ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

Nº 2528.

Definitive Bestimmung der Bahnen von sechs Saturnsatelliten und der Masse des Planeten.

Von Dr. *M. Wilhelm Meyer.*

Die in einem früheren Artikel mitgetheilten Beobachtungen der Saturnsatelliten von 1881 habe ich benutzt, um aus ihrer Gesammtheit die wahrscheinlichsten Bahnen dieser Körper und schliesslich die Masse des Planeten zu ermitteln. Die zu diesem Ende angewandte Methode ist dieselbe, deren sich Bessel zur Bahnbestimmung des Titan bediente und die derselbe in dieser Zeitschrift Bd. 9 p. 1 u. f. ausführlich erklärt hat. Die Methode gleicht vollkommen der für die definitive Bahnbestimmung irgend eines anderen Himmelskörpers: Es wurden bei Zugrundelegung provisorischer Bahnen nach exacten Formeln die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung bestimmt, die Differentialquotienten für die Correctionen der sechs Elemente für

die Rectascensionen und für die Declinationen berechnet und schliesslich das so entstehende System von Bedingungs- gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate auf- gelöst. Ich führe dies besonders an, um in dieser vor- läufigen Mittheilung der Meinung auszuweichen, ich möchte auch diese neuen Bahnen nach der Näherungsmethode be- stimmt haben, nach welcher ich meine 1880-er Beobachtun- gen behandeln konnte, deren Genauigkeit der der 1881-er Beobachtungen bedeutend nachsteht. Ich erwähne noch, dass eine Zusammenziehung einzelner Beobachtungen in Normalorte nicht möglich war, so dass ich für die folgenden Resultate 326 Bedingungs- gleichungen zu behandeln hatte.

In Folgendem bedeutet:

- E* die Epoche, auf welche sich die Elemente beziehen, in mittlerer Zeit von Greenwich ausgedrückt,
- L* die mittlere Länge des Satelliten in seiner Bahn, für den Abgang des Lichtes vom Planeten,
- T* seine siderische Umlaufszeit in mittlerer Zeit ausgedrückt,
- μ die mittlere tropische Bewegung in einem mittleren Tage,
- a'' die halbe grosse Axe seiner Bahn aus der Entfernung 9.53890 gesehen,
- e* die Excentricität seiner Bahn,
- π die Länge des Perisaturniums,
- N* die Länge des aufsteigenden Knotens in Bezug auf den Erdaequator,
- $\mathcal{J}$ die Neigung seiner Bahn gegen die Ebene des letzteren,
- n* die Länge des aufsteigenden Knotens in Bezug auf die Ekliptik,
- i* die Neigung seiner Bahn gegen diese Ebene.

Ich lasse nun die angenommenen provisorischen Bahnen folgen:

Enceladus	Tethys	Dione	Rhea	Titan	Japetus
$E_0 = 1881 \text{ Aug. } 15.0$	1881 Oct. 0.0	1881 Oct. 27.0	1881 Oct. 27.0	1881 Nov. 0.0	1881 Nov. 0.0
$L_0 = 12^\circ 20'$	$326^\circ 28' 5''$	$292^\circ 36'$	$241^\circ 17' 38''$	$234^\circ 34' 34''$	$200^\circ 16' 26''$
$\mu = 262^\circ 73' 186$	$190^\circ 69' 812$	$131^\circ 53' 503$	$79^\circ 69' 012$	$22^\circ 57' 700$	$4^\circ 53' 804$
$a'' = 34.3$	42.5	54.4	76.0	176.9	514.4
$e = 0.0$	0.015	0.015	0.015	0.028625	0.028625
$\pi = 0^\circ$	230°	180°	240°	$277^\circ 0'$	$355^\circ 0'$
$N = 122^\circ 55'$	$122^\circ 55'$	$122^\circ 55'$	$122^\circ 55'$	$122^\circ 55'$	$52^\circ 50'$
$\mathcal{J} = 6^\circ 35'$	$6^\circ 35'$	$6^\circ 35'$	$6^\circ 35'$	$6^\circ 35'$	$14^\circ 8'$

Zur Bahnbestimmung sind mit Ausnahme von zwei ausgeschlossenen Rectascensionsdifferenzen von Enceladus alle früher mitgetheilten Beobachtungen mit gleichem Gewichte verwendet, so dass für Enceladus 58 Bedingungs- gleichungen entstanden, für Tethys 68, für Dione 64, für Rhea 60, für Titan 44 und für Japetus 32. Für Tethys ist die ganze Bahnrechnung von meinem früheren Collegen Herrn Arthur Kammermann ausgeführt, der mir auch bei den übrigen Rechnungen wesentliche Dienste geleistet hat. Ich benutze mit Freuden diese Gelegenheit, ihm meinen Dank aus- zusprechen.

Die nun folgende Tafel enthält die corrigirten Elemente.

Elemente der Saturnsatelliten.

Enceladus	Tethys	Dione	Rhea	Titan	Japetus
$E = 1881 \text{ Nov. } 0.0$	$1881 \text{ Nov. } 0.0$	$1881 \text{ Nov. } 0.0$	$1881 \text{ Nov. } 0.0$	$1881 \text{ Nov. } 0.0$	$1881 \text{ Nov. } 0.0$
$L = 82^{\circ} 54' 32''$	$117^{\circ} 52' 14''$	$98^{\circ} 26' 20''$	$198^{\circ} 52' 41''$	$234^{\circ} 19' 22''$	$200^{\circ} 8' 53''$
$T = 1^d 8^h 53^m 6^s.92$	$1^d 21^h 18^m 25^s.62$	$2^d 17^h 41^m 9^s.29$	$4^d 12^h 25^m 11^s.57$	$15^d 22^h 41^m 23^s.16$	$79^d 7^h 49^m 24^s.84$
$\mu = 262^{\circ} 73' 16.44$	$190^{\circ} 69' 85.52$	$131^{\circ} 53' 51.21$	$79^{\circ} 69' 02.18$	$22^{\circ} 57' 70.74$	$4^{\circ} 53' 82.73$
$a'' = 34^{\circ} 35' 01''$	$42^{\circ} 75' 14''$	$54^{\circ} 75' 74''$	$76^{\circ} 48' 38''$	$176^{\circ} 9' 102''$	$514^{\circ} 7' 108''$
$a = 3.866$	4.812	6.163	8.608	19.911	57.930
$a_c = 34^{\circ} 44' 1''$	$42^{\circ} 65' 5''$	$54^{\circ} 64' 0''$	$76^{\circ} 31' 5''$	—	$515^{\circ} 56''$
$e = 0.00806$	0.00853	0.00443	0.00364	0.029869	0.028916
$\pi = 230^{\circ} 4' 0''$	$223^{\circ} 47' 49''$	$232^{\circ} 21' 32''$	$229^{\circ} 52' 44''$	$270^{\circ} 40' 46''$	$353^{\circ} 5' 7''$
$N = 125^{\circ} 27' 18''$	$127^{\circ} 6' 55''$	$125^{\circ} 36' 5''$	$126^{\circ} 29' 15''$	$123^{\circ} 55' 56''$	$52^{\circ} 36' 46''$
$\mathcal{F} = 5^{\circ} 53' 5''$	$5^{\circ} 54' 57''$	$6^{\circ} 55' 5''$	$6^{\circ} 40' 0''$	$6^{\circ} 35' 22''$	$14^{\circ} 5' 56''$
$n = 169^{\circ} 29' 50''$	$169^{\circ} 42' 58''$	$167^{\circ} 58' 2''$	$168^{\circ} 29' 51''$	$168^{\circ} 9' 35''$	$142^{\circ} 17' 27''$
$i = 27^{\circ} 16' 4''$	$27^{\circ} 24' 18''$	$28^{\circ} 1' 8''$	$27^{\circ} 54' 27''$	$27^{\circ} 38' 49''$	$18^{\circ} 26' 50''$

In dieser Tabelle sind drei Werthe der halben grossen Axe der verschiedenen Bahnen gegeben, von denen der erste in Secunden angegeben ist, der zweite in Theilen des aequatorealen Radius der Saturnkugel nach meinen früher mitgetheilten Messungen, der dritte aber aus dem dritten Keplerschen Gesetze folgt, indem man von der Titansbahn ausgeht. Die mittleren Bewegungen der Satelliten folgen mit Ausnahme von Titan aus einer Vergleichung der hier angegebenen mittleren Längen mit denen, welche Jacob aus der Gesammtheit seiner Beobachtungen von 1857 und

1858 abgeleitet hatte; die für Titan aus der Vergleichung der Bessel'schen Länge von 1830 mit der 1881-er. Ich habe es vorgezogen, nicht einzelne alte Beobachtungen der Satelliten zur Bestimmung der mittleren Bewegung anzuwenden, sondern neuere aber bedeutend sicherere Längen, welche aus einer grösseren Anzahl Beobachtungen gebildet wurden.

Die folgende Tabelle enthält die mittleren Fehler, mit welchen die angeführten Elemente und die Beobachtungen behaftet bleiben:

Enceladus	Tethys	Dione	Rhea	Titan	Japetus
$L = \pm 0^{\circ} 23' 15''$	$0^{\circ} 7' 53''$	$0^{\circ} 5' 53''$	$0^{\circ} 4' 6''$	$0^{\circ} 1' 53''$	$0^{\circ} 1' 41''$
$a'' = \pm 0^{\circ} 161''$	$0^{\circ} 0947''$	$0^{\circ} 0854''$	$0^{\circ} 0905''$	$0^{\circ} 0972''$	$0^{\circ} 2890''$
$e = \pm 0.00632$	0.00260	0.00152	0.00127	0.000387	0.000560
$\pi = \pm 67^{\circ} 36' 40''$	$6^{\circ} 59' 59''$	$16^{\circ} 25' 26''$	$11^{\circ} 53' 45''$	$1^{\circ} 4' 25''$	$1^{\circ} 10' 48''$
$n = \pm 0^{\circ} 39' 51''$	$0^{\circ} 19' 34''$	$0^{\circ} 12' 26''$	$0^{\circ} 8' 46''$	$0^{\circ} 4' 6''$	$0^{\circ} 6' 45''$
$i = \pm 0^{\circ} 22' 23''$	$0^{\circ} 7' 30''$	$0^{\circ} 6' 2''$	$0^{\circ} 4' 24''$	$0^{\circ} 2' 4''$	$0^{\circ} 1' 39''$
$\epsilon = \pm 0^{\circ} 746''$	$0^{\circ} 417''$	$0^{\circ} 389''$	$0^{\circ} 360''$	$0^{\circ} 340''$	$0^{\circ} 758''$

Hier bedeutet ϵ die mittlere Abweichung einer Beobachtung von der betreffenden definitiven Bahn. Es unterliegt keinem Zweifel, dass ein grosser Theil dieser Abweichungen von Störungen herrührt, welchen die Satelliten unter sich ausgesetzt sind; sie werden namentlich den Perisaturnien ihrer Bahnen eine wahrscheinlich ziemlich schnelle Bewegung mittheilen. Dieses gilt namentlich für Enceladus, der eine mit Dione bis auf einen Unterschied von nur 5 Minuten commensurable Umlaufzeit besitzt und dessen Perisaturnium wegen seiner Nähe zum Planeten in Folge der Abplattung

des Saturn und der Abweichung seiner Ringe einer bedeutenden säcularen Variation unterworfen sein muss. Hieraus erklärt sich die besonders grosse Unsicherheit, mit welcher dieses Element behaftet bleibt. Desgleichen müssen die Störungen zwischen Titan und Japetus bedeutende sein, da die Umlaufzeit des letzteren nahezu fünfmal grösser ist, als die des ersteren. Die Vertheilung der übrig bleibenden Fehler der einzelnen Beobachtungen, welche sichtbar systematischer Natur sind, sprechen deutlich für diese Ueberzeugung. Ich gebe dieselben hier folgend:

1883	Rectascensionen						Declinationen					
	Encel.	Tethys	Dione	Rhea	Titan	Japetus	Encel.	Tethys	Dione	Rhea	Titan	Japetus
Aug. 15	$-0^{\circ} 31'$	$-0^{\circ} 12'$	$-0^{\circ} 34'$	$-0^{\circ} 05'$	—	—	$-0^{\circ} 65'$	$+0^{\circ} 50'$	$+0^{\circ} 04'$	$-0^{\circ} 59'$	—	—
21	$+0^{\circ} 71'$	$+0^{\circ} 23'$	$-0^{\circ} 83'$	—	—	—	$-1^{\circ} 31'$	$+0^{\circ} 46'$	$-0^{\circ} 31'$	—	—	—
25	$+0^{\circ} 64'$	$-0^{\circ} 30'$	$+0^{\circ} 23'$	$+0^{\circ} 14'$	$-0^{\circ} 33'$	—	$+1^{\circ} 40'$	$+0^{\circ} 26'$	$-0^{\circ} 41'$	$+0^{\circ} 24'$	$-0^{\circ} 10'$	—
29	—	$-0^{\circ} 16'$	$-0^{\circ} 10'$	$+0^{\circ} 11'$	$+0^{\circ} 16'$	—	—	$-0^{\circ} 30'$	$-0^{\circ} 23'$	$+0^{\circ} 06'$	$-0^{\circ} 09'$	—

1883	Rectascensionen						Declinationen					
	Encel.	Tethys	Dione	Rhea	Titan	Japetus	Encel.	Tethys	Dione	Rhea	Titan	Japetus
Sept. 3	(+1°71)	—0°02	—0°36	+0°42	—	—	—0°98	+0°22	—0°87	—0°15	—	—
4	—1.23	+0.62	—0.09	+0.19	—0°13	—	—0.41	—0.16	—0.19	—0.19	—0°01	—
4	—1.22	—	—	—	—	—	—0.86	—	—	—	—	—
13	+0.08	—0.54	—0.63	—0.01	+0.07	+0°16	—0.78	+1.15	+0.86	0.00	—0.12	—0°09
13	—	+0.14	—	—	—	—	—	—0.09	—	—	—	—
16	+0.21	—0.05	—0.17	—0.20	—0.32	+1.22	—0.48	—0.14	—0.33	+0.10	—0.12	—0.61
16	+0.01	—	—	—	—	—	—0.46	—	—	—	—	—
17	+0.45	—	—	—	—	—	—0.83	—	—	—	—	—
29	—	+0.20	—0.08	—0.11	—	+1.04	—	+0.72	—0.40	—0.23	—	—0.46
Oct. 5	—	+0.40	—0.13	+0.21	—0.50	—	—	+0.16	—0.55	—0.24	—0.43	—
6	—	—0.01	+0.60	—0.12	—0.42	—	—	+0.24	+0.31	—0.58	—0.26	—
7	—0.21	+0.27	+0.37	+0.52	—	—	—1.13	—0.24	—0.04	+0.35	—	—
9	—0.15	+0.13	+0.39	+0.10	+0.60	—	—0.96	—0.40	—0.24	—0.02	—0.15	—
9	—1.17	—	—	—	—	—	—0.64	—	—	—	—	—
11	+1.07	+0.47	—0.18	+0.17	—	—	—0.34	+0.31	—0.07	—0.47	—	—
16	—0.37	+0.14	—0.42	+0.10	+0.19	—	+0.90	+0.01	—0.13	—0.38	—0.47	—
17	(—1.38)	—0.27	+0.18	—0.07	+0.02	—	—0.77	—0.95	+0.82	+0.14	—0.17	—
17	—	—0.11	—	—	—	—	—	—0.13	—	—	—	—
18	—	+0.09	+0.30	+0.70	—	—	—	+0.38	—0.28	+0.30	—	—
21	+1.00	—0.35	—0.17	—	—	—	+0.16	—0.06	—0.16	—	—	—
26	+0.97	—0.53	+0.22	+0.10	+0.45	—0.32	—0.49	—0.07	—0.04	+0.15	—0.19	—0.41
26	+0.93	—	—	—	—	—	+0.17	—	—	—	—	—
Nov. 4	+0.29	—0.03	+0.42	—0.26	+0.03	—1.26	+0.01	+0.36	+0.11	—0.28	+0.04	—0.30
4	—0.39	—	—	—	—	—	—0.38	—	—	—	—	—
5	—	+0.07	+0.41	+0.17	—	—	—	+0.65	—0.65	+0.32	—	—
6	—0.37	—0.33	+0.44	+0.10	+0.12	+0.71	+0.04	+0.06	—0.19	+0.11	—0.09	+0.37
7	—0.16	—0.14	+0.39	+0.06	+0.05	+0.55	+0.11	—0.17	+0.04	—0.23	—0.22	—0.21
12	—	—	—	—	—	+0.03	—	—	—	—	—	—0.28
13	—0.57	+0.10	+0.07	+0.40	—0.65	+1.05	—0.38	+0.09	—0.48	—0.26	—0.28	+0.17
14	—	+0.66	—0.38	+0.32	—0.07	+0.69	—	+0.25	+0.12	+0.04	—0.28	+0.07
18	—	+0.37	+0.05	+0.06	+0.11	+0.39	—	—0.01	—0.09	—0.02	—0.46	—0.38
20	—	+0.15	+0.58	—0.43	—0.22	—1.86	—	+1.14	+0.57	—0.29	—0.12	—0.63
22	—1.04	—0.18	—0.19	+0.12	+0.10	—0.18	—0.04	—0.02	—0.18	—0.07	—0.35	—0.08
24	—0.58	—0.24	+0.39	—0.04	+0.34	—0.59	—0.82	—0.06	—0.10	—0.06	—0.06	+0.29
30	—0.20	—	—	—	—	—	—0.49	—	—	—	—	—
Dec. 3	—	0.00	—0.11	+0.07	+0.43	—	—	—0.20	—0.23	+0.61	—0.52	—
6	—1.38	—0.49	+0.53	+0.28	+0.49	—0.79	—0.63	+0.05	+0.01	+0.30	+0.78	+0.73
9	—0.17	—	—	—	—	—	—0.34	—	—	—	—	—
19	—0.66	+0.01	+0.07	—0.94	—	—1.13	—0.74	+0.27	—0.17	—0.32	—	—0.70

Da die Bahn des Titan durch die sehr ausführlichen Untersuchungen von Bessel schon recht genau bekannt ist, namentlich auch in Bezug auf die säcularen Variationen der Elemente, so konnte eine Vergleichung zwischen meinen Resultaten mit denen von Bessel als gute Controle für die ersten gelten. Ich führe deshalb hier die Differenzen dieser beiden Bahnen an, indem ich die aus den Bessel'schen Tafeln der Bewegung des Titan folgenden Werthe (A. N. Bd. 9 p. 1 u. f.) nach Maassgabe der letzten Bessel'schen Bahn des Satelliten (A. N. Bd. 11 p. 17 u. f.) corrigire. Ich erhalte für:

$$\begin{aligned}
 & \text{M—B} \\
 L &= + 1^{\circ} 13' 12''.0 \\
 a &= + 0^{\circ} 35' 81 \\
 e &= + 0.000646 \\
 \pi &= - 0^{\circ} 15' 6'' \\
 n &= - 0 \ 0 \ 23.1 \\
 i &= + 0 \ 5 \ 15.1
 \end{aligned}$$

Differenzen, welche zu den oben mitgetheilten Resultaten Vertrauen erwecken. Hall in Washington hatte aus einigen Beobachtungen des Titan aus den Jahren 1880 die Correction der mittleren Länge des Satelliten abgeleitet und mit mir sehr nahe übereinstimmend $+1^{\circ} 10.3$ gefunden

(A. N. Nr. 2394). Die Vergleichung zwischen der 1830-er und der 1881-er Bahn ergibt die säculare tropische Bewegung des Perisaturniums und des Knotens der Titansbahn für ein julianisches Jahr

$$\begin{aligned} d\pi &= +1811''.5 \\ dn &= +35.084 \end{aligned}$$

Die Bahn des Japetus ist letzthin namentlich von Tisserand eingehender untersucht worden. (Annales de l'Observatoire de Toulouse I p. A. 51.) Der französische Gelehrte hat dabei die Beobachtungen von Washington aus dem Jahre 1874 zu Grunde gelegt. Die Unterschiede zwischen der Bahn von Tisserand und der meinigen sind:

$$\begin{aligned} M-T \\ a &= +0''.341 \\ e &= -0.00065 \\ \pi &= +5^\circ 5'.1 \\ n &= +0.1.5 \\ i &= -0.4.7 \end{aligned}$$

Hierbei ist nur der Bewegung des Knotens nach den von Tisserand angegebenen Zahlen Rechnung getragen. Die Vergleichung beider Bahnen ergibt die säculare Variation des Perisaturniums und des Knotens

$$\begin{aligned} d\pi &= +0''.726 \\ dn &= -0''.0481. \end{aligned}$$

Eine der wichtigsten Folgerungen, welche man aus der Bewegung des Satelliten ableiten kann, ist die Bestimmung der Masse des Saturn. Ich verstehe hierunter die ganze Masse des Systems, sowie sie auf andere Planeten aus grosser Entfernung störend wirkt. Um diese zu bestimmen, habe ich die direct beobachtete Bewegung ganz nach Maassgabe der Bessel'schen Formeln von dem Einflusse der Anziehung der Sonne und des Ringes befreit und ausserdem noch der Abplattung des Saturn Rechnung getragen, welche Bessel für den entfernten Titan vernachlässigen konnte, während sie für die inneren Satelliten doch sehr merklich wirkt. Ueber alle Details der Rechnung werde ich übrigens später in einer ausführlichen Arbeit specielle Mittheilung machen.

Genf 1883 Juli 13.

Ich lasse nun die sechs Werthe für die Masse folgen, wie sie jeder Satellit besonders ergibt und füge das Gewicht bei, welches ich jeder betreffenden Bestimmung zuertheilt habe. Dieses letztere ist proportional dem Quadrate der halben grossen Axe der Bahn und umgekehrt proportional den Quadraten der mittleren Fehler angenommen, mit welchen nach der Uebereinstimmung der Beobachtungen die Bestimmung dieser Axe behaftet ist.

M	Gewicht
Enceladus = 0.000284213	1.0
Tethys = 0.000288215	4.4
Dione = 0.000288531	9.1
Rhea = 0.000288898	15.5
Titan = 0.000287204	73.1
Japetus = 0.000285849	48.6

Als Mittelwerth der reciproken Masse des Saturn ergibt sich demnach aus obigen Zahlen

$$M = 3482.9 \pm 5.5$$

wo die letzte Zahl die mittlere Unsicherheit der Masse aus der mangelnden Uebereinstimmung der sechs vorhin gegebenen Werthe bedeutet.

Bessel hatte in der mehrfach erwähnten Arbeit die Masse der Saturnsringe gesondert aus der säcularen Variation der Apsidenlinie der Titansbahn abgeleitet und gefunden, dass dieselbe 118 mal geringer als die des Saturn sei. Da ich die Richtung des Perisaturniums sehr nahe mit Bessel übereinstimmend finde, erhalte ich natürlich auch die Masse der Saturnsringe unter gleichen Voraussetzungen sehr ähnlich. Die siderale Bewegung der Apsidenlinie in einem julianischen Jahre, von dem Einflusse der Sonne befreit, ergibt sich gleich 1726''.5 und daraus die reciproke Masse der Ringe

$$m = 119.1.$$

Alle Originalbeobachtungen, aus denen obige Resultate gefolgert sind, sollen nebst einer detaillirten Beschreibung des Zehnzöllers in einer umfangreicheren Arbeit wie gewöhnlich in den »Mémoires de la Société de Physique de Genève« im Laufe dieses Jahres erscheinen. Ich werde derselben wahrscheinlich auch Tafeln der Bewegungen der Satelliten beifügen.

Dr. Wilhelm Meyer.

Notiz über die Sichtbarkeit schwacher Sterne in der Nähe von helleren.

Ich wurde aufgefordert, eine zwar alte, doch interessante Beobachtung auch den Astr. Nachr. mitzutheilen. — Ich habe einen Theil davon schon im V. Hefte der »Pubblicazioni del R. Osservatorio di Brera« beschrieben. Es ist dies die längere Sichtbarkeit von feinen Begleitern grosser Sterne bis zum Aufgang der Sonne, während Sterne, die heller sind, als diese Begleiter längst schon verloschen sind. Ich hatte

dies zuerst in Marseille beim Polarstern bemerkt. (Einen Bekannten, der an der Sichtbarkeit der Sterne am Tage zweifelte, lud ich ein, am nächsten Vormittage um 10 Uhr bei mir zu sein, und ich zeigte ihm den Polarstern. Da ich weder parallactische Montirung noch Kreise an meinem Fernrohr hatte, so musste ich früh aufstehen, um diesen Stern nicht aus dem Sehfelde zu verlieren, was, bei seiner