II. Ueber die Veränderung der Form und des Volumens dielectricischer Körper unter Einwirkung electricischer Kräfte;

von D. J. Korteweg in Breda.

1. In der vorliegenden Abhandlung wollen wir versuchen zu beweisen, dass man nach der Theorie der dielectrischen Polarisirung Volumenveränderungen eines dielectrischen Körpers unter Einwirkung einer electricischen Kraft voraus zu sehen und zu berechnen im Stande ist.

Wir gehen dabei von der auch durch Clausius¹⁾ zur Grundlage seiner Berechnungen erwählten Hypothese aus, dass sich im Innern des dielectrischen Stoffes leitende Körperchen, eingefügt in ein nichtleitendes Medium, befinden, deren Gestalt und gegenseitige Lage wir unbestimmt lassen können.

Es sei k die specifische inductive Capacität eines isotropen dielectrischen Stoffes. In einem solchen ist der Coëfficient k von der Richtung der electromotorischen Kraft unabhängig; wenn man den Stoff aber einseitig zusammendrückt, muss k für verschiedene Richtungen verschieden werden, ganz so, wie es durch Boltzmann²⁾ für nicht isotrope Stoffe experimentell nachgewiesen ist. Bezeichnet also α den relativen Werth der einseitigen Compression, so wollen wir mit $k+x_1\alpha$ die specifische inductive Capacität in der Richtung der Compression und mit $k+x_2\alpha$ die in der Richtung senkrecht zur Compression bezeichnen.

Es sei weiter $T\omega$ die Arbeit, deren man bedarf, um einem Volumenelemente ω des isotropen dielectrischen Stoffes die einseitige Compression α zu ertheilen. Auch diese Arbeit wird für alle Compressionsrichtungen dieselbe sein, wenn wenigstens der Stoff keiner electromotorischen Kraft ausgesetzt ist. Bei Anwesenheit einer solchen Kraft

1) Clausius, Die mechanische Wärmetheorie. 2. p. 66. 1879.

2) Boltzmann, Pogg. Ann. 153. p. 531. 1874.

F treten aber im Innern des Stoffes electriche Kräfte¹⁾ auf, wodurch sich die Compressionsarbeit ändert und dabei für verschiedene Richtungen verschieden ist. Mit $\omega(T + \Delta T_1)$ bezeichnen wir die Arbeit einer einseitigen, der electromotorischen Kraft F gleichgerichteten, mit $\omega(T + \Delta T_2)$ die einer zur Kraft F senkrecht gerichteten Compression.

2. Wir werden das folgende einfache electrostatische Princip benutzen:

Ein Conductor A werde wechselsweise mit einer bestimmten Quantität φ positiver Electricität geladen und wieder entladen. In seiner Nähe befinde sich eine gewisse Anzahl von isolirten leitenden Körpern B , ursprünglich im neutralen Zustande. Es sei V_1 der Werth des Potentials des geladenen Conductors A bei einer gewissen Stellung der Körper B . Wir verschieben diese Körper B , bis sie in eine neue Stellung angelangt sind, indem wir sie zugleich durch Druck- und Ziehkräfte beliebigen Formveränderungen unterwerfen. Der geladene Conductor möge dadurch schliesslich ein anderes Potential V_2 angenommen haben. Es ist dann $\frac{1}{2}\varphi(V_1 - V_2)$ der Werth der Arbeit, welche die electriche Kräfte während der Verschiebung und Formveränderung der Körper B geleistet haben.

Die Richtigkeit dieses Principes ergibt sich leicht aus der Betrachtung des folgenden Kreisprocesses:

1) Man ladet den Conductor A , wozu eine Arbeit $\frac{1}{2}V_1\varphi$ erforderlich ist; 2) man verschiebt die vollkommen elastisch gedachten Körper B , indem man sie Formver-

1) Eigentlich bestehen diese Kräfte ausschliesslich aus den Druckwirkungen der in den leitenden Körperchen erregten Influenzelectricität gegen das nicht leitende Medium. Theilweise kann man zwar diese Druckwirkungen als gegenseitige Anziehungen und Abstossungen der leitenden Körperchen auffassen; sie aber gänzlich dadurch zu ersetzen, wäre nur dann erlaubt, wenn man von vornherein die leitenden Körperchen dem nicht leitenden Medium gegenüber als incompressibel betrachten könnte. Wir werden aber sehen, dass man dadurch mit gewissen Thatsachen in Widerspruch kommen würde.

änderungen unterwirft; die dazu nothwendige Arbeit sei L_1 ; 3) man entladet A , wodurch eine Arbeit $\frac{1}{2} V_2 \varphi$ erzeugt wird; 4) man bringt die Körper B in die erste Stellung zurück, wobei man sie ihre frühere Gestalt wieder einnehmen lässt. Die dabei erzeugte elastische Arbeit sei L_2 .

Da die Summe aller Arbeit am Ende des Kreisprocesses gleich Null sein muss, so ist:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} V_1 \varphi + L_1 &= \frac{1}{2} V_2 \varphi + L_2 \\ L_2 - L_1 &= \frac{1}{2} (V_1 - V_2) \cdot \varphi. \end{aligned}$$

Da aber die Körper B ihre frühere Gestalt wieder zurückbekommen haben, ist die Summe aller elastischen Arbeit gleich Null, und $L_2 - L_1$ stellt somit die elektrische Arbeit während der Verschiebung und Formveränderung dar.

3. Ein rechtwinkliges Parallelepiped aus dielectrischem Stoffe, dessen Kanten und dessen Volumen wir resp. mit a , b , c und $\omega = abc$ bezeichnen, befinde sich in der Entfernung r vom Mittelpunkte eines sphärischen Conductors vom Radius R , welcher mit einer gewissen Quantität φ positiver Electricität geladen ist. Im Innern des Parallelepipeds wird dann eine electromotorische Kraft F wirken, die im allgemeinen vom Verhältnisse seiner Kanten a , b , c und von seiner Orientirung abhängig und in verschiedenen Punkten verschieden sein wird. Falls aber die Entfernung r im Vergleich mit den Kanten a , b , c und dem Radius R als sehr gross betrachtet werden kann, und falls ebenso die Längsdimension a die beiden anderen Dimensionen weit übertrifft und zugleich ihre Richtung mit der Richtung der Entfernung r zusammenfällt, dann ist:

$$F = \frac{\varphi}{r^2},$$

wobei wir die Definition der electromotorischen Kraft im Innern eines Dielectricums der polaren Definition Thomson's¹⁾ der magnetisirenden Kraft anschliessen.

1) Thomson, Papers on Electrostatics and Magnetism, § 479, 517. Maxwell, Electricity and Magnetism § 395 - 400. F ist also

Das electriche Moment des Parallelepipeds wird dann sein:

$$\frac{k-1}{4\pi} \cdot F \cdot abc;$$

das Potential des Conductors wird deshalb durch die Anwesenheit des Parallelepipeds um:

$$\frac{k-1}{4\pi} \cdot \frac{F}{r^2} \cdot abc$$

verringert werden. Für dieses Potential hat man also:

$$V_1 = \frac{\varphi}{R} - \frac{k-1}{4\pi} \cdot \frac{F}{r^2} \cdot abc.$$

Wird jetzt das Parallelepiped in der Richtung der Kante a um $a\alpha$ zusammengedrückt, so verwandelt sich das Volumen abc in $abc(1-\alpha)$, die specifische inductive Capacität für die Richtung der Längsdimension a in $k+x_1\alpha$, das Potential V_1 des Conductors also in:

$$V_2 = \frac{\varphi}{R} - \frac{k+x_1\alpha-1}{4\pi} \cdot \frac{F}{r^2} \cdot (1-\alpha) \cdot abc$$

oder mit Vernachlässigung der Quadrate und Producte sehr kleiner Grössen:

$$V_2 = \frac{\varphi}{R} - \frac{k-1}{4\pi} \cdot \frac{F}{r^2} \cdot abc - \frac{x_1\alpha}{4\pi} \cdot \frac{F}{r^2} \cdot abc + \frac{(k-1)\alpha}{4\pi} \cdot \frac{F}{r^2} \cdot abc.$$

4. Wir denken uns jetzt folgenden Kreisprocess:

1) Man ladet den Conductor, indem man jede Volumenveränderung des Parallelepipeds verhindert. Die dazu erforderliche Arbeit ist $\frac{1}{2} V_1 \varphi$; 2) man drückt das Parallelepiped in der Richtung der Längsdimension um $a\alpha$ zusammen. Die erforderliche Arbeit ist $(T + \Delta T_1) \cdot abc$; 3) man entladet den Conductor, indem man die Formveränderung des Parallelepipeds verhindert. Für die erzeugte Arbeit hat man: $\frac{1}{2} V_2 \varphi$; 4) man lässt das Parallelepiped sein früheres Volumen wieder einnehmen. Die erzeugte Arbeit ist $Tabc$.

eigentlich die electromotorische Kraft im Innern einer im dielectrischen Stoffe befindlichen, unendlich kleinen cylindrischen Höhle, deren Länge im Sinne der dielectrischen Polarisation liegt und den Radius unendlich übertrifft.

Weil wieder nach Beendigung des Kreisprocesses die Summe aller Arbeiten gleich Null sein muss, so hat man:

$$\Delta T_1 = \frac{\frac{1}{2}(V_2 - V_1) \varphi}{abc} = \frac{k - x_1 - 1}{8\pi} \cdot \alpha \cdot F \cdot \frac{\varphi}{r^2} = \frac{k - x_1 - 1}{8\pi} \cdot F^2 \cdot \alpha,$$

welche Beziehung auch unmittelbar aus dem im § 2 entwickelten Principe zu folgern ist, wenn man nur beachtet, dass beim Zusammendrücken des Parallelepipeds unter Einwirkung der electromotorischen Kraft F neben der gewöhnlichen elastischen Arbeit auch noch eine elastische Arbeit gleich der Arbeit $\frac{1}{2}(V_1 - V_2)\varphi$ der electricischen Kräfte mit geändertem Vorzeichen geleistet werden muss.

Falls man das Parallelepiped in einer Richtung senkrecht zur Entfernung r einer relativen Compression β unterwirft, findet man auf gleichem Wege:

$$\Delta T_2 = \frac{k - x_2 - 1}{8\pi} \cdot F^2 \cdot \beta.$$

5. Wir haben also bewiesen, dass zum Zusammen-drücken des Parallelepipeds ω um $a\alpha$ bei Einwirkung der electromotorischen Kraft F eine Mehrarbeit:

$$\Delta T_1 \cdot \omega = \frac{k - x_1 - 1}{8\pi} \cdot F^2 \cdot \omega \alpha = \frac{k - x_1 - 1}{8\pi} \cdot F^2 \cdot a\alpha \cdot bc$$

erforderlich ist.

Diese Mehrarbeit kann einer Veränderung des Elasticitätscoefficienten nicht zugeschrieben werden, denn sie müsste in diesem Falle mit α^2 statt mit α proportional sein. Sie kann also nur durch die Anwesenheit einer dem Drucke entgegenwirkenden constanten Kraft erklärt werden. Für den Werth dieser Kraft pro Flächeneinheit findet man:

$$p_1 = \frac{\Delta T_1 \cdot \omega}{bc \cdot a\alpha} = \frac{k - x_1 - 1}{8\pi} \cdot F^2.$$

Sie ist also proportional mit F^2 , wie es ihre Entstehungsweise aus den Kraftwirkungen der Influenzelectricität im Innern des dielectricischen Stoffes erwarten liess. Neben dieser der electromotorischen Kraft gleichgerichteten Kraft wirken zugleich senkrecht darauf pro Flächeneinheit die Kräfte:

$$p_2 = \frac{k - x_2 - 1}{8\pi} \cdot F^2.$$

Selbstverständlich treten die Kräfte p_1 und p_2 aber auch bei einem sich selbst überlassenen dielectrischen Körper auf, der sich unter der Einwirkung electromotorischer Kräfte befindet, und müssen dann Volumen- und Formveränderungen bedingen. So wird die Kraft p_1 z. B. dem Parallelepipèd eine relative Verlängerung:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{k - x_1 - 1}{8\pi \varepsilon} \cdot F^2$$

mitzuthellen streben, wo ε den Elasticitätscoëfficienten, l die Länge des Parallelepipeds, λ seine absolute Verlängerung bedeutet. Solche Volumen- und Formveränderungen dielectrischer Körper durch electromotorische Kräfte sind bisher bei den Experimenten Duter's¹⁾ und Righi's²⁾, nur noch complicirt mit den Druckwirkungen der Electricität, wahrgenommen.³⁾ Es ist aber wenig zweifelhaft, wie es sich durch die Anwesenheit von x_1 und x_2 in der betreffenden Formel zeigen wird, dass sie bei den von Duter wahrgenommenen Volumenveränderungen eine Rolle mitspielen und unter günstigen Verhältnissen an und für sich zur Erscheinung zu bringen wären.⁴⁾

6. Wir gehen jetzt dazu über, das Duter'sche Experiment zu berechnen. Hierbei wird bekanntlich eine dünnwandige gläserne Hohlkugel als Leydener Flasche verwendet

1) Compt. rend. **87**. p. 828, 960. 1878; **88**. p. 1260. 1879.

2) Compt. rend. **88**. p. 1262, 1879.

3) Sie sind auch bereits von Volpicelli, Arch. des sc. phys. et. nat. Nouv. Ser. **32**. p. 318. 1862. beobachtet. Die Red.

4) Aus den bekannten Versuchen Thomson's (Proc. R. S. 1860) ergab sich, dass eine electromotorische Kraft $F = 130$ (British. A. Unit.) zum Durchbrechen einer Luftschicht gewöhnlicher Dichte erforderlich war, und diese Kraft kann (Masson, Ann. de chim. et phys. (3) **30**. p. 49. 1850) in einigen isolirenden Flüssigkeiten bis zur zehn- und fünfzehnfachen Grösse gesteigert werden. Bei einem der Experimente Duter's würde die Glaswand einer electromotorischen Kraft 3000 widerstanden haben. Für $F = 2000$; $\varepsilon = 20\,000\,000$ (Elasticitätscoëfficient des Kautschuks) hat man aber $\frac{\lambda}{l} = \frac{k - x_1 - 1}{40\pi}$.

und ihre innere Volumenveränderung gemessen. In einem früheren Aufsatz¹⁾ haben wir dargethan, wie der innere und äussere electricische Druck auf die Kugelschale eine Volumenvergrösserung von derselben Grössenordnung, wie die von Duter wahrgenommene, verursachen muss, dass es sich also bei seinem Versuche wahrscheinlich nicht um eine fundamental neue Erscheinung handelt. Deutlich war es aber, dass zur vollständigen Berechnung der Erscheinung noch andere Kraftwirkungen herbeizuziehen sind, z.B. die durch Boltzmann a. a. O. experimentell bewiesene Anziehung dielectricischer Körper durch electricische Massen und die durch Righi a. a. O. wahrgenommene Anziehungen und Abstossungen dielectricischer Volumenelemente. Folgendes leichtverständliche Princip wird uns erlauben, alle auftretenden Kraftwirkungen mit in Rechnung zu bringen, ohne auf ihren Mechanismus tiefer einzugehen:

„Wenn ein System elastisch verbundener Körper unter der Einwirkung electricischer Kräfte im Gleichgewicht ist, so ist bei jeder verschwindend kleinen Verschiebung die Arbeit der electricischen Kräfte mit geändertem Vorzeichen gleich der Arbeit der elastischen“, weil nämlich ihre Summe gleich Null sein muss.

Die electricische Arbeit, welche bei einer Formveränderung der geladenen Glaskugel geleistet wird, ist zunächst durch Anwendung des im § 2 erwähnten Princips zu berechnen. Es bezeichne r den Radius, d die Wanddicke der Kugel, φ die Quantität positiver Electricität, womit sie geladen ist, k die specifische inductive Capacität. Wenn man dabei d als klein im Verhältniss zu r betrachtet, hat man für das innere Potential:

$$V_1 = \frac{\varphi}{kr} - \frac{\varphi}{k(r+d)} = \frac{\varphi d}{kr^2},$$

wobei das äussere Potential gleich Null genommen wird.

Verändert sich jetzt r in $r + \delta r$, d in $d + \delta d$, so findet man für das dann eintretende innere Potential:

1) Compt. rend. 88. p. 338. 1879.

$$V_2 = \frac{\varphi(d + \delta d)}{(k + \delta k)(r + \delta r)^2} = \frac{\varphi d}{k r^2} - \frac{\varphi d}{k^2 r^2} \delta k - \frac{2 \varphi d}{k r^3} \delta r + \frac{\varphi}{k r^2} \cdot \delta d,$$

weil aber nach § 1:

$$\delta k = -\frac{\delta d}{d} \cdot x_1 - 2 \cdot \frac{\delta r}{r} \cdot x_2,$$

so hat man:

$$V_2 = \frac{\varphi d}{k r^2} + \frac{\varphi(k + x_1)}{k^2 r^2} \cdot \delta d - \frac{2 \cdot \varphi \cdot (k - x_2) \cdot d}{k^2 r^3} \cdot \delta r.$$

Die während dieser Formveränderung durch die electrischen Kräfte geleistete Arbeit ist also nach § 2:

$$\frac{1}{2} \varphi (V_1 - V_2) = -\frac{\varphi^2 (k + x_1)}{2 k^2 r^2} \delta d + \frac{\varphi^2 \cdot (k - x_2) d}{k^2 r^3} \cdot \delta r.$$

Bezeichnen wir deshalb mit r und d Radius und Wanddicke der ungeladenen, mit $r + \Delta r$ und $d + \Delta d$ der geladenen, im Zustande des Gleichgewichtes zwischen electrischen und elastischen Kräften befindlichen Kugel, mit $\delta \Delta r$ und $\delta \Delta d$ eine weitere Variation der Grössen $r + \Delta d$ und $d + \Delta d$, so wird bei der zu dieser weiteren Variation gehörigen Formveränderung durch die electrischen Kräfte eine Arbeit:

$$-\frac{\varphi^2 (k + x_1)}{2 k^2 (r + \Delta r)^2} \delta \Delta d + \frac{\varphi^2 (k - x_2) d}{k^2 (r + \Delta r)^3} \delta \Delta r$$

geleistet. Dafür kann auch, wenn man, wie es gewiss erlaubt ist, Δr und Δd gegen r und d vernachlässigt, geschrieben werden:

$$-\frac{\varphi^2 (k + x_1)}{2 k^2 r^2} \delta \Delta d + \frac{\varphi^2 (k - x_2) d}{k^2 r^3} \delta \Delta r,$$

und diese Arbeit muss also der zu denselben Veränderungen gehörigen negativen elastischen Arbeit gleich sein.

7. Zur Berechnung dieser elastischen Arbeit werden wir zweitens die Formeln und Bezeichnungen aus Lamé's¹⁾ Lehrbuch verwenden. Für die zur Ausdehnung eines Parallelepipeds erforderliche Arbeit hat man:

$$\left[\frac{1}{2} N_1 \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{1}{2} N_2 \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{1}{2} N_3 \frac{\delta w}{\delta z} \right] \omega \quad \text{wo:}$$

1) Lamé, Leçons sur la théorie math. de l'élasticité. 1866. Leç. VI et VII.

$$N_1 = \lambda \theta + 2\mu \frac{\delta u}{\delta x}; \quad N_2 = \lambda \theta + 2\mu \frac{\delta v}{\delta y}; \quad N_3 = \lambda \theta + 2\mu \frac{\delta w}{\delta z};$$

$$\theta = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z}.$$

Man kann also für diese Arbeit auch schreiben:

$$\frac{1}{2} \left\{ \lambda \theta^2 + 2\mu \left[\left(\frac{\delta u}{\delta x} \right)^2 + \left(\frac{\delta v}{\delta y} \right)^2 + \left(\frac{\delta w}{\delta z} \right)^2 \right] \right\} \omega.$$

Wenn aber der Radius der Kugel auf $r + \Delta r$, die Wanddicke auf $d + \Delta d$ gebracht wird, hat man für jedes parallelepipedische Volumenelement der Kugelschale:

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\Delta d}{d}; \quad \frac{\delta v}{\delta y} = \frac{\delta w}{\delta z} = \frac{\Delta r}{r}; \quad \theta = \frac{\Delta d}{d} + \frac{2 \Delta r}{r};$$

also für die Arbeit zur Formveränderung eines solchen Elementes:

$$\frac{1}{2} \left[\lambda \left(\frac{\Delta d}{d} + \frac{2 \Delta r}{r} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{\Delta d^2}{d^2} + \frac{2 \Delta r^2}{r^2} \right) \right] \omega$$

$$= \frac{1}{2} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\Delta d^2}{d^2} + (\lambda + \mu) \frac{4 \Delta r^2}{r^2} + \lambda \frac{4 \Delta d \cdot \Delta r}{d r} \right] \omega$$

und für die ganze Arbeit, die auf der Kugelschale, deren Volumen $\Sigma \omega = 4r^2 d \pi$ ist, verwendet wird:

$$2\pi(\lambda + 2\mu) \frac{r^2}{d} \cdot \Delta d^2 + 8\pi(\lambda + \mu) \cdot d \cdot \Delta r^2 + 8\pi\lambda r \cdot \Delta d \cdot \Delta r;$$

Die Variation dieser negativen elastischen Arbeit ist, wenn Δd um $\delta \Delta d$, und Δr um $\delta \Delta r$ zunimmt:

$$\left\{ 4\pi(\lambda + 2\mu) \frac{r^2}{d} \cdot \Delta d + 8\pi\lambda r \Delta r \right\} \delta \Delta d$$

$$+ \left\{ 16\pi(\lambda + \mu) d \Delta r + 8\pi\lambda r \Delta d \right\} \delta \Delta r;$$

und diese muss der früher berechneten positiven electrischen Arbeit gleich sein.

Daraus ergibt sich:

$$4\pi(\lambda + 2\mu) \frac{r^2}{d} \cdot \Delta d + 8\pi\lambda r \cdot \Delta r = - \frac{\varphi^2(k + x_1)}{2k^2 r^2}$$

und:

$$16\pi(\lambda + \mu) d \Delta r + 8\pi\lambda r \cdot \Delta d = \frac{\varphi^2(k - x_2) d}{k^2 r^3}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen findet man:

$$\Delta r = \frac{(k + x_1) \lambda + (k - x_2) (\lambda + 2\mu)}{\mu (3\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{\varphi^2}{16 \pi k^2 r^3},$$

oder, wenn ε den Elasticitätscoefficienten:

$$\varepsilon = \frac{\mu (3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{bedeutet:}$$

$$\Delta r = \left\{ k + \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} x_1 - \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} x_2 \right\} \frac{\varphi^2}{8 \pi \varepsilon k^2 r^3}.$$

Für die Volumenvergrößerung ΔD der Hohlkugel hat man also, wenn man:

$$k + \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} x_1 - \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} x_2 = k$$

setzt und die Formel:

$$V = \frac{\varphi d}{k r^2}$$

zur Elimination von φ benutzt:

$$\Delta D = 4 \pi r^2 \cdot \Delta r = \frac{k' V^2 r^3}{2 \varepsilon d^2}.$$

Es muss also in der von uns a. a. O. in den Comptes rendus gegebenen Formel k in k' umgeändert werden, wobei dann k' wohl meistens als eine unbekannte Constante wird betrachtet werden müssen, die aber mit k doch immer von derselben Größenordnung sein wird.

8. Betrachten wir jetzt die experimentellen Resultate Duter's.¹⁾ Bei den späteren Versuchen findet er in Uebereinstimmung mit unserer Theorie ΔD proportional mit V^2 , dagegen umgekehrt proportional mit d statt mit d^2 . Der experimentelle Beweis mit nur zwei, doch nur annähernd auf 0,5 und 0,8 mm angegebenen Wanddicken erscheint uns aber ungenügend. Auch ist es auffallend, dass Duter in der ersterwähnten Abhandlung sagt: „Bei Ausführung der Messungen habe ich bemerkt, dass die Volumenveränderungen wesentlich umgekehrt proportional den Quadraten der Dicken sind.“²⁾ Diese Angabe bezieht sich

1) Duter. Compt. rend. **87**. p. 960. 1878 u. **88**. p. 1260. 1879.

2) Im Texte steht „raçines carrées“, was aber, wie aus allem übrigen hervorgeht, ein Druckfehler ist.

offenbar auf dieselben Gefässe von 0,5 und 0,8 mm Wanddicke, die er auch später verwendete. Bei einem dritten Gefässe von grösserer Wanddicke (4 mm) nahm er bei diesen ersten Versuchen keine Volumenveränderung wahr, ein Resultat, das wohl mit der citirten Proportionalität mit $\frac{1}{d^3}$, aber, wenn man beachtet, dass er beim Gefässe von 0,5 mm Wanddicke damals eine Volumenveränderung von 30 mm wahrnahm, durchaus nicht mit der später angenommenen in Uebereinstimmung gebracht werden kann. Diese spätere Annahme ist unserer Ansicht nach so sehr mit jeder theoretischen Betrachtung in Widerspruch, dass zu ihrer Erhärtung eine sehr genaue und mannichfaltige Experimentaluntersuchung nothwendig sein würde. Wenn sie sich dann unwahrscheinlicherweise bestätigen würde, so wäre man allerdings genöthigt, Erklärungsversuche mit Hülfe der dielectricischen Polarisirung und überhaupt der bekannten electricischen Kräfte aufzugeben. Die Bemerkungen Righi's a. a. O. über die Anziehung und Abstossung dielectricischer Volumenelemente sind richtig. Bei weiterer mathematischer Berechnung würde sich aber ergeben, dass auch sie zur Proportionalität mit $\frac{1}{d^3}$ führen.

Unterwerfen wir eins der Duter'schen Experimente der Berechnung, so können wir z. B. nach seinen Angaben in B. A. U. (Centimeter, Secunde, Massengramm) in unserer Formel substituiren:

$$r = 4,3; \quad d = 0,05; \quad V = 165; \quad AD = 0,0015.$$

Nach seiner Angabe des Compressibilitätscoëfficienten des Glases $\frac{11}{10\,000\,000}$, die offenbar den bekannten Versuchen Colladon's und Sturm's entlehnt ist, würde:

$$\epsilon = 900\,000\,000\,000$$

sein. Richtiger und jedenfalls in besserer Uebereinstimmung mit dem von Regnault gefundenen cubischen Compressibilitätscoëfficienten ist wahrscheinlich der von Wertheim angegebene Werth:

$$\varepsilon = 600\,000\,000\,000.$$

den wir deshalb anwenden werden.

Die Rechnung gibt dann $k' = 2,1$, was wenigstens nichts Unwahrscheinliches an sich hat.

9. Dass sich der directen experimentellen Bestimmung der Coëfficienten x_1 und x_2 bei leicht zusammendrückbaren dielectricischen Stoffen unüberwindliche Schwierigkeiten entgegenstellen werden, glauben wir nicht, ausserdem können wir mittelst der electromagnetischen Lichttheorie x_1 und x_2 aus den Aenderungen des Brechungsexponenten oder aus der beim einseitigen Zusammendrücken auftretenden Doppelbrechung berechnen. Abgesehen aber von allen experimentellen Schwierigkeiten ist selbstverständlich nur eine näherungsweise Uebereinstimmung zu erwarten, weil die absolute Constanz des Coëfficienten k und also auch von x_1 und x_2 unwahrscheinlich ist. Indem aber bei den Vibrationen des Lichtes äusserst kleine electricische Kräfte auftreten, werden die Volumenveränderungen dielectricischer Stoffe nur unter dem Einflusse grösserer electricischer Kräfte messbar. Da diese Schwierigkeit, wenn auch in geringerem Maasse, sich überall zeigt, wo es gilt, physische aus der Lichttheorie abgeleitete Grössen mit denen zu vergleichen, die durch electricische Versuche gefunden sind, so darf sie auch hier nicht von Berechnungen in dieser Richtung zurückhalten.

Nach § 1 ist für eine gleichförmige Compression θ :

$$\Delta k = \frac{1}{3} \cdot \theta \cdot x_1 + \frac{2}{3} \cdot \theta \cdot x_2.$$

Bedeutet aber n den Brechungsexponenten, so hat man:

$$k = n^2; \quad \Delta k = 2n \Delta n,$$

also:
$$x_1 + 2x_2 = \frac{6n \Delta n}{\theta}.$$

Bei den meisten Gasen ist bekanntlich annäherungsweise:

$$n^2 = 1 + \alpha \cdot d \quad (\alpha \text{ eine Constante, } d \text{ Gasdichte}),$$

also auch:
$$2n \Delta n = \alpha \cdot d \cdot \theta,$$

woraus sich ergibt:

$$x_1 + 2x_2 = 3(k - 1),$$

welche Relation aus der Gastheorie vorauszusehen war, wenn man beachtet, dass die einzelnen Gasmolecüle eine verschwindend kleine Wechselwirkung aufeinander ausüben, also ihr Moment von der Gasdichte unabhängig ist. Es muss dann nothwendig $(k - 1)$ der Anzahl der in der Volumeneinheit enthaltenen Molecüle proportional sein, also:

$$k + \Delta k - 1 = (k - 1) (1 + \theta),$$

$$\Delta k = \frac{1}{3} \theta \cdot x_1 + \frac{2}{3} \theta \cdot x_2 = (k - 1) \theta,$$

woraus sich obige Relation ergibt.

Für *CO* und *NO* ist nach den Versuchen Mascart's¹⁾

$$x_1 + 2x_2 > 3(k - 1).$$

Für Wasser sind Versuche von Jamin²⁾ und Mascart³⁾ angestellt. Nach den letzteren findet man:

$$x_1 + 2x_2 = 2,56.$$

Für Glas würde man die Versuche Neumann's⁴⁾ und Wertheim's⁵⁾ benutzen können. Jedenfalls ergeben sich aus diesen Versuchen negative Werthe für x_1 und x_2 ; auch für $x_1 + 2x_2$. Der Brechungsexponent des Glases verkleinert sich nämlich durch Druck. Dieses Resultat ist deshalb wichtig, weil es nöthigt, die Compressibilität auch der leitenden Körperchen im Dielectricum anzunehmen. Beim Glase muss man sogar voraussetzen, sie seien mehr compressibel, als das nichtleitende Medium. Sind beide gleich compressibel, so erleidet k bei gleichförmiger Compression keine Veränderung, und es ist also $x_1 + 2x_2 = 0$. Macht man nämlich alle Dimensionen, auch der leitenden Körperchen eines Dielectricums, k mal so klein, und lässt man dabei die electromotorische Kraft und die Flächen-dichtigkeit der auf den Körperchen inducirten Electricität ungeändert, so werden die electrischen Massen k^2 -mal, die

1) Mascart, Pogg. Ann. **153**. p. 149. 1874. Beibl. **1**. p. 257—263. 1877.

2) Jamin, Ann. de chim. et phys. (3) **52**. p. 163. 1858.

3) Mascart, Pogg. Ann. **153**. p. 154. 1874.

4) Neumann, Pogg. Ann. **54**. p. 449. 1841.

5) Wertheim, Compt. rend. **32**. p. 289. 1851.

Entfernungen k -mal so klein; es bleiben also die electro-motorischen Kräfte ungeändert und das Gleichgewicht ungestört. Das electricische Moment eines einzigen Körperchens ist dadurch k^3 -mal verkleinert; da aber die Anzahl derselben in der Volumeneinheit k^3 -mal so gross geworden ist, so bleibt das Gesamtmoment der Volumeneinheit, also auch die specifische inductive Capacität ungeändert.

Hieraus kann man folgern, dass für $x_1 + 2x_2 > 0$ die Compressibilität der Körperchen, für $x_1 + 2x_2 < 0$ die des Mediums die grössere ist.

Schliesslich ist es wohl kaum nothwendig zu bemerken, dass wir die angenommene Hypothese der comprimibaren leitenden Körperchen keineswegs als eine endgültige betrachten. Sie ist aber am leichtesten einer mathematischen Behandlung fähig, und die mit ihrer Hülfe gefundenen Relationen zwischen den physischen Grössen x_1 , x_2 , p_1 , p_2 und ΔD werden wahrscheinlich bei der Einführung anderer Hypothesen bestehen bleiben.

Breda, August 1879.

III. *Beobachtungen über die Unterschiede der beiden electricischen Zustände; von E. Mach und S. Doubrava.*

(Aus dem LXXX. Bd. der Sitzungsber. der k. Akad. d. Wiss. zu Wien. II. Abth. Juliheft. Jahrg. 1879; mitgetheilt von den Herren Verf.)

Schon im Herbst 1876 hat Mach eine grosse Reihe von Versuchen begonnen und im laufenden Jahre in Gemeinschaft mit Doubrava fortgesetzt, welche zum Zwecke hatten, die einfachsten Grundthatsachen zu ermitteln, auf welche sich die sogenannten Artunterschiede der beiden electricischen Zustände zurückführen lassen. Die Verschiedenheit der Büschel in Gestalt, Länge und im zeitlichen