzionalmente coll'arco; essa si disporrà quindi secondo la funicolare ricordata.

L'equazione di questa linea, che ritengo considerata qui per la prima volta, risulta notevolmente semplice sia nella forma intrinseca che in quella cartesiana. Si giunge poi a questa forma facendo una delle più semplici applicazioni delle funzioni ellittiche di Weierstrass.

Ho esaminato da ultimo il caso in cui l'asta AB ed il punto O appartengono allo stesso piano verticale, nel qual caso, come è evidente, il velo si dispone su questo piano.

Per le notazioni e le equazioni di equilibrio sono ricorso a quelle della mia nota « Sulla meccanica delle superficie » ⁴⁾.

Il problema studiato mi è sembrato di qualche interesse non solo per la semplicità dei risultati ottenuti ma anche perchè, per quanto io sappia, è il primo che tratti la statica di una superficie pesante senza che il problema si riduca ad una questione puramente piana, quale è il caso della velaria di Bernoulli e quello di un velo rettangolare sospeso, con due lati opposti, a due aste parallele orizzontali. In questi casi il problema si riduce allo studio di una funicolare piana. Anche nel problema qui trattato, per quanto riguarda la configurazione geometrica, ci si può ridurre, come si è visto, allo studio di una funicolare piana; il problema non è però piano per quanto riguarda la distribuzione delle tensioni interne.

1. — Equazioni di equilibrio.

Assumo sulla superficie un sistema ortogonale di linee coordinate u e v coll'origine in O e tali che nella configu-

⁴⁾ *Monitore tecnico*, N. 1 e 2, (1920).

zione piana del velo le linee $v = \text{cost.}$ e $u = \text{cost.}$ risultano parallele rispettivamente all'altezza ed alla base del triangolo. Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori unitari tangenti il primo alle linee $v = \text{cost.}$, il secondo alle linee $u = \text{cost.}$, $\mathbf{u}$ essendo rivolto verso la base del triangolo. Il verso di $\mathbf{v}$ verrà precisato tra poco. I parametri u e v siano gli archi stessi, contati positivamente nel senso dei vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Poichè la superficie è inestendibile la sua *curvatura totale* in ogni suo punto si conserva inalterata comunque venga modificata la sua configurazione. Nel caso attuale questa curvatura è nulla dovunque; perciò in tutte le configurazioni possibili del velo, in particolare in quella di equilibrio, la superficie è una *rigata sviluppabile* ¹⁾.

È manifesto inoltre che in tale configurazione la superficie deve essere simmetrica rispetto al piano verticale passante per O C. Essendo escluso, per la natura stessa della questione, che nei punti di detto piano la superficie abbia delle singolarità, se ne conclude che nella configurazione di equilibrio il velo si dispone secondo una *superficie cilindrica*

⁴⁾ Cfr. ad es. L. Bianchi. « Lezioni di Geometria Differenziale », Cap. VII, Pisa, (1884).

a *generatrici orizzontali*. Quest' ultime coincidono colle linee $u = \text{cost}$; perciò il vettore $\mathbf{v}$ ha direzione e verso costanti; le sezioni normali della superficie coincidono con le linee $v = \text{cost}$.

La normale alla superficie in un suo punto risulta in pari tempo normale principale della linea $v = \text{cost}$ passante per quel punto. Si indichi con $\mathbf{n}$ il vettore unitario diretto secondo questa normale, verso il centro di curvatura.

Precisiamo ora il verso del vettore $\mathbf{v}$ fissandolo in modo che la terna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}$, risulti sinistrorsa.

Converrà fissare fin d' ora un sistema cartesiano ortogonale sinistrorso, con l' origine in O , il semiasse Oz verticale ascendente, Ox orizzontale nel piano verticale passante per OC e rivolto dalla parte di C .

In tal modo Oy risulta parallelo e collo stesso verso di $\mathbf{v}$. Sia φ l' angolo che $\mathbf{u}$ forma con Ox , contato positivamente nel senso antiorario per un osservatore orientato secondo Oy , colla determinazione zero, per $\mathbf{u}$ perpendicolare ad Ox .

Ciò premesso riportiamo le equazioni generali di equilibrio, con riferimento alla terna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}$: ¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{T_{vv} - T_{uu}}{\rho_u} - \frac{2T_{uv}}{\rho_v} + \frac{\partial T_{uu}}{\partial u} + \frac{\partial T_{uv}}{\partial v} &= U, \\ \frac{T_{uu} - T_{vv}}{\rho_v} - \frac{2T_{uv}}{\rho_u} + \frac{\partial T_{vv}}{\partial v} + \frac{\partial T_{uv}}{\partial u} &= V, \\ -\frac{T_{uu}}{R_v} - \frac{T_{vv}}{R_u} - \frac{2T_{uv}}{\tau} &= W, \end{aligned}$$

T_{uu} , T_{vv} sono le tensioni normali, T_{uv} la tensione tangenziale relative ad $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$; $\frac{1}{\rho_u}$, $\frac{1}{\rho_v}$ sono le curvatures geodetiche delle linee $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$; $\frac{1}{R_u}$, $\frac{1}{R_v}$ le curvature normali, $\frac{1}{\tau}$ la loro comune torsione; U , V , W sono le

¹⁾ Sono le (15) della mia nota, citata a pag. 44.

le componenti secondo **u**, **v**, **n** della forza agente sull' unità di superficie, nel caso nostro il peso unitario. Per le convenzioni fatte e per la natura della superficie abbiamo

$$\frac{1}{\rho_u} = \frac{1}{\rho_v} = \frac{1}{R_u} = \frac{1}{\tau} = 0 \quad ; \quad \frac{1}{R_v} = -\frac{d\varphi}{du} = -\frac{1}{\rho},$$

indicando con ρ il raggio di flessione, in valore e segno, delle linee $v = \text{cost.}$

$$U = -\gamma \sin \varphi, \quad V = 0, \quad W = -\gamma \cos \varphi,$$

se γ indica il valore costante del peso dell' unità di superficie. Dopo ciò le equazioni di equilibrio si possono scrivere:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{uu}}{\partial u} + \frac{\partial T_{uv}}{\partial v} = -\gamma \sin \varphi, \\ \frac{\partial T_{vv}}{\partial v} + \frac{\partial T_{uv}}{\partial u} = 0, \\ T_{uu} = -\gamma \rho \cos \varphi. \end{array} \right.$$

2. — Tensioni.

È manifesto che tanto ρ quanto φ sono funzioni della sola u ; tale sarà secondo l' ultima delle precedenti la tensione

$$(2) \quad T_{uu} = -\gamma \rho \cos \varphi.$$

Se ne deduce, tenuto presente che $\rho = \frac{du}{d\varphi}$,

$$\frac{\partial T_{uu}}{\partial u} = \frac{dT_{uu}}{du} = -\gamma \left\{ \cos \varphi \frac{d\rho}{du} - \sin \varphi \right\}.$$

In virtù di questa, dalla 1^a delle (1) si ricava

$$\frac{\partial T_{uv}}{\partial v} = \gamma \left\{ \cos \varphi \frac{d\rho}{du} - 2 \sin \varphi \right\}.$$

da cui integrando

$$T_{uv} = \gamma \left\{ \cos \varphi \frac{d\rho}{du} - 2 \sin \varphi \right\} v + \text{funzione della sola } u.$$

Per ragioni di simmetria la linea $v = 0$ è linea principale degli sforzi interni, vi è quindi $T_{uv} = 0$. Ciò richiede che la funzione addittiva, a priori arbitraria, che compare nella precedente, sia identicamente nulla. In definitiva si ha

$$(3) \quad T_{uv} = \gamma \left\{ \cos \varphi \frac{d\rho}{du} - 2 \sin \varphi \right\} v.$$

Per questa, dalla 2ª delle (1), con facile calcolo si deduce

$$(4) \quad T_{uv} = -\frac{\gamma}{2} \left\{ \cos \varphi \frac{d^2 \rho}{du^2} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{d\rho}{du} - \frac{2 \cos \varphi}{\rho} \right\} v^2 + f(u),$$

in cui $f(u)$ è una funzione della sola u , che verrà determinata in seguito.

Le (2), (3) e (4), dato γ , esprimono le tensioni in funzione delle coordinate u e v . Quest'ultima vi compare esplicitamente, mentre u interviene implicitamente negli elementi geometrici ρ e φ delle sezioni normali della superficie e nella $f(u)$. Per determinare questi elementi e la $f(u)$ ricorreremo alle condizioni al contorno.

3. — Condizioni al contorno.

Il contorno del velo è costituito dai lati curvilinei OA, OB e dalla base AB.

Alla base la superficie si è supposta saldata ad un'asta rigida, atta a reagire in modo da equilibrare gli sforzi interni. Sui lati curvilinei invece non agisce alcuna forza esterna. Perciò su questi deve essere nulla la forza derivante dalla tensione e che corrisponde alla normale $\mathbf{a}$ (vettore unitario) al contorno e tangente alla superficie. Dovrà essere cioè $\beta \mathbf{a} = 0$, se con β si indica l'omografia degli sforzi. Assumendo $\mathbf{a}$ rivolto all'interno del triangolo, risulta

$$\mathbf{a} = \mathbf{u} \sin \alpha \mp \mathbf{v} \cos \alpha,$$

valendo il segno $-$ sul lato OA, la cui equazione è $v = u \tan \alpha$, il segno $+$ sul lato OB, di equazione $v = -u \tan \alpha$, (2α è l'angolo al vertice O del velo).

Pertanto, poichè è

$$\beta \mathbf{u} = T_{uu} \mathbf{u} + T_{uv} \mathbf{v}, \quad \beta \mathbf{v} = T_{vv} \mathbf{v} + T_{uv} \mathbf{u},$$

su due lati OA e OB deve essere

$$\beta \mathbf{a} = \sin \alpha (T_{uu} \mathbf{u} + T_{uv} \mathbf{v}) \mp \cos \alpha (T_{vv} \mathbf{v} + T_{uv} \mathbf{u}) = 0,$$

da cui seguono le due condizioni al contorno

$$(5) \quad \begin{cases} \sin \alpha T_{uu} = \pm \cos \alpha T_{uv}, \\ \sin \alpha T_{uv} = \pm \cos \alpha T_{vv}, \end{cases} \quad \text{per } v = \pm u \operatorname{tg} \alpha.$$

4. — Equazione intrinseca delle sezioni normali.

Per le (2) e (3) la 1^a delle equazioni al contorno fornisce l'equazione

$$-\rho \cos \varphi = \left(\cos \varphi \frac{d\rho}{du} - 2 \sin \varphi \right) u^{-1}.$$

È questa l'equazione differenziale delle sezioni normali della superficie cilindrica.

In questa equazione non compaiono nè γ , nè α . Perciò la figura di equilibrio è indipendente dal peso dell'unità di superficie e dall'angolo opposto alla base.

Posto $\rho = \frac{du}{d\varphi} = u'$ e quindi $\frac{d\rho}{du} = \frac{u''}{u'}$, l'equazione precedente si può scrivere

$$\cos \varphi (u'^2 + uu'') = 2 \sin \varphi \cdot uu'',$$

da cui

$$\frac{1}{uu'} \frac{d(uu')}{d\varphi} = 2 \operatorname{tg} \varphi.$$

Il suo integrale generale, tenuto presente che deve essere $u \geq 0$, è

$$(6) \quad u = \sqrt{c \operatorname{tg} \varphi + c'} \quad (c \text{ e } c' \text{ costanti d'integrazione}).$$

¹⁾ Effettivamente i due membri dell'equazione risulterebbero col fattore comune $\operatorname{tg} \alpha$; questo si può eliminare essendo da escludersi per la natura stessa del problema il valore 0 di α , riducendosi in tal caso il velo ad una linea di peso nullo. Corrispondentemente l'equazione stessa diviene un'identità. Analogamente è da escludersi il valore $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Derivando rispetto a φ , ricordato che $u' = \rho$, si ottiene

$$(6') \quad \rho = \frac{c}{2u \cos^2 \varphi}, \quad ^1)$$

dalla quale, eliminando φ per mezzo della (6),

$$(7) \quad \rho = \frac{1}{2c} \left\{ \frac{c^2 + c'^2}{u} - 2c' u. + u^2 \right\}.$$

È questa *l'equazione intrinseca* delle sezioni normali della superficie. Sulla sezione mediana è $0 \leq u \leq h$; sulle altre si ha genericamente $v \cotg \alpha \leq u \leq h$.

Supposta h (altezza del velo) infinitamente grande, fisso restando α (con che la base AB ed il velo stesso diventano infinitamente grandi) fissati c e c' , la (7) definisce una linea il cui raggio di curvatura, da ∞ nell'origine $u = 0$, decresce fino ad un minimo nel punto M, dove

$$u = u_1 = \sqrt{\frac{1}{3} \left(c' + \sqrt{3c^2 + 4c'^2} \right)},$$

ritorna quindi a crescere indefinitamente con u .

Verrà indicato in seguito un criterio per la determinazione delle costanti c e c' .

Convieni però rilevare subito che c non può assumere valori negativi. Infatti dalla (6') risulta che ρ ha sempre lo stesso segno e precisamente quello di c . D'altra parte per la (2), dovendo essere per la flessibilità del velo $T_{uu} \leq 0$, $\cos \varphi$ ha lo stesso segno di ρ e quindi di c . Poichè, seguendo la mediana da O al punto C, che si è supposto dalla parte delle x positive, si passa necessariamente per punti in cui è $\frac{dx}{du} = \cos \varphi > 0$, ne segue che anche ρ e c sono maggiori di zero. Nel caso in cui C si trova sull'asse delle z si ha il valore minimo zero per c , come si vedrà alla fine della nota.

¹⁾ Per la catenaria omogenea si ha invece $\rho = c / \cos^2 \varphi$ ed in luogo della (6) $u = c \operatorname{tg} \varphi + c'$.

Quanto alla costante c' essa può assumere, compatibilmente colle condizioni del problema, qualsiasi valore reale. Per $c' > 0$ e $c > 0$, ad $u = \sqrt{c'}$ corrisponde un punto V in cui per la (6) è $\varphi = 0$ (punto più basso della curva).

Poiché è $\sqrt{c'} < u_i$ ne segue che V, quando esiste, è compreso tra O ed il punto M in cui ρ assume il valore minimo.

La linea definita dalla (7) coincide colla funicolare di un filo il cui peso unitario è direttamente proporzionale all'arco u , (peso unitario $= \mu u$). Per dimostrarlo eliminano la tensione T dalle due equazioni intrinseche di equilibrio del filo ¹⁾

$$\frac{dT}{du} = \mu u \sin \varphi \quad , \quad \frac{T}{\rho} = \mu u \cos \varphi .$$

Si ottiene così

$$u \sin \varphi = \rho \cos \varphi + u \left(\cos \varphi \frac{d\rho}{du} - \sin \varphi \right) ,$$

che, salvo la forma, coincide coll'equazione differenziale considerata in principio di questo numero, dalla quale si è poi dedotta la (7). Ciò dimostra il nostro asserto.

5. — Valutazione delle tensioni.

Definita con la (7) la configurazione geometrica del velo, si possono dare esplicitamente in funzione di u e v le tensioni. In virtù delle (6) e (7) le (2), (3) e (4) divengono infatti

$$T_{uu} = - \frac{\gamma}{2u} \sqrt{(u^2 - c')^2 + c^2} ,$$

$$T_{uv} = - \frac{\gamma v}{2u^2} \sqrt{(u^2 - c')^2 + c^2} ,$$

$$T_{vv} = - \frac{\gamma v^2}{2u^3} \cdot \frac{c^2 + c'^2 - c' u^2}{\sqrt{(u^2 - c')^2 + c^2}} + f(u) .$$

¹⁾ Cfr. ad es. R. Marcolongo. « Meccanica Razionale ». Vol. I, p. 299; Milano, Hoepli (1917).

La $f(u)$ va determinata in guisa da soddisfare alla 2^a delle condizioni al contorno (5).

Si trova così

$$f(u) = -\gamma \operatorname{tg} \alpha \frac{u(u^2 - c')}{\sqrt{(u^2 - c')^2 + c^2}}.$$

Con ciò le tensioni, una volta note c e c' , sono completamente determinate.

Esse sono proporzionali a γ ; T_{uu} e T_{uv} sono indipendenti da α , che compare soltanto in T_{vv} nel termine $f(u)$, il quale rappresenta la tensione T_{vv} sulla mediana $v = 0$. Dal confronto di T_{uu} con T_{uv} si ha la notevole relazione

$$T_{uu} : T_{uv} = u : v.$$

Come è manifesto le tre tensioni al finito sono dovunque finite, salvo nel vertice O. Ciò del resto corrisponde alla natura stessa della questione, in quanto tali tensioni devono equilibrare forze finite concentrate nel punto O.

Così ad es. la forza risultante dovuta alla T_{uu} lungo una data generatrice $u = \text{cost}$ è

$$\int_{-u \operatorname{tg} \alpha}^{u \operatorname{tg} \alpha} T_{uu} dv = -\gamma \operatorname{tg} \alpha \sqrt{(u^2 - c')^2 + c^2},$$

che per $u = 0$ assume il valore finito $-\gamma \operatorname{tg} \alpha \sqrt{c^2 + c'^2}$ e rappresenta la forza, secondo u , che in O è applicata alla superficie.

6. — Equazione cartesiana delle sezioni normali.

In base alle convenzioni fatte (n. 1) e per la (6), su una generica sezione normale ($v = y = \text{cost}$) si ha

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{du} = \cos \varphi = \frac{c}{\sqrt{(u^2 - c')^2 + c^2}}, \\ \frac{dz}{du} = \sin \varphi = \frac{u^2 - c'}{\sqrt{(u^2 - c')^2 + c^2}}. \end{array} \right.$$

Poichè per $u = 0$ è $x = z = 0$, dalle (8) segue

$$x = c \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(u^2 - c')^2 + c^2}}, \quad z = \int_0^u \frac{(u^2 - c') du}{\sqrt{(u^2 - c')^2 + c^2}}.$$

Si può eseguire facilmente l'inversione di questi integrali manifestamente ellittici ed eliminare quindi la u .

A questo scopo si ponga

$$u^2 - c' = \xi - \frac{c'}{3}; \quad e_1 = -\frac{2}{3}c', \quad e_2 = \frac{c'}{3} + ic, \quad e_3 = \frac{c'}{3} - ic,$$

essendo evidentemente $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

Si ottiene così, senza difficoltà

$$x = c \int_{e_1}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{4(\xi - e_1)(\xi - e_2)(\xi - e_3)}},$$

$$z = -\frac{c'}{3c}x + \int_{e_1}^{\xi} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{4(\xi - e_1)(\xi - e_2)(\xi - e_3)}}.$$

I due integrali che qui compaiono sono (a meno del segno e limiti a parte) i noti integrali ellittici di 1^a e 2^a specie, in forma normale. Introducendo le funzioni ellittiche p e ζ di Weierstrass, corrispondenti alle radici e_1, e_2, e_3 già assegnate, si ottiene ¹⁾:

$$(9) \quad p\left(\omega - \frac{x}{c}\right) = \xi = u^2 + e_1,$$

$$(10) \quad \zeta\left(\omega - \frac{x}{c}\right) = \frac{c'}{3c}x + z + \zeta\omega,$$

ω essendo il semiperiodo reale della p . Nella (10) è già eliminato il parametro u ; essa è l'equazione *cartesiana* delle sezioni normali della superficie. Come già l'equazione intrinseca (7) anche questa si presenta in forma notevolmente semplice.

¹⁾ Cfr. p. es. Tannery et Molk. « *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques* », t. IV, p. 57-61; Paris, Gauthier-Villars, (1902).

Dalle (9) e (10) appare subito che le costanti c e c' si possono determinare in modo che x e z , per un determinato valore di u , assumano valori assegnati, naturalmente compatibili con tale valore di u . Ciò traduce la circostanza che, fissata la superficie in O , si può assegnare una determinata posizione per una data generatrice $u = h = \text{cost.}$ della superficie, cioè per l'asta, base del triangolo, considerata al n. 1. Ben inteso che in tal posizione l'asta deve essere orizzontale e simmetrica rispetto al piano $y = 0$ ed in modo che la distanza del suo centro C da O non superi h .

Dalle (9) segue ancora che al crescere indefinito di u da 0 ad ∞ la x corrispondente varia tra $x = 0$ ed $x = c\omega$. Corrispondentemente la z dal valore 0 scende ad un valore minimo, nel punto più basso, quando esiste, quando cioè $c' > 0$, per $p \left(\omega - \frac{x}{c} \right) = -\frac{c'}{3}$, ritornando quindi a crescere indefinitamente. Da tutto ciò risulta che la sezione mediana ha una *proiezione orizzontale finita* eguale a $c\omega$ ed un *asintoto verticale* $\left(\text{è } \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ per } u = \infty \text{ in virtù della (6)} \right)$ al finito.

7. — Velo verticale.

Nel caso speciale $c = 0$ si ha senz'altro dalle (8)

$$\text{sen } \varphi = \frac{u^2 - c'}{|u^2 - c'|} = \pm 1.$$

Come è evidente, la superficie è piana verticale; quindi l'asta AB ed il vertice O sono nello stesso piano verticale. Si possono presentare ora tre casi:

- 1.° il velo ha una duplicatura (esso pende in parte dall'asta e in parte dal punto O);
- 2.° il velo è sospeso all'asta;
- 3.° il velo è sospeso al vertice O .

Il valore $+1$ di $\text{sen } \varphi$ vale pel 1.° caso, limitatamente alla porzione che pende dall'asta e pel 2.° caso; il valore

— 1 vale pel 1.^o caso per la porzione che pende dal vertice e pel 3.^o caso.

Corrispondentemente le tensioni diventano (n. 5):

$$T_{uu} = \mp \frac{\gamma}{2u} (u^2 - c'),$$

$$T_{uv} = \mp \frac{\gamma v}{2u^2} (u^2 - c'),$$

$$T_{vv} = \pm \frac{\gamma v^2}{3u^3} c' \pm \frac{\gamma \operatorname{tg} \alpha}{2} u.$$

Quanto a c' si ha nel 1.^o caso $c' = h^2$, se $u = h$ è la generatrice in cui ha inizio la duplicatura; nel 3.^o caso è ancora $c' = h^2$, h essendo la distanza del vertice dalla base del triangolo; nel 2.^o è $c' = 0$.

Nei due ultimi casi si può pensare un velo caricato di un peso k , affidato al vertice O nel 2.^o caso, all'asta nel 3.^o caso, (purchè il centro di massa del carico sia nel piano mediano dell'asta). Allora i rispettivi valori di c' sono

$$-\frac{k}{\gamma \operatorname{tg} \alpha}, \quad h^2 + \frac{k}{\gamma \operatorname{tg} \alpha}.$$

Milano, 9 Settembre 1920.