3. *Über die Änderung der Lichtfortpflanzung im Kalkspat durch Deformationen;* von F. Pockels.

Aus Beobachtungen über die durch einseitigen Druck bewirkten optischen Änderungen kann man für Körper, deren Elastizitätskonstanten vollständig bekannt sind, den Einfluß beliebiger, innerhalb der Elastizitätsgrenzen bleibender Deformationen auf die Lichtfortpflanzung berechnen und kann davon insbesondere Anwendung machen, um die Temperaturkoeffizienten der Brechungsindizes von dem Einfluß der thermischen Dilatation zu befreien, also den *reinen Temperatureinfluß* zu ermitteln. Ich habe diese Untersuchung früher für Quarz und verschiedene reguläre Krystalle, sowie neuerdings für eine Reihe von Glasarten durchgeführt, wobei sich für die letzteren, sowie für den Quarz durchweg eine *Zunahme* der Brechungsindizes durch Temperaturerhöhung ohne Dilatationen herausstellte.¹⁾ Im folgenden will ich über die analoge Untersuchung am Kalkspat berichten, dessen optische Eigenschaften ja von besonderem Interesse sind, und für den genaue Bestimmungen der zu der erwähnten Berechnung nötigen elastischen und thermischen Konstanten vorliegen.

1. Formeln für Krystalle des rhomboedrischen Systems.

Die Gesetze der Fortpflanzung ebener Lichtwellen in durchsichtigen, doppeltbrechenden Kristallen lassen sich bekanntlich am einfachsten mit Hülfe einer, von Fresnel als Elastizitätsfläche, von Senff und F. Neumann als Ovaloid, neuerdings von Voigt als *Polarisationsovaloid* bezeichneten Fläche vierten

1) F. Pockels, Wied. Ann. **37**. p. 144. 269. 372. 1889; Ann d. Phys. **7**. p. 745; **9**. p. 220. 1902.

Grades darstellen, deren Gleichung in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem lautet ¹⁾

$$(1) r^4 = B_{11} x^2 + B_{22} y^2 + B_{33} z^2 + 2 B_{23} y z + 2 B_{31} z x + 2 B_{12} x y.$$

Eine Änderung des optischen Verhaltens wird also durch die Änderungen der Koeffizienten B_{hk} , der *Polarisationskonstanten* nach Voigts Bezeichnung, charakterisiert sein. Sind diese Änderungen durch nicht zu große Deformationen verursacht, so wird man sie gleich homogenen linearen Funktionen der sechs Deformationsgrößen $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$ (in der nach Kirchhoff üblichen Bezeichnung) setzen dürfen. Die Form dieser Functionen vereinfacht sich, wenn man ein den Symmetrieverhältnissen des Kristalls angepaßtes Koordinatensystem X^0, Y^0, Z^0 zu Grunde legt. In dem für uns jetzt in Betracht kommenden Falle der *rhomboedrischen* Symmetrie werde die Z^0 -Achse in die dreizählige Symmetrieachse (die optische Achse des nicht deformierten Krystalles), die X^0 -Achse in eine der zweizähligen Symmetrieachsen gelegt und die positive Richtung der Y^0 -Achse so angenommen, daß sie aus einer Fläche des positiven Grundrhomboeders (+ R) austritt. Dann lautet der Ansatz für die veränderten Polarisationskonstanten, wie ich früher ²⁾ gezeigt habe:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{11} = \omega_o^{02} + a_{11} x_x + a_{12} y_y + a_{13} z_z + a_{14} y_z, \\ B_{22} = \omega_o^{02} + a_{12} x_x + a_{11} y_y + a_{13} z_z - a_{14} y_z, \\ B_{33} = \omega_e^{02} + a_{31} (x_x + y_y) + a_{33} z_z, \\ B_{23} = a_{41} (x_x - y_y) + a_{44} y_z, \\ B_{31} = a_{44} z_x + a_{41} x_y, \\ B_{12} = a_{14} z_x + \frac{1}{2} (a_{11} - a_{12}) x_y. \end{array} \right.$$

Darin bedeuten ω_o^0, ω_e^0 die ursprüngliche ordentliche und außerordentliche Hauptlichtgeschwindigkeit.

Für die Anwendung auf Beobachtungen, bei denen die Deformation durch *einseitigen Druck* hervorgebracht wird, ist es bequemer, die Größen B_{hk} als Funktionen der auf das

1) Ich behalte hier größtenteils die in meiner ersten, oben zitierten Arbeit gebrauchten Bezeichnungen bei, um die Vergleichung zu erleichtern.

2) F. Pockels, Wied. Ann. 37. p. 161. 1889.

Koordinatensystem $X^0 Y^0 Z^0$ bezogenen Druckkomponenten $X_x \dots Y_z \dots$ darzustellen. Solange die letzteren so klein sind, daß Proportionalität zwischen ihnen und den Deformationen besteht, können auch diese Funktionen als lineare angenommen werden. Ihre Form ergibt sich jedoch unter Rücksicht darauf, daß sich $X_x \dots Y_z \dots$ wie $X^2 \dots YZ \dots$, dagegen $x_x \dots y_z \dots$ wie $X^2 \dots 2YZ \dots$ transformieren, etwas abweichend; man findet für das rhomboedrische System, wenn die neuen Koeffizienten mit $-\alpha_{hk}$ bezeichnet werden:

$$(3) \quad \begin{cases} B_{11} = \omega_o^2 - [\alpha_{11} X_x + \alpha_{12} Y_y + \alpha_{13} Z_z + \alpha_{14} Y_z], \\ B_{22} = \omega_o^2 - [\alpha_{12} X_x + \alpha_{11} Y_y + \alpha_{13} Z_z - \alpha_{14} Y_z], \\ B_{33} = \omega_e^2 - [\alpha_{31} (X_x + Y_y) + \alpha_{33} Z_z], \\ B_{23} = -[\alpha_{41} (X_x - Y_y) + \alpha_{44} Y_z], \\ B_{31} = -[\alpha_{44} Z_z + 2\alpha_{41} X_y], \\ B_{12} = -[\alpha_{14} Z_z + (\alpha_{11} - \alpha_{12}) X_y]. \end{cases}$$

Zwischen den Konstanten a_{hk} und α_{hk} bestehen dann die Relationen:

$$(4) \quad a_{hk} = \sum_1^6 i \alpha_{hi} c_{ki}, \quad \alpha_{hk} = \sum_1^6 i a_{hi} s_{ki},$$

wo die $c_{ki} = c_{ik}$ die Elastizitätskonstanten, die $s_{ki} = s_{ik}$ die Elastizitätsmoduln (nach Voigts Bezeichnung) sind; speziell im vorliegenden Falle gilt:

$$(5) \quad \begin{cases} a_{11} = c_{11} \alpha_{11} + c_{12} \alpha_{12} + c_{13} \alpha_{13} + c_{14} \alpha_{14}, \\ a_{12} = c_{12} \alpha_{11} + c_{11} \alpha_{12} + c_{13} \alpha_{13} - c_{14} \alpha_{14}, \\ a_{13} = c_{13} (\alpha_{11} + \alpha_{12}) + c_{33} \alpha_{13}, \\ a_{14} = c_{14} (\alpha_{11} - \alpha_{12}) + c_{44} \alpha_{14}, \\ a_{31} = (c_{11} + c_{12}) \alpha_{31} + c_{13} \alpha_{33}, \\ a_{33} = 2 c_{13} \alpha_{31} + c_{33} \alpha_{33}, \\ a_{41} = (c_{11} - c_{12}) \alpha_{41} + c_{14} \alpha_{44}, \\ a_{44} = 2 c_{14} \alpha_{41} + c_{44} \alpha_{44}. \end{cases}$$

Um die optische Wirkung eines um die Z^0 -Achse symmetrischen Deformations- oder Drucksystems, wie es bei der thermischen Dilatation vorliegt, zu berechnen, ist nur die Kenntnis der Größen $(\alpha_{11} + \alpha_{12})$, α_{13} , α_{31} , α_{33} oder $(\alpha_{11} + \alpha_{12})$, α_{13} , α_{31} , α_{33}

erforderlich. Doch habe ich die Untersuchung auf die Bestimmung *sämtlicher* Konstanten ausgedehnt, da es mir im Hinblick auf die mechanische Erzeugung von Zwillingslamellen im Kalkspat auch von Interesse schien, die Änderung der Wellenfläche durch gewisse in Bezug auf die Hauptaxe *nicht* symmetrische Deformationen berechnen zu können.

Für die experimentelle Bestimmung der Konstanten α_{hk} ist zu beachten, daß von den optischen Symmetrieachsen X, Y, Z des deformierten Krystalles die eine (Z), welche aus der Z^0 -Achse hervorgeht, von dieser immer nur um einen sehr kleinen Winkel abweicht; die Drehungen um die X^0 - und Y^0 -Achse, durch welche sie in die neue Lage übergeht, sind nämlich gegeben durch

$$(6a) \quad \operatorname{tg} 2 \Phi_x = \frac{2 B_{23}}{B_{22} - B_{33}},$$

$$(6b) \quad \operatorname{tg} 2 \Phi_y = \frac{2 B_{31}}{B_{33} - B_{11}},$$

und hierin sind die Zähler kleine Größen erster Ordnung, d. h. von der Größenordnung der Deformationen, die Nenner dagegen sehr annähernd $= \pm (\omega_o^{0,2} - \omega_e^{0,2})$, d. i. beim Kalkspat $\mp 0,0891$. Was die *Richtung* dieser Drehung betrifft, so ist aus den Ausdrücken (3) für B_{23} und B_{31} leicht zu erkennen, daß sie im Falle eines zur Hauptachse senkrechten einseitigen Druckes p , dessen Richtung mit der X^0 -Achse den Winkel ψ bildet, um eine Achse erfolgt, die gegen X^0 unter dem Winkel $+ 2 \psi$ geneigt ist; dabei ist die *Größe* der Drehung von ψ unabhängig und sehr nahe durch

$$(6') \quad \Phi = - \frac{\alpha_{41} p}{\omega_o^{0,2} - \omega_e^{0,2}}$$

gegeben. Liegt die Druckrichtung irgendwie in einer Symmetrieebene ($Y^0 Z^0$) oder *senkrecht* zu derselben ($\parallel X^0$), so geschieht die Drehung der Z -Achse natürlich in jener Symmetrieebene.

Berücksichtigt man das vorstehend Gesagte, so folgt aus der bekannten Konstruktion der Wellengeschwindigkeiten mit Hülfe des zur Wellenebene parallelen Schnittes des durch (1) dargestellten Ovaloids, daß für Fortpflanzungsrichtungen, die senkrecht zur Z^0 -Achse sind, die eine Geschwindigkeit bis auf kleine Größen zweiter Ordnung stets durch $\sqrt{B_{33}}$ gegeben ist und die andere sich durch B_{11} , B_{22} und B_{12} bestimmt; ferner,

daß für die Geschwindigkeiten in der Richtung der Z^0 -Achse nur B_{11} , B_{22} , B_{12} maßgebend sind.

Wirkt der Druck speziell parallel der Z^0 -, X^0 - oder Y^0 -Achse, so sind die Hauptlichtgeschwindigkeiten in der bezeichneten Annäherung direkt durch $\sqrt{B_{11}}$, $\sqrt{B_{22}}$, $\sqrt{B_{33}}$ gegeben, welche Größen dann die Konstanten α_{11} , α_{12} , α_{13} , α_{31} , α_{33} enthalten. Die letzteren können daher durch Beobachtungen über die Änderungen der Lichtgeschwindigkeiten in den Richtungen X^0 , Y^0 , Z^0 , wenn ein einseitiger Druck parallel einer derselben ausgeübt wird, ermittelt werden. Zur Bestimmung der Konstante α_{41} , welche für die erwähnte *Drehung* der Z -Achse maßgebend ist, muß man, da diese Drehung, wie wir unten sehen werden, für die direkte Beobachtung zu klein ist, die Änderung der Lichtgeschwindigkeit in einer gegen die Z^0 -Achse schiefwinklig geneigten Richtung heranziehen. Für eine Fortpflanzungsrichtung, die im ersten Quadranten der $Y^0 Z^0$ -Ebene mit der Y^0 -Achse den Winkel α bildet, ist nämlich die Geschwindigkeit der senkrecht zur $Y^0 Z^0$ -Ebene polarisierten Welle zufolge der Ovaloidgleichung gegeben durch

$$(7) \quad \omega_a^2 = B_{22} \sin^2 \alpha + B_{33} \cos^2 \alpha - B_{23} \sin 2\alpha,$$

ebenso für die hierzu senkrechte, im zweiten Quadranten der $Y^0 Z^0$ -Ebene gelegene Fortpflanzungsrichtung durch

$$(7') \quad \frac{\omega_a^2}{2} + \alpha = B_{22} \cos^2 \alpha + B_{33} \sin^2 \alpha + B_{23} \sin 2\alpha.$$

Hierin kommt also B_{23} vor, welches bei einem parallel der X -Achse ausgeübten Drucke proportional mit α_{41} ist. Aus der durch einen solchen Druck hervorgebrachten Verzögerung der erwähnten Welle gegen die andere, parallel zur $Y^0 Z^0$ -Ebene polarisierte, deren Geschwindigkeit $\sqrt{B_{11}}$ ist, kann daher α_{41} berechnet werden:

Die Konstanten α_{14} und α_{44} endlich, welche in (3) mit Y_z multipliziert auftreten, kommen zur Geltung, wenn man einen in der $Y^0 Z^0$ -Ebene gegen die Z^0 -Achse (am besten unter etwa 45°) geneigten Druck ausübt, und können aus den relativen Verzögerungen abgeleitet werden, welche man dann in der Richtung der X^0 -Achse und in der zur Druckrichtung senkrechten Richtung in der $Y^0 Z^0$ -Ebene beobachtet. Für erstere Richtung sind nämlich die Geschwindigkeiten durch $\sqrt{B_{22}}$ und $\sqrt{B_{33}}$, für

letztere durch $\sqrt{B_{11}}$ und eine der Formeln (7) gegeben, und in B_{11} oder B_{22} tritt im vorliegenden Falle α_{14} , in B_{23} α_{44} auf.

2. Anordnung und Berechnung der Beobachtungen.

Nach den im vorstehenden entwickelten Gesichtspunkten wurden die nachstehend zusammengestellten Orientierungen der für die Beobachtungen zu verwendenden Prismen (rechtwinkligen Parallelepipeda) gewählt. Wir bezeichnen dabei die Richtung der langen Kanten mit L , diejenige der kurzen mit D_1 bez. D_2 ; die Länge der ersteren betrug 20 mm, die der letzteren 6,0 mm bis auf Abweichungen von 0,01 mm, welche zu vernachlässigen sind. Die Herstellung der Prismen, deren Seitenflächen genau planparallel und fein poliert sein mußten, wurde von der Firma Dr. Steeg & Reuter in vortrefflicher Weise ausgeführt.

Prismengattung I. $L \parallel Z^0$, D_1 und D_2 irgendwie in der $X^0 Y^0$ -Ebene orientiert (wir können annehmen: $D_1 \parallel X^0$, $D_2 \parallel Y^0$).

IIa. $L \parallel Y^0$, $D_1 \parallel X^0$, $D_2 \parallel Z^0$.

IIb. $L \parallel X^0$, $D_1 \parallel Y^0$, $D_2 \parallel Z^0$.

III. $L \parallel X^0$; D_1 senkrecht zur Fläche des Spaltungs-rhomboeders $+R$, also mit Y^0 den Winkel $\alpha = 45^\circ 23'$, mit Z^0 $\pi/2 - \alpha = 44^\circ 37'$ bildend; D_2 im zweiten Quadranten der $Y^0 Z^0$ -Ebene gegen Z^0 unter dem Winkel α geneigt.

IV. L in der $Y^0 Z^0$ -Ebene so gelegen, wie D_2 bei III.; D_1 parallel der Normale von $+R$; $D_2 \parallel X^0$.

Die Abweichungen von den hier angegebenen Orientierungen, welche teils durch Messung der Auslöschungsrichtungen im Polarisationsapparat, teils durch goniometrische Messung der Winkel gegen kleine angespaltene Flächen festgestellt wurden, waren so gering, daß sie im Vergleich mit den sonstigen Fehlerquellen, z. B. der Unsicherheit betreffs der Druckrichtung und Beobachtungsrichtung, nicht berücksichtigt zu werden brauchten.

Um aus den beobachteten Verzögerungen die Änderungen der Lichtgeschwindigkeiten und damit die Konstanten α_{hk} ableiten zu können, muß zunächst derjenige Teil der Verzögerung bekannt sein, welcher von der *Dickenzunahme* des Prismas in der Beobachtungsrichtung (D_1 oder D_2) herrührt. Nach-

stehend sind für die oben bezeichneten Prismen die einem longitudinalen Drucke p entsprechenden Druckkomponenten und die daraus berechneten Dickenzunahmen $D - D^0$ zusammengestellt. Die dabei benutzten Werte der Elastizitätsmoduln s_{hk} sind nach den Bestimmungen von Baumgarten und Voigt¹⁾:

$$s_{11} = 11,14 \cdot 10^{-5}, \quad s_{12} = -3,67 \cdot 10^{-5}, \quad s_{13} = -4,24 \cdot 10^{-5},$$

$$s_{33} = 17,13 \cdot 10^{-5}, \quad s_{14} = 8,98 \cdot 10^{-5}, \quad s_{44} = 39,52 \cdot 10^{-5},$$

wobei, wie im folgenden immer, als Einheit des Druckes 1 kg-Gewicht pro mm² vorausgesetzt ist.

Prisma I. $X_x = Y_y = Z_z = X_y = 0, Z_z = p.$

$$(8) \quad D - D^0 = -p D^0 s_{13} = +4,24 p D^0 \cdot 10^{-5}.$$

Prisma IIa. $X_x = Z_z = Y_y = Z_x = X_y = 0, Y_y = p.$

$$(9) \quad D_1 - D_1^0 = -p D_1^0 s_{12} = +3,67 p D_1^0 \cdot 10^{-5},$$

$$(10) \quad D_2 - D_2^0 = -p D_2^0 s_{13} = +4,24 p D_2^0 \cdot 10^{-5}.$$

Prisma IIb erfährt dieselben Dickenänderungen.

Prisma III. $X_x = p, Y_y = Z_z = Y_z = Z_x = X_y = 0.$

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} D_1 - D_1^0 &= -p D_1^0 (s_{12} \cos^2 \alpha + s_{13} \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} s_{14} \sin 2 \alpha) \\ &= -0,53 \cdot p D_1^0 \cdot 10^{-5}, \end{aligned} \right.$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} D_2 - D_2^0 &= -p D_2^0 (s_{12} \sin^2 \alpha + s_{13} \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} s_{14} \sin 2 \alpha) \\ &= +8,44 p D_2^0 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \right.$$

Prisma IV. $X_x = 0, Y_y = p \sin^2 \alpha, Z_z = p \cos^2 \alpha, Y_z = -\frac{1}{2} p \sin 2 \alpha, Z_x = X_y = 0.$

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} D_1 - D_1^0 &= -p D_1^0 \{ (s_{11} \sin^2 \alpha + s_{13} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} s_{14} \sin 2 \alpha) \cos^2 \alpha \\ &\quad + (s_{13} \sin^2 \alpha + s_{33} \cos^2 \alpha) \sin^2 \alpha \\ &\quad - \frac{1}{2} (s_{14} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} s_{44} \sin 2 \alpha) \sin 2 \alpha \}, \\ &\text{oder nahezu} \\ &= -\frac{1}{4} p D_1^0 (s_{11} + 2s_{13} + s_{33} - s_{44}) = +4,93 p D_1^0 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \right.$$

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} D_2 - D_2^0 &= -p D_2^0 (s_{12} \sin^2 \alpha + s_{13} \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} s_{14} \sin 2 \alpha) \\ &= +8,44 p D_2^0 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \right.$$

Die Beobachtungen betrafen die absoluten und relativen Verzögerungen der sich senkrecht zu den Seitenflächen der longitudinal komprimierten Prismen fortpflanzenden Wellen,

1) W. Voigt, Wied. Ann. 39. p. 412 u. 432. 1890.

sowie in einem Falle die Änderung der Kurven gleichen Gangunterschiedes. Sie wurden ausschließlich mit Natriumlicht ausgeführt. Der Kompressionsapparat, sowie die Methoden zur Messung der absoluten Verzögerungen mittels Interferentialrefraktors, der relativen mittels Babinetschen Kompensators waren dieselben, welche ich bei der schon zitierten Untersuchung über das Verhalten verschiedener Glassorten angewendet und l. c. p. 747—750 beschrieben habe, so daß hier auf die dort gemachten Angaben verwiesen werden kann. Bezüglich der Anwendung des Druckhebels ist nur zu bemerken, daß derselbe hier, um etwaige Verschiebungen des darunterstehenden Kristallprismas sicherer zu vermeiden, nicht ganz abgehoben wurde, sondern immer mit der $\frac{1}{2}$ kg wiegenden Wagschale belastet blieb, auf welche die weiteren Gewichte mit der Hand aufgesetzt wurden. Aus diesen Gewichten G bestimmt sich dann der Druck p , welchem die beobachteten Änderungen entsprachen, gemäß der Relation

$$p = \frac{4,9}{D_1 \cdot D_2} \cdot G.$$

Die Belastung durfte bei einem Teil der Prismen nur relativ gering (gleich 2 kg) genommen werden, da sonst Zwillingslamellen nach der Gleitfläche $-\frac{1}{2}R$ entstanden. Bei diesen kleinen Belastungen wurden als Zwischenlagen zur Druckausgleichung dünne Kautschukplättchen, bei größeren Drucken Bleiplättchen verwendet.

Besondere Schwierigkeiten entstanden jedoch beim Kalkspat durch seine sehr starke Doppelbrechung, welche eine sehr starke Änderung der außerordentlichen Lichtgeschwindigkeit und des Gangunterschiedes mit der Richtung bedingt. Diese machte es notwendig, bei den Kompensatorbeobachtungen den ursprünglich vorhandenen großen Gangunterschied durch ein oder zwei mit dem zu komprimierenden Prisma in passender Weise verbundene andere Prismen größtenteils zu kompensieren. Hierdurch war zugleich der Einfluß von Temperaturschwankungen auf den Gangunterschied in der Hauptsache aufgehoben, welcher für ein einzelnes Kalkspatprisma von der hier benutzten Dicke in den Richtungen senkrecht zur Hauptachse $\frac{1}{9}$ Wellenlänge für 1° betragen und daher sehr störend sein würde. Die Befestigung der Kompensationsprismen vor

oder hinter dem zu untersuchenden Prisma geschah mittels Körnchen von Klebwachs, so daß sie nicht an der Kompression, wohl aber an den etwa durch die Belastung veranlaßten Drehungen des Versuchsprismas teilnahmen und die Änderungen des Gangunterschiedes, welche durch letztere sonst verursacht worden wären, ebenfalls kompensierten. Die Anordnung dieser Kompensationsprismen wird bei Mitteilung der Beobachtungsergebnisse für die einzelnen Fälle angegeben werden. Sie wurden in solcher Lage angeklebt, daß der schwarze Streifen des Babinetschen Kompensators möglichst geradlinig und scharf erschien; allein dies war immerhin nur in sehr viel unvollkommener Weise zu erreichen, als bei isotropen Prismen, so daß auch die Genauigkeit der Einstellung eine erheblich geringere war. Bei den Messungen der absoluten Verzögerungen wurde, ganz ähnlich wie bei den früheren Beobachtungen an Glasprismen, neben dem zu untersuchenden Prisma ein zweites, gleiches, durch einen Metallrahmen mit ihm verbundenes Prisma in solchem Abstände aufgestellt, daß durch jedes der Prismen eines der beiden nachher zur Interferenz gelangenden Strahlenbündel hindurchging. Hierdurch wurde sowohl der sonst zu große ursprüngliche Gangunterschied der letzteren, als auch der Einfluß kompensiert, den andernfalls eine durch die Belastung etwa verursachte Drehung des Versuchsprismas gehabt hätte.

Es ist nun allerdings noch die Möglichkeit in Betracht zu ziehen, daß das Kompensationsprisma *allein* eine Drehung erfährt, indem das zur Beobachtungsrichtung senkrechte Flächenpaar des zu untersuchenden Prismas infolge der Deformation des letzteren seine Richtung ändert, ohne daß sich das Prisma als ganzes dreht. Dies wird dann eintreten können, wenn sich die Winkel zwischen jenem Flächenpaar und den anderen Seitenflächen oder den Endflächen des Prismas bei dessen Kompression ändern; im ersteren Falle wird eine Drehung der Vorderfläche des Prismas um seine Vertikalachse, im zweiten Falle, da die den Druck erleidenden Endflächen wahrscheinlich sich selbst parallel bleiben werden, eine Neigung gegen die Vertikalrichtung stattfinden. Da es sich hierbei aber um sehr kleine Neigungen handelt, so wird ein merklicher Einfluß derselben auf den Gangunterschied bez. auf die

Differenz der Gangunterschiede im komprimierten und im Kompensationsprisma nur dann vorhanden sein können, wenn die Beobachtungsrichtung einen beträchtlichen Neigungswinkel gegen die optischen Symmetrieachsen besitzt; also nur bei den Prismen III und IV. Der Betrag der schädlichen Drehung ist höchstens gleich der Winkeländerung zwischen den zur X^0 -Achse parallelen Flächen, welche mit der Y^0 - und Z^0 -Achse Winkel von nahe 45° bilden. Dieselbe wird durch $z_z - y_y$ gemessen und beträgt somit

$$\text{bei Prisma III: } 0,57 \cdot p \cdot 10^{-5},$$

oder für die meistens angewandte Belastung $Q = 2 \text{ kg}$:

$$0,15 \cdot 10^{-5} = \text{ca. } \frac{1}{3}'' ,$$

$$\text{bei Prisma IV: } 1,55 \cdot p \cdot 10^{-5},$$

$$\text{d. i. für } Q = 2 \text{ kg: } 0,42 \cdot 10^{-5} = \text{ca. } 1'' .$$

Einer Drehung von $1''$ würde eine Gangunterschiedsänderung von $0,0046 \lambda$ entsprechen, das ist ein Betrag, der innerhalb der Grenzen der direkten Beobachtungsfehler liegt. Es braucht also diese Fehlerquelle in unserem Falle nicht berücksichtigt zu werden; sie könnte aber bei anders orientierten Prismen, z. B. bei einem solchen, welches in der Richtung der Normale von $+R$ komprimiert würde, sehr wohl merklich werden.

Als Fehlerquellen, welche hiernach noch übrig bleiben, kommen hauptsächlich in Betracht: erstens Abweichungen der Druck- und Beobachtungsrichtung von den bei der Berechnung vorausgesetzten Richtungen, zweitens die Ungleichförmigkeit der Kompression. Die Abweichung der Druckrichtung von den Längskanten des Prismas konnte bei dem Verhältnis $20:6$ der Längs- zu den Querdimensionen wohl nicht erheblich sein, zumal im mittleren Teile der Prismen, in dem die Beobachtungen zumeist ausgeführt wurden. Auch die Abweichung der Beobachtungsrichtung von der Plattennormale, welche durch Spiegelung kontrolliert werden konnte, betrug wohl nur selten (in solchen Fällen, wo die Beobachtungsrichtung absichtlich etwas geneigt gewählt wurde, um den Interferenzstreifen besser parallel dem Kompensatorspalt zu machen) über 1° und kann daher wenigstens in denjenigen Fällen, wo die Beobachtungsrichtung eine optische Symmetrie-

richtung war, gegenüber den direkten Beobachtungsfehlern von vornherein vernachlässigt werden. Schlimmer ist die zweite Fehlerquelle, die auch bei sorgfältigster Aufstellung des Prismas nie ganz zu vermeidende Ungleichförmigkeit der Druckverteilung über den Querschnitt. Bei den Kompensatormessungen wurde dieselbe durch Beobachtung an drei symmetrisch gelegenen Stellen (in der Mitte und in der Nähe des linken und rechten Randes der Prismenfläche) und Mittelbildung möglichst eliminiert; man kann annehmen, daß dies um so besser geschehen ist, je weniger das arithmetische Mittel der drei beobachteten Werte von dem in der Plattenmitte gefundenen differiert. Schwieriger war die Ungleichförmigkeit der Kompression bei den Messungen der *absoluten* Verzögerungen zu erkennen und zu eliminieren. Nach Möglichkeit wurde zwar auch dabei das Streifensystem, außer in der Mitte, einmal in der linken, einmal in der rechten Hälfte des Prismas erzeugt, indem das übrige Licht durch einen verschiebbaren Schirm mit schmalem, vertikalem Fenster abgeblendet wurde; doch waren manchmal die Interferenzstreifen in der einen Plattenhälfte zu schlecht, um genaue Einstellungen zu gestatten, und dann war man lediglich darauf angewiesen, die Beobachtung möglichst genau in der Mitte auszuführen und zur Kontrolle nach Neuaufrstellung des Prismas zu wiederholen. Die Genauigkeit der Resultate der absoluten Messungen steht demzufolge hinter derjenigen der Kompensatormessungen zurück. —

Die *absoluten Verzögerungen* konnten wegen der Polarisation des Lichtes an den Platten des Interferentialrefraktors nur für die senkrecht zur Druckrichtung polarisierte Welle gemessen werden. Bezeichnen wir deren Geschwindigkeit, bezogen auf diejenige im leeren Raume als Einheit, mit ω_v (da der für ihre Geschwindigkeit maßgebende Fresnelsche Schwingungsvektor vertikal ist) und den ihr entsprechenden Brechungsindex $1/\omega_v$ mit n_v , die Wellenlänge in Luft mit λ , so gilt für die in Bruchteilen von λ ausgedrückte Verzögerung, d. i. die beobachtete Streifenverschiebung dividiert durch den Streifenabstand, der Ausdruck:

$$(15) \quad \delta = \frac{D^0 n_v^3}{2 \lambda} \cdot (\omega_v^2 - \omega_v^2) + \frac{D - D^0}{\lambda} \cdot (n_v - 1),$$

wobei der Brechungsindex der Luft = 1 gesetzt ist.

Die *relative Verzögerung* der vertikal polarisierten Welle (die durch den Index h bezeichnet werde) gegen die horizontal polarisierte ist gegeben durch

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_h - \delta_v &= \frac{A}{\lambda} = \frac{D^0}{2\lambda} \{ \omega_h^{0^2} - \omega_h^2 \} n_h^3 - (\omega_v^{0^2} - \omega_v^2) n_v^3 \} \\ &+ \frac{D - D^0}{\lambda} (n_h - n_v). \end{aligned} \right.$$

Der Index 0 an den Brechungsindizes ist hier fortgelassen, da die Änderungen derselben so klein sind, daß die Werte vor und nach der Kompression hier nicht unterschieden zu werden brauchen. Unter D bez. D^0 ist in den vorstehenden Formeln die Dicke des Prismas in der Beobachtungsrichtung verstanden; $A = 14,04$ ist der Streifenabstand des Kompensators, gemessen in Umdrehungen der Mikrometerschraube, λ die zur Kompensation des Gangunterschiedes erforderliche Anzahl von Umdrehungen.

Die hiernach bestimmbaren Größen $\omega^{0^2} - \omega^2$ drücken sich für die einzelnen Prismengattungen, wie nach dem p. 729—730 Gesagten leicht zu ersehen ist, folgendermaßen durch die Konstanten α_{hk} aus.

Prismen I:

$$(17) \quad \omega_v^{0^2} - \omega_v^2 = \omega_o^{0^2} - \omega_z^2 = p \cdot \alpha_{33},$$

$$(18) \text{ Beobachtungsrichtung } \parallel Y^0: \omega_h^{0^2} - \omega_h^2 = \omega_o^{0^2} - \omega_x^2 = p \cdot \alpha_{13}.$$

Prismen IIa:

$$(19) \quad \omega_v^{0^2} - \omega_v^2 = \omega_o^{0^2} - \omega_y^2 = p \cdot \alpha_{11},$$

$$(20) \text{ Beobachtungsrichtung } \parallel X^0: \omega_h^{0^2} - \omega_h^2 = \omega_o^{0^2} - \omega_z^2 = p \cdot \alpha_{31},$$

$$(21) \quad \text{,,} \quad \parallel Z^0: \omega_h^{0^2} - \omega_h^2 = \omega_o^{0^2} - \omega_x^2 = p \cdot \alpha_{12}.$$

Die Prismen IIb geben dasselbe bei Vertauschung von Y mit X .

Prismen III:

$$(22) \quad \omega_v^{0^2} - \omega_v^2 = \omega_o^{0^2} - \omega_x^2 = p \alpha_{11},$$

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} &\text{Beobachtungsrichtung } \parallel D_2: \\ &\omega_h^{0^2} - \omega_h^2 = p(\alpha_{12} \cos^2 \alpha + \alpha_{31} \sin^2 \alpha + \alpha_{41}) = p A_2, \end{aligned} \right.$$

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} &\text{Beobachtungsrichtung } \parallel D_1: \\ &\omega_h^{0^2} - \omega_h^2 = p(\alpha_{12} \sin^2 \alpha + \alpha_{31} \cos^2 \alpha - \alpha_{41}) = p A_1. \end{aligned} \right.$$

Prismen IV. Beobachtungsrichtung $\parallel D_1$ (Normale von $+R$):

$$(25) \left\{ \begin{aligned} \omega_v^{02} - \omega_v^2 &= p \{ \alpha_{11} \sin^4 \alpha + (\alpha_{13} + \alpha_{31}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \alpha_{33} \cos^4 \alpha \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha_{14} \sin^2 \alpha + \alpha_{41} \sin^2 \alpha \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \alpha_{44} \sin^2 2\alpha \} \\ \text{oder in genügender Näherung} \\ &= p \{ \alpha_{11} \sin^4 \alpha + \frac{1}{4} (\alpha_{13} + \alpha_{31}) + \alpha_{33} \cos^4 \alpha \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha_{14} \sin^2 \alpha + \alpha_{41} \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \alpha_{44} \} \\ &= p A_3, \end{aligned} \right.$$

$$(26) \left\{ \begin{aligned} \omega_h^{02} - \omega_h^2 &= \omega_o^{02} - \omega_x^2 = p (\alpha_{12} \sin^2 \alpha + \alpha_{13} \cos^2 \alpha \\ &\quad - \frac{1}{2} \alpha_{14} \sin 2\alpha) = p A_4. \end{aligned} \right.$$

Beobachtungsrichtung $\parallel D_2$, d. i. $\parallel X$. Hier sind die Polarisationsrichtungen (nahezu) parallel der Y^0 - und Z^0 -Achse, und für die entsprechenden Wellengeschwindigkeiten ω_y und ω_z gilt:

$$(27) \left\{ \begin{aligned} \omega_y^{02} - \omega_y^2 &= -B_{22} = p (\alpha_{11} \sin^2 \alpha + \alpha_{13} \cos^2 \alpha \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha_{14} \sin 2\alpha) = p A_5, \end{aligned} \right.$$

$$(28) \quad \omega_z^{02} - \omega_z^2 = -B_{33} = p (\alpha_{31} \sin^2 \alpha + \alpha_{33} \cos^2 \alpha) = p A_6.$$

Die für die Berechnung der vorstehenden Größen aus (15) und (16) in Betracht kommenden Brechungsindizes n_h und n_v haben folgende Werte:

Prisma I.	$n_v = n_e^0 = 1,4864$,	$n_h = n_o^0 = 1,6584$.
Prisma II.	$n_v = n_o^0$,	n_h bei Beobachtung $\parallel X = n_e^0$.
Prisma III.	$n_v = n_o^0$,	$n_h = 1,5665$ bei Beobachtung $\parallel D_1$.
	$n_h' = 1,563$	„ „ $\parallel D_2$.
Prisma IV.	$n_v = 1,5665$,	$n_h = n_o^0$ bei Beobachtung $\parallel D_1$.
	$n_y = n_o^0$,	$n_z = n_e^0$ „ „ $\parallel D_2$.

Die aus den Beobachtungen der relativen Verzögerung in der Richtung Z^0 an den Prismen II gemäß (19) und (21) zu berechnende Differenz $\alpha_{11} - \alpha_{12}$ läßt sich, wie im folgenden gezeigt werden soll, auch aus Messungen der Kurven gleichen Gangunterschiedes ableiten, welche man auf den zur Z^0 -Achse senkrechten Flächen dieser Platten im konvergenten polarisierten Licht beobachtet. Im undeformierten Zustande sind diese Kurven bekanntlich konzentrische Kreise, und der in Luft beobachtete Winkelhalbmesser φ_v des v^{ten} , zwischen ge-

kreuzten Nicols ganz dunkel erscheinenden Kreises bestimmt sich durch die Gleichung

$$(29) \quad (\omega_e^2 - \omega_o^2) \sin^2 \varphi_v = v \cdot \frac{2 \omega_o \lambda}{D}.$$

Durch einen senkrecht zur Z -Achse ausgeübten einseitigen Druck wird der Kristall, wie aus den Grundformeln (3) folgt, optisch zweiachsig, wobei die Ebene der optischen Achsen parallel oder senkrecht zur Druckrichtung ist, je nachdem $\alpha_{12} - \alpha_{11}$ gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen besitzt, wie $\omega_o^2 - \omega_e^2$, oder wie der Charakter der Doppelbrechung. Beim Kalkspat liegt erfahrungsmäßig der zweite Fall vor, es *vergrößern* sich also infolge der Kompression die zur Druckrichtung senkrechten (bei unserer Versuchsanordnung *horizontalen* Ringdurchmesser. Wir wollen, um diese Vergrößerung zu berechnen, voraussetzen, die Druckrichtung sei die Y^0 -Achse, wie es bei den Prismen IIa der Fall ist. Dann gilt für den Gangunterschied der beiden Wellen in einer Richtung, die in der $Z^0 X^0$ -Ebene einen kleinen Winkel φ'_i mit der ersten Mittellinie und Plattennormale Z^0 bildet, die Formel

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{D}{\lambda} \cdot \frac{(\omega_x^2 - \omega_y^2)(\sin^2 \varphi'_i - \sin^2 \Omega)}{\omega_x \omega_y (\omega_x + \omega_y)}$$

oder auch, da der halbe Winkel der optischen Achsen Ω durch

$$(30) \quad \sin^2 \Omega = \frac{\omega_y^2 - \omega_x^2}{\omega_x^2 - \omega_y^2}$$

gegeben ist,

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{D}{\lambda} \cdot \frac{(\omega_x^2 - \omega_y^2) \sin^2 \varphi'_i - (\omega_y^2 - \omega_x^2)}{\omega_x \omega_y (\omega_x + \omega_y)}.$$

Führt man hierin durch die Relation

$$\sin \varphi'_i = \frac{1}{2} (\omega_x + \omega_y) \sin \varphi'$$

den zu φ'_i gehörigen Austrittswinkel in Luft φ ein, setzt für $\delta_1 - \delta_2$ den dem v^{ten} dunklen Ringe entsprechenden Wert v und läßt noch einige Vereinfachungen eintreten, die in Betracht der Kleinheit der für die ersten Ringe hier geltenden Werte von φ'_i zulässig sind, so erhält man schließlich für den horizontalen Winkelhalbmesser des v^{ten} Ringes in der komprimierten Platte die Gleichung:

$$(31) \quad (\omega_e^2 - \omega_o^2) \sin^2 \varphi_v' = v \cdot \frac{2 \lambda \omega_o}{D} + \frac{\omega_y^2 - \omega_x^2}{\omega_o^2}.$$

Die Differenz der Gleichungen (30) und (31) ergibt dann die gesuchte Relation:

$$(32) \quad p(\alpha_{12} - \alpha_{11}) = \omega_y^2 - \omega_x^2 = \omega_o^2 (\omega_e^2 - \omega_o^2) (\sin^2 \varphi_v' - \sin^2 \varphi_v).$$

Dieselbe Bestimmung von $\alpha_{12} - \alpha_{11}$ gestattet natürlich das Prisma IIb.

Die Messung der Ringhalbmesser wurde mit Hilfe desselben, mikrometrisch um eine vertikale Achse drehbaren, für Parallelstrahlen eingestellten Fernrohres ausgeführt, welches zu den Beobachtungen am Interferentialrefraktor benutzt worden war. Dasselbe wurde mit dem Objektiv dicht vor dem unter dem Druckhebel stehenden Prisma aufgestellt und so gedreht, daß der vertikale Faden einen der dunklen Ringe tangierte, welche man bei Anwendung eines Polarisators und Analysators mit unter $\pm 45^\circ$ gegen die Vertikale geneigten Polarisations Ebenen wahrnahm (von denen aber bei der starken Fernrohrvergrößerung immer nur ein kleines Stück im Gesichtsfelde erschien). Indem diese Einstellung am linken und rechten Ende des horizontalen Durchmessers der beiden ersten Ringe vor und nach Belastung des Prismas mehrmals gemacht wurde, konnten die Änderungen $\varphi_1' - \varphi_1$ und $\varphi_2' - \varphi_2$ mit großer Genauigkeit (bis auf etwa $10''$) gemessen werden.

3. Beobachtungsergebnisse.

Die im folgenden mitgeteilten Zahlen sind immer bereits Mittelwerte, die aus einer größeren Anzahl (bei den Kompensatorbeobachtungen immer je 5) von einzelnen Einstellungen vor Belastung, bei Belastung und nach Wiederaufhebung derselben abgeleitet sind.

Prismengattung I (Druck $\parallel Z^0$).

Absolute Verzögerungen δ_* .

Prisma 1. Belastung $G = 4$ kg.

Mitte	Links	Rechts	
0,157	0,161	0,158	Mittel für $G = 1$: $\delta_z = 0,0395$.

Prisma 2. Mittel aus 28 Beobachtungen genau in der Mitte
reduziert auf $G = 1$: 0,0419.

Insgesamt: $\delta_{z1} = 0,041$.

Hieraus berechnet nach (15) mit Benutzung von (8) und (17):

$$\alpha_{33} = + 4,4 \cdot 10^{-6}.$$

Relative Verzögerungen.

Zur Kompensation wurde das zweite Prisma derselben Art quer vor das zu komprimierende geklebt, so daß die Z^0 -Achsen beider gekreuzt lagen.

Prisma 1. $G = 2$.			Prisma 2. $G = 2$.		
Links	Mitte	Rechts	Links	Mitte	Rechts
$\Delta = 2,105$	2,17	2,27	$\Delta = 2,21$	2,18	2,01
Mittel: 2,18			Mittel: 2,13		
Prisma 2. $G = 5$.			Prisma 2, um 180° gedreht.		
Links	Mitte	Rechts	Links	Mitte	Rechts
$\Delta = 4,45$	5,58	6,88	$\Delta = 5,52$	5,52	5,46
Mittel: 5,64			Mittel: 5,50		

Gesamtmittel für $G = 1$: $\Delta_1 = 1,097$, $(\delta_x - \delta_z)_1 = 0,078$.

Hieraus in Verbindung mit δ_{z_1} nach (16), (8) und (18) berechnet

$$\alpha_{13} = 24,8 \cdot 10^{-6}.$$

Prismengattung IIa (Druck $\parallel Y^0$).

Beobachtungsrichtung $X^0 (= D_1)$, absolute Verzögerungen δ_y .

Prisma 1. $G = 5,5$ kg.			Prisma 2. $G = 5,5$ kg.		
Links	Mitte	Rechts	Links	Mitte	Rechts
0,088	0,104	0,080	0,0806	0,0923	0,0886
Mittel für $G = 1$: 0,0165			0,0158		

Zusammen: $\delta_{y1} = 0,0162$.

Daraus nach (15), (9), (19): $\alpha_{11} = -5,5 \cdot 10^{-6}$.

Beobachtungsrichtung $X^0 (= D_1)$, relative Verzögerungen.

Zur Kompensation diente jeweils die andere Platte derselben Art in gekreuzter Lage.

		Links	Mitte	Rechts	Mittel	Δ_1
Prisma 1.	$Q = 5$	3,52	3,62	3,45	3,55	0,71
„ 1.	$Q = 3$	1,60	1,925	2,08	1,87	0,623
„ 1.	$Q = 3$	2,25	1,99	1,76	2,00	0,67
„ 1.	$Q = 5$	3,39	3,19	2,78	3,12	0,624
„ 2.	$Q = 3$	2,31	1,93	1,48	1,91	0,637

Zusammen: $\Delta_1 = 0,652$, $(\delta_z - \delta_y)_1 = 0,0464$.

Nach der ersten Beobachtungsreihe an Prisma 1 war in demselben eine feine Zwillingslamelle nach $-\frac{1}{2}R$ entstanden, ebenso gleich von vornherein im Prisma 2; da dieselben parallel zur Beobachtungsrichtung verliefen, so störten sie zwar die

Kompensatorbeobachtungen nicht, erschwerten aber anscheinend die Erzielung einer gleichmäßigen Kompression.

Prismengattung IIb (Druck $\parallel X^0$). Relative Verzögerung $\parallel Y^0$.

		Links	Mitte	Rechts	Mittel
Prisma 1.	$Q = 2$	1,07	1,27	1,42	1,25
„ 2.	$Q = 2$	1,20	1,30	1,35	1,28

Zusammen: $\Delta_1 = 0,63$, $(\delta_x - \delta_y)_1 = 0,0450$.

Als Gesamtmittelwert ergibt sich aus den Beobachtungen an den Prismen IIa und IIb:

$$\delta_h - \delta_v = 0,0457$$

und hieraus nach (16) in Verbindung mit (9), (19) und (20):

$$n_o^3 \alpha_{31} - n_o^3 \alpha_{11} = 78,6 \cdot 10^{-6}.$$

Relative Verzögerung $\parallel Z^0$, gemessen mit Kompensator.

		Links	Mitte	Rechts	Mittel
Prisma 1.	$Q = 2$	1,30	1,33	1,34	1,32
„ 2.	$Q = 2$	1,40	1,33	1,22	1,32

$$\Delta_1 = 0,66, (\delta_h - \delta_v)_1 = (\delta_x - \delta_y)_1 = 0,047.$$

Hieraus nach (16), (19) und (21):

$$\frac{\omega_y^2 - \omega_x^2}{p} = \alpha_{12} - \alpha_{11} = 14,9 \cdot 10^{-6}.$$

Relative Verzögerung $\parallel Z^0$, bestimmt aus Ringdurchmessern bei derselben Aufstellung der Platten, wie bei den Kompensatormessungen.

Prisma 1.

$Q = 2$	$\varphi_1' = 132' 46,4''$, $\varphi_1^0 = 126' 42,4''$,	daraus nach (31): $\omega_y^2 - \omega_x^2 = 4,30 \cdot 10^{-6}$
$Q = 3$	$\varphi_1' = 135' 32,8''$, $\varphi_1^0 = 127' 1''$,	$\omega_y^2 - \omega_x^2 = 6,12 \cdot 10^{-6}$
$Q = 2$	$\varphi_2' = 182' 49,9''$, $\varphi_2^0 = 178' 40,3''$	$\omega_y^2 - \omega_x^2 = 4,12 \cdot 10^{-6}$

$$\text{Mittel von } \frac{\omega_y^2 - \omega_x^2}{p} : 15,23 \cdot 10^{-6}.$$

Prisma 2.

$Q = 2$	$\varphi_1' = 132' 15''$, $\varphi_1^0 = 126' 33''$,	daraus nach (31): $\omega_y^2 - \omega_x^2 = 4,03 \cdot 10^{-6}$
$Q = 2$	$\varphi_2' = 182' 57''$, $\varphi_2^0 = 178' 39''$	$\omega_y^2 - \omega_x^2 = 4,23 \cdot 10^{-6}$
$Q = 2$	$\varphi_3' = 182' 54,1''$, $\varphi_3^0 = 178' 47,6''$	$\omega_y^2 - \omega_x^2 = 4,08 \cdot 10^{-6}$

$$\text{Mittel von } \frac{\omega_y^2 - \omega_x^2}{p} : 15,06 \cdot 10^{-6}.$$

Ringdurchmesserbeobachtungen an den Prismen IIa ergaben ebenso den Mittelwert:

$$14,8 \cdot 10^{-6}.$$

Insgesamt folgt aus den Messungen der Ringe und denen mit Kompensator:

$$\alpha_{12} - \alpha_{11} = 15,0 \cdot 10^{-6}.$$

Prismengattung III (Druck $\parallel X^0$).

Beobachtungsrichtung: die Rhomboedernormale (Richtung D_1).

Absolute Verzögerung δ_x .

Prisma 2.

$Q = 4$ Mittel aus zahlreichen Beobachtungen: $(\delta_x)_4 = -0,093$.

$Q = 5$ Mittel $(\delta_x)_5 = -0,129$ und $-0,1165$.

Insgesamt: $(\delta_x)_{Q=1} = -0,0242$.

Daraus nach (15), (11), (22): $\alpha_{11} = -6,10 \cdot 10^{-6}$.

Das negative Vorzeichen von δ bedeutet, daß die Verschiebung der Interferenzstreifen bei Kompression der einen Platte hier, im Gegensatz zu allen anderen Fällen, in demjenigen Sinne erfolgte, welcher einer *Abnahme* des Gangunterschiedes entsprach. Nun ist zwar für die Richtung der Rhomboedernormale, wie der Wert (11), p. 732 zeigt, auch die *Querdilatation negativ*, allein die daraus resultierende Abnahme der Verzögerung der ordentlichen Welle ist nur etwa der fünfte Teil der beobachteten, so daß tatsächlich eine *Zunahme ihrer Geschwindigkeit* stattgefunden hatte; dem entspricht das *negative* Vorzeichen von α_{11} .

Relative Verzögerung.

Zur Kompensation wurde zunächst an die Vorderfläche ein Prisma der Gattung IV in solcher Lage angeklebt, daß die X^0 -Achse ebenfalls vertikal und die Z^0 -Achse spiegelbildlich zu derjenigen des zu komprimierenden Prismas in Bezug auf dessen Vorderfläche lag; in dieser Kombination ist der Gangunterschied in der Beobachtungsrichtung ein Maximum, ändert sich also durch kleine Drehungen nicht. Um nun den sehr großen absoluten Betrag des Gangunterschiedes in dieser Kombination und dessen Änderung mit der Temperatur aufzuheben, wurde zweitens an der Hinterfläche des Versuchsprismas ein Prisma der Gattung II mit vertikal gestellter Z^0 -Achse befestigt, welches für sich in der zur Z^0 -Achse senkrechten Beobachtungsrichtung nahezu den entgegengesetzten Gangunterschied gibt, wie die beiden ersten Prismen zusammen, in welchen ja die Beobachtungsrichtung Winkel von nahe 45° mit der optischen Achse bildet. Um gute Kompensatorstreifen zu erhalten, war es aber oft zweckmäßig, dem einen Kompensations-

prisma eine kleine seitliche Neigung zu geben. Die Messungen ergaben:

		Links	Mitte	Rechts	Mittel
Prisma 2.	$Q = 2$	2,18	2,06	1,90	2,05
„ 2.	$Q = 2$	2,23	2,03	1,87	2,04
„ 1.	$Q = 2$	2,10	2,13	2,11	2,11

$$A_{Q=1} = 1,033, (\delta_h - \delta_v)_{Q=1} = 0,0736.$$

Hieraus berechnet nach (16), (11), (22) und (24)

$$n_h^3 A_1 - n_o^3 \alpha_{11} = 105,2 \cdot 10^{-6}$$

oder

$$3,84 A_1 - 4,56 \alpha_{11} = 105,2 \cdot 10^{-6}.$$

Beobachtungsrichtung $\parallel D_2$.

Absolute Verzögerung δ_x .

Prisma 2. $G = 4$ kg.

Aus 11 Beobachtungen in der Mitte: $\delta_x = 0,238$.

Aus je 3 Beobachtungen am linken bez. rechten Rand: 0,194 bez. 0,271.

Insgesamt: $(\delta_x)_{Q=1} = + 0,0585$.

Hier ist die beobachtete Verzögerung positiv, aber kleiner als die von der Dickenänderung allein herrührende; für α_{11} ergibt sich daher nach (15), (12) und (22) in Übereinstimmung mit den früheren Bestimmungen ein *negativer* Wert und zwar

$$\alpha_{11} = - 5,92 \cdot 10^{-6}.$$

Relative Verzögerung.

		Links	Mitte	Rechts	Mittel
Prisma 1.	$G = 4$	1,23	1,51	1,57	1,45
	$G = 2$	0,66	0,80	0,85	0,77
Prisma 2.	$G = 4$	1,43	1,56	1,66	1,55
	$G = 4$	1,39	1,49	1,65	1,51

Insgesamt: $A_{Q=1} = 0,378, (\delta_h - \delta_v)_{Q=1} = 0,027$.

Hieraus folgt nach (16), (12), (22) und (23):

$$n_h^3 A_2 - n_o^3 \alpha_{11} = 3,82 A_2 - 4,56 \alpha_{11} = 54,74 \cdot 10^{-6}.$$

Für α_{11} wollen wir das Mittel aus den an den Prismen III gefundenen Werten, also

$$\alpha_{11} = - 6,0 \cdot 10^{-6}$$

annehmen, da die Bestimmung an IIa wegen der anscheinend ungleichförmigen Kompression und schlechten Beschaffenheit der Streifen weniger sicher ist.

Dann folgt

$$\alpha_{12} = 9,0 \cdot 10^{-6}, \quad \alpha_{31} = 15,5 \cdot 10^{-6},$$

$$A_1 = 7,15 \cdot 10^{-6}, \quad A_2 = 20,2 \cdot 10^{-6}$$

und hieraus

$$2\alpha_{41} = A_2 - A_1 + (\alpha_{31} - \alpha_{12}) \cos 2\alpha = -13,2 \cdot 10^{-6}, \quad \alpha_{41} = -6,6 \cdot 10^{-6}.$$

Berechnet man rückwärts mit diesen Werten der α_{hk} die relativen Verzögerungen $A_{Q=1}$ für die Prismen III, so findet man

$$\text{für die Richtung } D_1: 0,983 \text{ (beobachtet } 1,033)$$

$$,, \quad ,, \quad ,, \quad D_2: 0,322 \quad (,, \quad 0,378)$$

Die Differenzen vom Betrage $\pm 0,05$ zwischen den beobachteten und berechneten Werten sind nicht größer, als bei der Unsicherheit, die den Messungen in diesen Richtungen anhaftete, zu erwarten war.

Prismengattung IV.

(Druck in der YZ -Ebene senkrecht zur Normale von $+R$).

Hier konnten nur die relativen Verzögerungen beobachtet werden.

Beobachtungsrichtung: die Normale von $+R$ (D_1).

Die zur Kompensation des ursprünglichen Gangunterschiedes dienende Plattenkombination war dieselbe wie bei der Gattung III. Damit die Streifen des Kompensators hinreichend parallel den vertikalen Spalträndern erschienen, mußte die Beobachtungsrichtung etwas nach aufwärts oder abwärts geneigt genommen werden, hatte also nicht genau die bei der Berechnung vorausgesetzte, zur Druckrichtung senkrechte Richtung; doch kommt der hierdurch bedingte Fehler gegenüber den Abweichungen der Beobachtungen untereinander kaum in Betracht.

		Links	Mitte	Rechts	Mittel
Prisma 1.	$Q = 2$	3,38	3,05	2,97	3,13
	$Q = 2$	3,21	3,28	3,30	3,26

$$\text{Mittelwert: } A_{Q=1} = 1,60, \quad \delta_h - \delta_v = 0,114.$$

Hieraus nach (16) und (13), (25), (26)

$$n_o^3 A_4 - n_v^3 A_3 = 4,56 A_4 - 3,84 A_3 = 155,2 \cdot 10^{-6}.$$

Beobachtungsrichtung: die X -Achse (D_2).

Zur Kompensation diene das zweite Prisma derselben Art, welches mit der X -Achse ebenfalls parallel zur Beobachtungsrichtung, aber in um 90° gedrehter Stellung angeklebt

wurde. Da die Schwingungsrichtungen hier um nahe 45° gegen die vertikale Druckrichtung geneigt waren, so mußte auch der Kompensator aus seiner gewöhnlichen Stellung (mit vertikalem Spalt) um 45° gedreht werden. Der dunkle Streifen verlief dann also schräg über die vordere Prismenfläche, und es konnten daher nicht gut besondere Einstellungen nahe an den Rändern (links und rechts) gemacht werden. Die Gleichmäßigkeit der Kompression konnte jedoch dadurch, daß sich der Streifen in der ganzen Plattenbreite gleichmäßig parallel mit sich selbst verschieben mußte, kontrolliert werden, freilich bei der hier sehr geringen Verschiebung nicht so gut wie sonst; eingestellt wurde dann im mittleren Teil der Platte. Der Kompensatorspalt war bei den folgenden Beobachtungen parallel der Y^0 -Achse gestellt, so daß die Messung, wie sonst $\delta_h - \delta_v$, so hier $\delta_z - \delta_y$ ergab. Da der Kompensator bei Belastung der Platte zurückgedreht werden mußte, so findet sich letztere Größe negativ.

	Prisma 1	Prisma 2
$Q = 2$	-0,25	-0,27 -0,22
$Q = 4$	-0,52	-0,54 -0,49

Als Mittelwert für $Q = 1$ kann gelten:

$$A_1 = -0,13, \delta_y - \delta_z = +0,0091.$$

Die Dickenzunahme, welche eine relative Verzögerung der senkrecht zur Y^0 -Achse polarisierten Welle bewirkt, ist hier so groß, daß nach Abzug ihres Einflusses sich das Vorzeichen umkehrt. Es folgt nach (16) und (14), (27), (28):

$$n_o^3 A_5 - n_e^3 A_8 = 4,56 A_5 - 3,29 A_8 = -15,9 \cdot 10^{-6}.$$

Durch Einsetzen der bereits gefundenen Werte von α_{31} , α_{33} , α_{11} , α_{13} wird

$$A_8 = 10,03 \cdot 10^{-6}, \quad A_5 = 9,2 \cdot 10^{-6} + \frac{1}{2} \alpha_{14},$$

und man findet aus der vorstehenden Gleichung

$$\alpha_{14} = -10,9 \cdot 10^{-6}.$$

Endlich wird $A_4 = 22,7 \cdot 10^{-6}$, $A_3 = 3,5 \cdot 10^{-6} + \frac{1}{2} \alpha_{44}$ und es folgt aus der Gleichung $4,56 A_4 - 3,84 A_3 = 155,2 \cdot 10^{-6}$ für die letzte noch fehlende Konstante α_{44} der Wert

$$\alpha_{44} = -34 \cdot 10^{-6}.$$

Durch Einsetzen der gefundenen Zahlwerte in die Gleichungen (3) erhalten wir schließlich folgende Darstellung der Polarisationskonstanten B_{hk} als Funktionen der Druckkomponenten (wobei letztere in Kilogramm pro mm^2 gemessen, und die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume gleich 1 gesetzt ist):

$$(3') \quad \begin{cases} B_{11} = \omega_o^2 - [-6,0 X_x + 9,0 Y_y + 24,8 Z_z - 10,9 Y_z] \cdot 10^{-6}, \\ B_{22} = \omega_o^2 - [9,0 X_x - 6,0 Y_y + 24,8 Z_z + 10,9 Y_z] \cdot 10^{-6}, \\ B_{33} = \omega_e^2 - [15,5 (X_x + Y_y) + 4,4 Z_z] \cdot 10^{-6}, \\ B_{23} = [6,6 (X_x - Y_y) + 34 Y_z] \cdot 10^{-6}, \\ B_{31} = [34 Z_x + 13,3 X_y] \cdot 10^{-6}, \\ B_{12} = [10,9 Z_x + 15,0 X_y] \cdot 10^{-6}. \end{cases}$$

4. Anwendungen der gefundenen Resultate.

Von speziellen Folgerungen aus den Formeln (3') seien folgende hervorgehoben.

Allseitig gleicher Druck vermindert sowohl die ordentliche als die außerordentliche Lichtgeschwindigkeit, letztere aber stärker, so daß auch die Doppelbrechung abnimmt; es wird nämlich

$$\begin{aligned} \omega_o^2 - \omega_o'^2 &= B_{11} = B_{22} = -27,8 \cdot 10^{-6} p, \\ \omega_e^2 - \omega_e'^2 &= B_{33} = -35,4 \cdot 10^{-6} p. \end{aligned}$$

Einseitiger Druck parallel der Hauptachse verringert ebenfalls beide Lichtgeschwindigkeiten, verstärkt aber die Doppelbrechung, denn es gilt für solchen:

$$\omega_o^2 - \omega_o'^2 = -24,8 \cdot 10^{-6} p, \quad \omega_e^2 - \omega_e'^2 = -4,4 \cdot 10^{-6} p.$$

Einseitiger Druck senkrecht zur Hauptachse macht den Kalkspat optisch zweiachsig mit der Ebene der optischen Achsen senkrecht zur Druckrichtung und einem Achsenwinkel 2Ω , der nach (30) gegeben ist durch

$$\sin^2 \Omega = \frac{\alpha_{12} - \alpha_{11}}{\omega_e^2 - \omega_o^2} p \cdot 10^{-6}, \quad \sin \Omega = 0,013 \sqrt{p},$$

woraus z. B. für den Druck 1 kg/mm^2 $2\Omega = \frac{3}{2}^\circ$ folgt.

Wie schon p. 729 erörtert wurde, bleibt dabei die erste Mittellinie (die Z -Achse) nicht streng parallel der Hauptachse

Z^0 des Kristalles, sondern dreht sich um eine Achse in der $X^0 Y^0$ -Ebene, welche mit der Druckrichtung P denselben Winkel bildet, wie diese mit der X^0 -Achse. Den Betrag dieser Drehung können wir jetzt nach der Formel (6') numerisch berechnen, er findet sich $= 74 \cdot 10^{-6} p$, d. i. für $p = 1 \text{ kg/mm}^2$ etwa $15''$. Bei den Prismen II a sowohl als II b mußte die Drehung um die Druckrichtung stattfinden und demgemäß bei den Beobachtungen im konvergenten Licht eine geringe seitliche Verschiebung des Zentrums des Ringsystems, oder eine Ungleichheit der bei der Kompression eintretenden Erweiterung der Ringe nach links und nach rechts zur Folge haben. Eine derartige Unsymmetrie war nun in den Messungen nicht zu erkennen, was sich indessen vollkommen dadurch erklärt, daß die Drehung der Mittellinie für die dabei angewandte Belastung $Q = 2 \text{ kg}$ zufolge vorstehender Berechnung nur $4''$ betrug. —

Aus den Größen α_{hk} können wir nun mit Hülfe der von Voigt bestimmten Elastizitätskonstanten:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 13,97 \cdot 10^3, & c_{12} &= 4,65 \cdot 10^3, & c_{13} &= 4,60 \cdot 10^3, \\ c_{33} &= 8,12 \cdot 10^3, & c_{44} &= 3,49 \cdot 10^3, & c_{14} &= -2,12 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

die Konstanten α_{hk} des Ansatzes (2) gemäß den Formeln (5) berechnen und erhalten:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= +0,095, & \alpha_{12} &= +0,189, & \alpha_{13} &= +0,215, \\ \alpha_{31} &= +0,309, & \alpha_{33} &= +0,178, \\ \alpha_{14} &= -0,006, & \alpha_{41} &= +0,010, & \alpha_{44} &= -0,090. \end{aligned}$$

Die Vergleichung dieser Werte mit denjenigen, welche ich früher (l. c. p. 303) für die entsprechenden Konstanten des Quarzes bestimmt habe, zeigt, daß ihre Größenordnung für beide Körper übereinstimmt und daß auch in beiden Fällen α_{14} und α_{41} gegen die übrigen Konstanten sehr klein sind. Während aber beim Quarz fast genau $\alpha_{31} = \alpha_{13}$ gefunden wurde, findet diese Gleichheit hier auch nicht annähernd statt.

Das positive Vorzeichen der fünf ersten Konstanten zeigt, daß sowohl eine Dilatation parallel der Hauptachse, als eine solche in irgend einer Richtung senkrecht zu letzterer eine Zunahme der Lichtgeschwindigkeiten zur Folge hat. Das oben

(p. 743) gefundene auffällige Resultat, daß einseitiger *Druck* senkrecht zur Hauptachse eine Beschleunigung der senkrecht zur Druckrichtung polarisierten Welle hervorruft, ist hiernach durch den überwiegenden Einfluß der Querdilatationen zu erklären, welcher durch die gegen a_{11} großen Werte von a_{12} und a_{13} bedingt wird.

Ist die *Deformation rings um die Z^0 -Achse symmetrisch*, also $y_y = x_x$, so bleibt der Kristall natürlich optisch einachsigt, und es gilt:

$$(33) \quad \begin{cases} \omega_o^2 - \omega_o^{02} = (a_{11} + a_{12})x_x + a_{13}z_z, \\ \omega_e^2 - \omega_e^{02} = 2a_{31}x_x + a_{33}z_z. \end{cases}$$

Eine Dilatation $\parallel Z^0$ allein bewirkt wegen $a_{33} < a_{13}$ *Abnahme* der Doppelbrechung, eine solche in allen Richtungen $\perp Z^0$ *Zunahme* derselben; letzteres gilt auch von einer *allseitig gleichen* Dilatation.

Die Dilatation, welche durch eine *Temperaturerhöhung* von 1° erzeugt wird, ist charakterisiert durch

$$y_y = x_x = \alpha, \quad z_z = \gamma,$$

wobei die Ausdehnungskoeffizienten α , γ nach Benoît bei Zimmertemperatur die Werte haben

$$\alpha = -5,5 \cdot 10^{-6}, \quad \gamma = +25,5 \cdot 10^{-6}.$$

Die Einsetzung in (33) ergibt

$$\omega_o^2 - \omega_o^{02} = \left(\frac{d\omega_o^2}{dt} \right) = +3,92 \cdot 10^{-6},$$

$$\omega_e^2 - \omega_e^{02} = \left(\frac{d\omega_e^2}{dt} \right) = +1,15 \cdot 10^{-6},$$

und für die Änderungen der Hauptbrechungsindizes, welche wegen

$$d\left(\frac{1}{\omega}\right) = -\frac{1}{2\omega^3} d(\omega^2)$$

hieraus durch Multiplikation mit $n_o^3/2$ bez. $n_e^3/2$ erhalten werden:

$$\left(\frac{dn_o}{dt} \right) = -8,9 \cdot 10^{-6}, \quad \left(\frac{dn_e}{dt} \right) = -1,9 \cdot 10^{-6}.$$

Die wirklichen Temperaturkoeffizienten der (absoluten) Brechungsindizes betragen hingegen:

Nach Vogel ¹⁾ (für eine Mitteltemperatur von 103° gültig):

$$\frac{dn_o}{dt} = + 0,81 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{dn_e}{dt} = + 10,20 \cdot 10^{-6}.$$

Nach Reed ²⁾ (für eine Mitteltemperatur von 18° berechnet):

$$\frac{dn_o}{dt} = + 0,69 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{dn_e}{dt} = + 10,57 \cdot 10^{-6}.$$

Benutzt man die letzteren Werte, so ergeben sich, indem man die oben berechneten Größen (dn_o/dt) und (dn_e/dt) davon subtrahiert, folgende Werte der *reinen, d. h. vom Einfluß der Dilatationen befreiten Temperaturkoeffizienten der Brechungsindizes des Kalkspates*:

$$\frac{\partial n_o}{\partial t} = + 9,6 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} = + 12,5 \cdot 10^{-6}.$$

Unter Zugrundelegung der Vogelschen Beobachtungen erhält man ebenso:

$$\frac{\partial n_o}{\partial t} = 9,7 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} = 12,1 \cdot 10^{-6}.$$

Die reinen Temperaturkoeffizienten haben also sehr beträchtliche *positive* Werte, welches Verhalten, da zugleich eine Zunahme der Dispersion mit der Temperatur stattfindet, nach Pulfrich ³⁾ wahrscheinlich durch eine Zunahme der Absorption oder ein Näherrücken der Absorptionsstreifen im Ultraviolett bedingt wird. Hr. Pulfrich hat in der unten zitierten Abhandlung unter anderen auch die reinen Temperaturkoeffizienten $\partial n_o/\partial t$ und $\partial n_e/\partial t$ des Kalkspats in der Weise berechnet, daß er auf die Änderung der beiden Hauptbrechungsindizes durch die Dilatation die Gladstone-Dalesche Regel, wonach $dn = -(n-1)(2\alpha + \gamma)$ wäre, anwandte. Dies ist jedoch, auch abgesehen davon, daß sich die Gladstone-Dalesche

1) G. Vogel, Wied. Ann. 25. p. 87. 1885.

2) J. O. Reed, Wied. Ann. 65. p. 707. 1898.

3) F. Pulfrich, Wied. Ann. 45. p. 609. 1892.

Formel auch bei isotropen festen Körpern als unzutreffend erwiesen hat, bei Kristallen schon von vornherein nicht zulässig, da hier die Verschiedenheit der Dilatation nach verschiedenen Richtungen von Einfluß sein muß. In der Tat ist der nach dieser Formel für (dn_e/dt) sich ergebende Wert $-7,04 \cdot 10^{-6}$ ganz verschieden von demjenigen, welchen ich aus meinen Beobachtungen oben abgeleitet habe $(-1,9 \cdot 10^{-6})$, während allerdings bei der ordentlichen Welle eine ziemlich große Annäherung an das Gladstonesche Gesetz stattfindet.¹⁾ So weicht denn auch der zweite der von Hrn. Pulfrich berechneten Werte der reinen Temperaturkoeffizienten:

$$\frac{\partial n_o}{\partial t} = + 10,34 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} = + 17,24 \cdot 10^{-6}$$

ganz erheblich von dem von mir gefundenen $(12,1 \cdot 10^{-6})$ ab.

Es kann verlockend scheinen, die im vorhergehenden gewonnenen Resultate auf diejenige besondere Deformation anzuwenden, welche ein Kalkspatkristall erleidet, wenn er durch mechanische Einwirkung in die *Zwillingsstellung* in Bezug auf eine *Gleitfläche*, d. i. eine Fläche des die Polkanten des Grundrhomboeders abstumpfenden Rhomboeders $-\frac{1}{2}R$, übergeführt wird. Allerdings handelt es sich bei dieser „Schiebung nach einer Gleitfläche“ um eine Deformation, welche weit über die Elastizitätsgrenzen hinausgeht — es sind ja sogar am Ende der Deformation die elastischen Kräfte wieder Null — und die überdies durch *labile* Zustände hindurchführt. Wir werden also eine quantitative Anwendbarkeit unserer Formeln, die ja für sehr kleine, elastische Deformationen aufgestellt worden sind, nicht erwarten dürfen, sondern höchstens eine Übereinstimmung

1) Beim *Quarz* ist dies auch für die ordentliche Welle nicht der Fall; denn hier sind die aus den a_{hk} und α, γ abgeleiteten Werte:

$$\left(\frac{dn_o}{dt}\right) = -13,3 \cdot 10^{-6}, \quad \left(\frac{dn_e}{dt}\right) = -14,6 \cdot 10^{-6},$$

dagegen die aus der Gladstoneschen Formel berechneten $-18,8 \cdot 10^{-6}$ bez. $-19,2 \cdot 10^{-6}$. Aus ersteren Zahlen und den direkt von Reed beobachteten dn/dt folgt für Quarz

$$\frac{\partial n_o}{\partial t} = + 7,6 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} = + 7,4 \cdot 10^{-6}.$$

hinsichtlich des *Sinnes* der optischen Änderungen. Letztere bestehen bei der Zwillingsbildung in einer einfachen *Drehung* der Wellenfläche von etwa $52\frac{1}{2}^{\circ}$ um die zu der Zwillingsfläche $-\frac{1}{2}R$ parallele Symmetrieachse X^0 im positiven Sinne (d. h. von der $+Y^0$ -Achse gegen die $+Z^0$ -Achse hin), denn die Z^0 -Achse bildet mit der Normale der Gleitfläche einen Winkel von $26\frac{1}{4}^{\circ}$. Da aber die „Schiebung“ parallel dem Hauptschnitt von $-\frac{1}{2}R$, welche den Krystall in die Zwillingsstellung überführt, keine reine Deformation, sondern die Kombination einer solchen mit einer *Drehung* von ca. 19° um die X^0 -Achse in *negativem* Sinne ist, so erfährt die optische Achse in Bezug auf die im Raume festliegend gedachten Hauptdilationsachsen eine Drehung von $+71\frac{1}{2}^{\circ}$. Unsere Formeln, welche ja die Wirkung einer reinen Deformation darstellen, setzen festliegende Hauptdilationsachsen voraus und müßten also den eben angegebenen Betrag der Drehung ohne Änderungen der Hauptlichtgeschwindigkeiten ergeben, wenn wir die der Schiebung entsprechenden Deformationsgrößen einsetzen. Letztere haben in Bezug auf das ursprüngliche Achsensystem $X^0 Y^0 Z^0$ die Werte:

$$x_x = 0, \quad y_y = -0,27, \quad z_z = +0,39, \quad y_z = +0,218, \quad z_x = x_y = 0.$$

Man erhält so

$$B_{23} = -0,0171, \quad B_{22} = \omega_o^2 + 0,0591 = 0,4227,$$

$$B_{33} = \omega_e^2 - 0,0143 = 0,4384$$

und nach Gleichung (6a):

$$2 \Phi_x = \arctg 342/157, \quad \Phi_x = +33^{\circ}.$$

Der *Sinn* der berechneten Drehung stimmt also mit demjenigen der bei der Zwillingsbildung wirklich stattfindenden überein, doch ergibt sich ihr Betrag erheblich zu klein.

Für die neue Hauptlichtgeschwindigkeit ω_z würde sich aus der Gleichung

$$\omega_z^2 = B_{22} \sin^2 \Phi_x + B_{33} \cos^2 \Phi_x - B_{23} \sin 2 \Phi_x$$

der Wert 0,671 bestimmen, der in der Tat nur sehr wenig von dem ursprünglichen Werte $\omega_z^0 = 0,6729$ abweicht. Für ω_y und ω_x erhielte man aber größere Abweichungen von ihrem

gemeinschaftlichen ursprünglichen Werte $\omega_0^0 = 0,6030$. — Man kann also nur sagen, daß die Änderung des optischen Verhaltens des Kalkspats, welche durch die bei der Schiebung nach einer Gleitfläche $-\frac{1}{2}R$ stattfindende Deformation bei deren Beginne (solange sie noch innerhalb der Elastizitätsgrenzen liegt) eingeleitet wird, dem *Sinne* nach geeignet scheint, in ihrem weiteren Verlaufe die mit der Zwillingsbildung wirklich verbundene Änderung der optischen Orientierung herbeizuführen.

(Eingegangen 21. April 1903.)