4. *Theoretisches über Gleitflächen und Kristallplastizität im allgemeinen;* *von R. Schachenmeier.*

§ 1. Einleitung.

Es ist noch nicht gelungen, umfassende Gesetze aufzufinden, welche die physikalischen Ursachen der bei Kristallen zu beobachtenden Gleitungen, künstlichen Zwillingsbildungen usw. klarlegen. Angesichts des ausgedehnten, bereits vorhandenen empirischen Materials erscheint es daher von Interesse, zu untersuchen, was die allgemeinen Methoden der Kristallphysik in Anwendung auf dieses Problem aussagen.

Es soll im folgenden gezeigt werden, daß und unter welchen Annahmen über den molekularen Bau der Kristalle Gleitungen, künstliche Zwillingsbildung usw. theoretisch möglich sind. Dabei werden folgende allgemeine Annahmen molekulartheoretischer Natur gemacht:

Man denke sich den Kristall als Bravais'sches Raumgitter (dessen Elementarmassen oder Molekeln nicht mit den chemischen Molekülen identisch zu sein brauchen). Eine Deformation des Kristalles ändert die Raumgitteranordnung der Molekeln, wobei dieselben aus ihren stabilen Gleichgewichtslagen entfernt werden. Ihre Abweichung vom Gleichgewicht werde gemessen durch einen Parameter ω .¹⁾

Die elastische Reaktion, welche der Kristall bei Deformation leistet, kann man erklären aus dem Bestreben der Molekeln, in ihre stabilen Gleichgewichtslagen zurückzukehren. Ist jedoch die Substanz plastisch, so daß die Deformation, z. B. eine Gleitung, nach Aufhören der äußeren Kraftwirkung nicht von selbst rückgängig wird, so müssen die Molekeln in der

1) Wir werden denselben mitunter anschaulich als eine Verdrehung der Molekeln relativ zum Volumelement bezeichnen, ohne jedoch diese Vorstellung vor anderen Möglichkeiten zu bevorzugen.

neuen Raumgitteranordnung sich wiederum in stabilen Gleichgewichtslagen befinden.

Die Existenz solcher neuer Gleichgewichtslagen ist zu beweisen. Das mechanische Verhalten eines Raumgitters direkt zu analysieren, ist zwar mit unüberwindlichen mathematischen Schwierigkeiten verknüpft, der Beweis gelingt jedoch, wenn man die beiden Hauptsätze der Thermodynamik zu Hilfe nimmt.

§ 2. die thermodynamischen Potentiale.

Bedeutet U die innere Energie, S die Entropie und T die absolute Temperatur eines Volumelementes, so ist das erste thermodynamische Potential

$$(1) \quad \xi = U - TS,$$

und es ist

$$(2) \quad dU = dQ - d\alpha,$$

wo $d\alpha$ die vom Kristall gegen die angreifenden Kräfte geleistete mechanische Arbeit und dQ die aufgenommene Wärme¹⁾ darstellen.

Der „innere Parameter“ ω hat den Charakter einer Koordinate. Betrachtet man also das Raumgitter des Volumelementes als mechanisches System, so kann man ω zusammen mit den 6 Deformationsgrößen:

$$(3) \quad x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y = x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6,$$

als die generalisierten Koordinaten derselben auffassen. Ist Ω diejenige innere an den Molekeln angreifende Kraft, welche auf Vergrößerung der Koordinate ω hinwirkt, und sind

$$(4) \quad X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y = X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6,$$

die Komponenten des am Volumelement angreifenden äußeren Spannungstensors, so ist

$$(5) \quad d\alpha = \sum_{h=1}^6 X_h dx_h + \Omega d\omega,$$

also auch

$$(6) \quad dU = dQ - \sum_{h=1}^6 X_h dx_h - \Omega d\omega.$$

Nach (1) ist nunmehr

$$(7) \quad d\xi = dU - TdS - SdT.$$

1) In mechanischem Maß.

Gemäß der Definition der Entropie ist

$$(8) \quad T dS = dQ = dU + \sum_{h=1}^6 X_h dx_h + \Omega d\omega,$$

also

$$(9) \quad d\xi = dU - dU - \sum_{h=1}^6 X_h dx_h - \Omega d\omega - S dT,$$

$$(10) \quad d\xi = - \sum_{h=1}^6 X_h dx_h - \Omega d\omega - S dT.$$

Behandelt man x_h , ω , T als voneinander unabhängige Variable, so gilt hiernach

$$(11) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x_h} = -X_h, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \omega} = -\Omega, \quad \frac{\partial \xi}{\partial T} = -S.$$

Das zweite thermodynamische Potential lautet:

$$(12) \quad \zeta = \xi + \sum_{h=1}^6 X_h x_h,$$

woraus

$$(13) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial X_h} = +x_h, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \omega} = -\Omega, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial T} = -S.$$

Aus ζ ist schließlich das Potential Φ zu bilden nach

$$(14) \quad \Phi = \frac{\zeta}{T}.$$

Das Potential ξ kann in seiner Abhängigkeit von den Deformationsgrößen x_h durch eine Potenzreihe dargestellt werden. Da die Werte sämtlicher Koordinaten kleine echte Brüche sind, so genügt es, die quadratischen Glieder derselben zu berücksichtigen¹⁾:

$$(15) \quad \xi = \sum_{(i,k)} c_{ik} x_i x_k.$$

Die Koeffizienten c_{ik} sind die adiabatischen Elektrizitätskonstanten und hängen (in erster Annäherung) nicht von der Temperatur ab. Wegen (11) ist schließlich

$$(16) \quad X_h = \sum_{k=1}^6 c_{hk} x_k$$

oder aufgelöst (nach (13)):

$$(17) \quad x_h = \sum_{k=1}^6 C_{hk} X_k.$$

1) Die linearen Glieder stellen die hier nicht in Betracht kommenden Erscheinungen der thermischen Dilatation dar. Vgl. W. Voigt, Lehrb. d. Kristallphysik.

Die Deformationsgrößen x_h , sowie die Spannungskomponenten X_h sind analytische Funktionen und können in ihrer Abhängigkeit von ω durch Potenzreihen dargestellt werden. Da ω nur kleine Werte annimmt, so können dieselben mit dem linearen Gliede abgebrochen werden, so daß

$$(18) \quad x_h = x'_h + x''_h \omega, \quad (h = 1, 2, \dots, 6)$$

$$(19) \quad X_h = X'_h + X''_h \omega.$$

Aus (12), (13), (15) folgt damit

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega &= \sum_{(i,k)} c_{ik} (x''_i x'_k + x'_i x''_k) - \sum_{(h)} (X''_h x'_h + X'_h x''_h) \\ &+ \omega \{ 2 \sum_{(i,k)} c_{ik} x''_i x''_k + 2 \sum X''_h x''_h \} = c' + c'' \omega \end{aligned} \right.$$

und aufgelöst:

$$(21) \quad \omega = C' + C'' \Omega.$$

Dieser Ansatz (18), (19) hat den Sinn, daß bei zwei aufeinanderfolgenden „Verdrehungen“ der Molekeln die Wirkungen auf die Gestalt des Volumelements sich einfach superponieren.

Da das Potential ζ nach (12), (13) von der Variablen

$$(22) \quad X_h, x_h, \Omega, \omega, T$$

abhängt, so sind dieselben für den thermodynamischen Zustand des Systems maßgebend, d. h. Zustandsparameter. Nach (16) bestehen jedoch 6 und nach (18) ebenfalls 6 Relationen zwischen denselben, so daß nur drei willkürlich sind. Werden zwei äußere Parameter, X_i, T , festgehalten, so herrscht Gleichgewicht, wenn

$$(23) \quad \delta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \delta \omega = 0,$$

d. h. wenn

$$(24) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = 0.$$

Dies ist eine weitere Beziehung zwischen den Parametern (22), von denen also nur noch zwei willkürlich sind.

Wir treffen nun noch eine Festsetzung bezüglich der Koeffizienten X''_h von (19). Es sollen nämlich alle X''_h gleich 0 sein bis auf einen, $X''_i \neq 0$. Wenn wir dem Index i nacheinander die Werte 1, 2, ..., 6 erteilen, dann gehören zu den

so definierten Spannungskomponenten (19) nach (17) Deformationsgrößen $x_h^{(i)}$ für $i = 1, 2, \dots, 6$. Da die Kräfte und Deformationen klein sind und außerdem ihre gegenseitige Abhängigkeit linear ist, so gilt das Superpositionsgesetz. D. h. wenn die eben definierten speziellen 6 Spannungstensoren zugleich wirkten, was einem gänzlich willkürlichen Spannungstensor entspricht, so würden sie die Deformationen

$$(25) \quad x_h^{(1)} + x_h^{(2)} + \dots + x_h^{(6)}$$

hervorbringen. Anstatt also den Kristall unter der Wirkung eines beliebigen Kräftesystems zu betrachten, können wir nacheinander Spannungstensoren wirken lassen, von denen jeweils nur eine Komponente von ω abhängig ist. Dies bringt für die folgenden Entwicklungen Vorteile mit sich.

§ 3. Explizite Gleichgewichtsbedingung.

Gleichung (23) § 2 läßt sich explizite aufstellen, wenn man noch berücksichtigt, daß auch die innere Energie U eine analytische Funktion ist, deren Potenzentwicklung nach ω mit den linearen Gliedern abgebrochen werden kann:

$$(1) \quad U = U' + U'' \omega.$$

Dieser Ansatz sagt wieder aus, daß bei zwei aufeinanderfolgenden „Verdrehungen“ der Molekeln die gesamte damit verbundene Änderung der inneren Energie gleich der Summe der beiden Einzeländerungen ist. Nach (8) und (6) § 2 ist

$$(2) \quad dS = \frac{dU + \sum_{(h)} X_h dx_h + \Omega d\omega}{T},$$

also wegen (18) § 2, (1) § 3

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} dS &= \frac{dU' + \sum X_h dx_h' + \Omega d\omega}{T} + \frac{dU'' + \sum X_h dx_h''}{T} \omega \\ &\quad + \frac{U'' + \sum X_h x_h''}{T} d\omega. \end{aligned} \right.$$

Wir denken uns nun mit Hilfe von (17), (18), (19) § 2 die dx_h' , dx_h'' ausgedrückt durch dX_h' , dX_h'' (unabhängig von ω) und betrachten jetzt S als Funktion der Variablen X_h' , X_h'' , T , ω . Bezeichnet $(dS)_\omega$ das bei konstantem Parameter ω genommene

Differential derselben, ebenso $(dS)_{T, X', X''}$ das Differential bei konstanten Parametern T, X_h', X_h'' , so ist¹⁾

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} (dS)_\omega &= \frac{dU' + \sum X_h' dx_h'}{T} + \frac{dU'' + \sum (X_h'' dx_h' + X_h' dx_h'')}{T} \omega \\ &= dS_1 + dS_2 \cdot \omega, \end{aligned} \right.$$

$$(5) \quad (dS)_{T, X', X''} = \left\{ \frac{c' + c'' \omega}{T} + \frac{U'' + \sum (X_h' + X_h'' \omega) x_h''}{T} \right\} d\omega,$$

(da auch U', U'' von ω unabhängig sind, und da nach (20) § 2 $\Omega = c' + c'' \omega$ ist). Daraus folgt aber:

$$(6) \quad S = S_1 + S_2 \omega + \frac{c' \omega}{T} + \frac{c'' \omega^2}{2T} + \frac{U'' + \sum \left(X_h' + \frac{X_h''}{2} \omega \right) x_h''}{T} \omega + k,$$

wo die Konstante k von den Variablen X_h', X_h'', T, ω nicht abhängt.

Nach (1), (14), (12) § 2, (6) ist nun

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi &= \frac{\xi}{T} = \frac{U' + \sum X_h' x_h'}{T} + \frac{U'' + \sum (X_h' x_h'' + X_h'' x_h')}{T} \omega - S_1 \\ &\quad - S_2 \omega - \frac{c' \omega}{T} - \frac{c'' \omega^2}{2T} - \frac{U'' + \sum \left(X_h' + \frac{X_h''}{2} \omega \right) x_h''}{T} \omega - k. \end{aligned} \right.$$

Sollen bei einer willkürlichen Variation des Parameters ω die äußeren Variablen X_i, T konstant bleiben, so muß wegen (19) § 2 $X_i'' = 0$ sein; nach p. 396/397 sind auch alle $X_h'' = 0$ ($h \neq i$).

Unter diesen Bedingungen lautet dann Φ :

$$(8) \quad \Phi = \frac{U' + \sum X_h' x_h'}{T} - S_1 - S_2 \omega - \frac{c' \omega}{T} - \frac{c'' \omega^2}{2T} - k.$$

Eine virtuelle Zustandsänderung bei konstanten äußeren Parametern T, X_i gibt die Gleichgewichtsbedingung:

$$(9) \quad \delta \Phi = \left(-\frac{c' + c'' \omega}{T} - S_2 \right) \delta \omega = 0,$$

d. h.

$$(10) \quad \frac{c' + c'' \omega}{T} = -S_2.$$

Differenzieren nach T bei konstantem X_i gibt²⁾

$$(11) \quad \frac{c''}{T} \left(\frac{\partial \omega}{\partial T} \right)_{X_i} - \frac{c' + c'' \omega}{T^2} = - \left(\frac{\partial S_2}{\partial T} \right)_{X_i}.$$

1) Indem höhere Potenzen von ω vernachlässigt werden.

2) c', c'' sind von T unabhängig angenommen, vgl. p. 408.

Um $(\partial S_2 / \partial T)_{x_i}$ zu berechnen, beachten wir, daß nach (4) (weil $X_i'' = 0$, $X_h'' = 0$ ($h \neq i$)):

$$(12) \quad dS_2 = \frac{dU'' + \sum X_h' dx_h''}{T},$$

also

$$(13) \quad \left(\frac{\partial S_2}{\partial T} \right)_{x_i} = \frac{\left(\frac{\partial U''}{\partial T} \right)_{x_i} + \sum X_h' \left(\frac{\partial x_h''}{\partial T} \right)_{x_i}}{T}.$$

Nach (1) § 3, (18) § 2 sind U'' , x_h'' die Änderungen der inneren Energie bzw. der Deformationsgrößen, welche bei der Änderung „eins“ der Koordinate ω auftreten. X_h' ($h = 1, \dots, 6$) stellen die bei dieser Änderung konstant gehaltenen Spannungskomponenten dar. Nach dem ersten Hauptsatz ist daher

$$(14) \quad U'' + \sum_{(h)} X_h' x_h''$$

die von außen zugeführte Wärme, wenn die „Verdrehung“ ω der Molekeln bei konstanten Spannungen X_i und X_h ($h \neq i$) und bei konstanter Temperatur T um die Einheit zunimmt.

Werden die Spannungen X_h' auch gegenüber Temperaturänderungen konstant gehalten, so ist

$$(15) \quad \left(\frac{\partial U''}{\partial T} \right)_{x_i} + \sum_{(h)} X_h' \left(\frac{\partial x_h''}{\partial T} \right)_{x_i} = \left(\frac{\partial (U'' + \sum X_h' x_h'')}{\partial T} \right)_{x_i} = r$$

der Temperaturkoeffizient dieser Wärme (14). Aus (11) folgt nun

$$(16) \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial T} \right)_{x_i} = \frac{c' + c'' \omega - r T}{c'' T}$$

oder

$$(17) \quad d\omega = \frac{c' + c'' \omega - r T}{c''} \frac{dT}{T}.$$

§ 4. Weitere Hilfsformeln.

Außer dieser Formel lassen sich noch andere Relationen zwischen den Zustandsvariablen aufstellen auf Grund der Eigenschaft des Systems, nur zwei willkürliche Parameter zuzulassen. Werden irgend zwei, x, y , von den Parametern (22), § 2 als bestimmende Variable betrachtet, dann gilt für die bei einer beliebigen Zustandsänderung aufgenommene Wärme:

$$(1) \quad dQ = X dx + Y dy.$$

Ferner ist die „innere Arbeit“, wenn $\Omega d\omega = d\Pi$ gesetzt wird,

$$(2) \quad d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy$$

und die innere Energie

$$(3) \quad dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy,$$

außerdem

$$(4) \quad dx_h = \frac{\partial x_h}{\partial x} dx + \frac{\partial x_h}{\partial y} dy,$$

also schließlich wegen (1), (2), (3) und (6) § 2

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} X dx + Y dy &= \frac{\partial (U - \Pi)}{\partial x} dx + \frac{\partial (U - \Pi)}{\partial y} dy \\ &\quad - \sum_{(h)} X_h \left(\frac{\partial x_h}{\partial x} \right)_y dx - \sum_{(h)} X_h \left(\frac{\partial x_h}{\partial y} \right)_x dy. \end{aligned} \right.$$

Da die Variationen dx, dy gänzlich voneinander unabhängig und willkürlich sind, so folgt

$$(6) \quad X = \frac{\partial (U - \Pi)}{\partial x} - \sum_{(h)} X_h \left(\frac{\partial x_h}{\partial x} \right)_y,$$

$$(7) \quad Y = \frac{\partial (U - \Pi)}{\partial y} - \sum_{(h)} X_h \left(\frac{\partial x_h}{\partial y} \right)_x,$$

und durch Differentiation ergibt sich hieraus

$$(8) \quad \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = \sum_{h=1}^6 \left(\frac{\partial X_h}{\partial x} \frac{\partial x_h}{\partial y} - \frac{\partial X_h}{\partial y} \frac{\partial x_h}{\partial x} \right).$$

Aus (1) folgt durch Division mit T :

$$(9) \quad \frac{dQ}{T} = \frac{X}{T} dx + \frac{Y}{T} dy$$

und hieraus in der bekannten Weise¹⁾

$$(10) \quad \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{T} \left(X \frac{\partial T}{\partial y} - Y \frac{\partial T}{\partial x} \right).$$

Kombination mit (8) liefert

$$(11) \quad X \frac{\partial T}{\partial y} - Y \frac{\partial T}{\partial x} = T \cdot D(xy),$$

wobei

$$(12) \quad D(xy) = \sum_{(h)} \left(\frac{\partial X_h}{\partial x} \frac{\partial x_h}{\partial y} - \frac{\partial X_h}{\partial y} \frac{\partial x_h}{\partial x} \right).$$

1) Vgl. z. B. Chwolson, Lehrb. d. Phys. 3. p. 506. 1905.

§ 5. Adiabatische Spannungsänderung.

Wird die Spannungskomponente X_i adiabatisch (also z. B. plötzlich) vergrößert oder verkleinert, so ist damit notwendig eine Temperaturänderung verbunden, welche sich aus den Formeln (1), (11), (12) § 4 berechnen läßt. Die beiden Parameter x, y sind darin durch

$$(1) \quad x = T, \quad y = X_i$$

zu ersetzen, ferner ist die Zustandsfunktion X durch die spezifische Wärme bei konstantem X_i :

$$(2) \quad X = c_{X_i}.$$

Dann ist $\partial T / \partial x = 1$, $\partial T / \partial y = 0$ und (11) § 4 wird

$$(3) \quad Y = T \cdot \sum_{(h)} \left[\left(\frac{\partial X_h}{\partial X_i} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i} - \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_{X_i} \left(\frac{\partial x_h}{\partial X_i} \right)_T \right].$$

Setzt man ferner in (1) § 4 die Größen (1), (2) ein und betrachtet, daß bei einem adiabatischen Prozeß $dQ = 0$ ist, so wird

$$(4) \quad c_{X_i} dT + Y dX_i = 0,$$

oder wegen (3):

$$(5) \quad dT = - \frac{T}{c_{X_i}} \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial X_i} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i} - \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_{X_i} \left(\frac{\partial x_h}{\partial X_i} \right)_T \right\} \cdot dX_i.$$

Da wir in unserem System die Parameter T, X_i als unabhängige wählen können, so ist durch sie der Parameter ω völlig bestimmt, also durch dT und dX_i auch die Änderung $d\omega$. Dieselbe läßt sich berechnen, wenn man annimmt, daß bei der adiabatischen Spannungsänderung zunächst ω konstant bleibt und X_i um dX_i sich ändert, dann $X_i + dX_i$ konstant bleibt und ω um $d\omega$ variiert. Es ist zunächst zu zeigen, daß diese beiden Vorgänge möglich sind. In jedem derselben tritt nämlich zu (16), (18) § 2 und (23) bzw. (24) § 2 eine weitere Bedingung hinzu, nämlich im ersten $\omega = \text{const}$; im zweiten $X_i + dX_i = \text{const}$. Dieselben müssen mit (16), (18), (23) bzw. (24) § 2 verträglich sein. Nun ist wegen $\omega = \text{const}$ auch $\delta\omega = 0$ also $\delta\Phi = 0$ und also keine wesentliche Bedingung im ersten Vorgang hinzugetreten. Ferner ist bei $X_i + dX_i = \text{const}$ (23) § 2 mit (16) § 3 gleichwertig, (16), (18) § 2 sind, auch wenn $X_i + dX_i = \text{const}$, erfüllt. Also sind beide Vorgänge möglich.

Um die unter der Bedingung $\omega = \text{const}$ auftretende Temperaturänderung zu berechnen, nehmen wir als unabhängige Veränderliche

$$(6) \quad x = T, \quad y = \omega.$$

Dann ist

$$(7) \quad dQ = c_\omega dT + \varrho d\omega.$$

c_ω ist die Wärmekapazität bei konstantem ω und ϱ die Wärmemenge, welche zur Änderung von ω um die Einheit bei konstanter Temperatur nötig ist. (11) § 4 wird demzufolge

$$(8) \quad \varrho = T \sum_{(h)} \left[\left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_\omega - \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_\omega \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T \right].$$

Hieraus folgt

$$9) \quad \left(\frac{\partial X_i}{\partial T} \right)_\omega = \left[T \left\{ \sum_{(h)}' \left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_\omega - \sum_{(h)}' \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_\omega \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T \right\} - \varrho \right] \frac{1}{\left(\frac{\partial x_i}{\partial \omega} \right)_T}.$$

($\sum'$ bedeutet Summation über alle Werte von h außer $h = i$).

Die Temperaturänderung bei konstantem ω ist also

$$(10) \quad dT = \frac{\left(\frac{\partial x_i}{\partial \omega} \right)_T}{- \varrho + T \left\{ \sum_{(h)} \left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_\omega - \sum_{(h)}' \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_\omega \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T \right\}} \cdot dX_i.$$

(10) unterscheidet sich von der endgültig im Gleichgewichte eintretenden Temperaturänderung (5) um

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta T &= \left[\frac{T}{c_{X_i}} \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_{X_i} \left(\frac{\partial x_h}{\partial X_i} \right)_T - \left(\frac{\partial X_h}{\partial X_i} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\left(\frac{\partial x_i}{\partial \omega} \right)_T}{- \varrho + T \left\{ \sum_{(h)} \left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_\omega - \sum_{(h)}' \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_\omega \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T \right\}} \right] dX_i. \end{aligned} \right.$$

Um diesen Wert muß sich also die Temperatur ändern, wenn der Gleichgewichtszustand erreicht werden soll. Dabei ist nun $X_i + dX_i$ konstant zu halten. Im Gleichgewichte gehört infolgedessen nach (17) § 3 zur Temperaturänderung δT die Änderung von ω :

$$(12) \quad d\omega = \frac{c' + c''\omega - rT}{c''} \cdot \frac{\delta T}{T}$$

oder:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} d\omega &= \frac{c' + c''\omega - rT}{c''T} \left[\frac{T}{c_{X_i}} \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_{X_i} \left(\frac{\partial x_h}{\partial X_i} \right)_T - \left(\frac{\partial X_h}{\partial X_i} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\left(\frac{\partial x_i}{\partial \omega} \right)_T}{-q + T \left\{ \sum_{(h)} \left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_\omega - \sum_{(h)} \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_\omega \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T \right\}} \right] dX_i. \end{aligned} \right.$$

Die Parameter T, ω haben nunmehr im definitiven Gleichgewichtszustand die Änderungen (5) bzw. (13) erfahren.

§ 6. Bedingung der Plastizität.

Wenn aus irgendeinem Grunde die Parameter T, ω variieren, so ist in § 4

$$(1) \quad x = T, \quad y = \omega$$

zu setzen, und aus (1) § 4 folgt

$$(2) \quad c_\omega dT + Y d\omega = 0,$$

ferner aus (11) § 4:

$$(3) \quad -Y = T \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_\omega \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T - \left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_\omega \right\}.$$

(2) und (3) ergeben

$$(4) \quad d\omega = \frac{c_\omega}{T \cdot \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_\omega \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T - \left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_\omega \right\}} dT.$$

Bei unserem Vorgang adiabatischer Belastung variieren nun gerade die Parameter T und ω nach (5) § 5 bzw. (13) § 5. Die Änderung dT nach (5) § 5 bewirkt daher infolge dieser Beziehung (4) einer Variation von ω :

$$(5) \quad d\omega = - \frac{c_\omega \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial X_i} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i} - \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_{X_i} \left(\frac{\partial x_h}{\partial X_i} \right)_T \right\}}{c_{X_i} \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_\omega \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T - \left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_\omega \right\}} dX_i.$$

Nach (13) § 5 ist aber schon eine Variation des Parameters ω vorhanden, und die beiden heben sich gerade auf, wenn:

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & \frac{c' + c'' - r T}{c'' T} \left[\frac{T}{c_{X_i}} \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_{X_i} \left(\frac{\partial x_h}{\partial X_i} \right)_T - \left(\frac{\partial X_h}{\partial X_i} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i} \right\} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\left(\frac{\partial x_i}{\partial \omega} \right)_T}{- \varrho + T \left\{ \sum_{(h)} \left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_\omega - \sum_{(h)}' \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_\omega \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T \right\}} \right] \\ & \quad + \frac{c_\omega \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_{X_i} \left(\frac{\partial x_h}{\partial X_i} \right)_T - \left(\frac{\partial X_h}{\partial X_i} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i} \right\}}{c_{X_i} \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_\omega \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T - \left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_\omega \right\}} = 0. \end{aligned} \right.$$

Berechnet man aus (4) § 6 und (13) § 5 die zur Spannungsänderung dX_i gehörige Temperaturerhöhung, so wird dieselbe durch (5) § 5 ebenfalls kompensiert, wenn diese Bedingung (6) erfüllt ist. Es haben also die Parameter T und ω ihre ursprünglichen Werte wieder erlangt.

Da unser System zweiparametrig ist, so hängt U nur von den Parametern T, ω ab. Da dieselben nach den vorigen ihre ursprünglichen Werte wieder erlangt haben, so muß demnach auch U seinen Anfangswert wieder haben. D. h. es ist keine Deformationsenergie mehr vorhanden. Obgleich eine Deformation des Kristalles infolge der Belastung der Spannungskomponente X_i um dX_i stattgefunden hat, befindet er sich wieder in spannungslosem Zustand.

Der ganze Vorgang kann anschaulich so gedeutet werden, daß infolge der äußeren Kraftwirkung zunächst die Molekeln eine Verdrehung aus ihren Gleichgewichtslagen erleiden, deren Größe durch (13) § 5 gegeben ist unter gleichzeitiger Änderung der Temperatur nach (5) § 5. Natürlich erfahren auch die Deformationsgrößen x_h Änderungen. Wenn (6) erfüllt ist, so gelangen die Molekeln in neue Gleichgewichtslagen, was sich dadurch zu erkennen gibt, daß die Parameter T, ω ihre Ausgangswerte wieder annehmen. Bedingung (6) reicht aber *nicht* aus, um auch zu bewirken, daß die Änderungen der Parameter x_h verschwinden. Es bleibt also eine Deformation ohne innere Spannungen.

Dieser Vorgang ist natürlich als sich ständig wiederholend zu denken, wenn die Kraft $X_i + dX_i$ stetig wirkt.

Infolge der Parameteränderungen $dT, d\omega$ nach (5) § 5, (13) § 5 wird innere Energie aufgespeichert:

$$(7) \quad dU = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial \omega} d\omega,$$

(welche der von der äußeren Kraft $X_i + dX_i$ geleisteten Arbeit entstammt). Sind nun die Molekeln in ihren neuen Gleichgewichtslagen angelangt, was sich durch Verschwinden der Änderungen dT , $d\omega$ kennzeichnet, so ist auch nach (7) $dU = 0$. Die Energie (7) verwandelt sich dabei in Wärme, was als Reibungswärme in Erscheinung tritt.

Sie kann andererseits zunächst potentielle Formenergie bleiben¹⁾, auf deren Kosten alsdann der Deformationsvorgang von selbst noch etwas weiter schreitet. Letzteres tritt besonders bei Umklappung des Raumgitters in Zwillingsstellung ein, wie gewisse Beobachtungen namentlich von Reusch lehren. Z. B. können infolge einer Kraftwirkung im Kristall auftretende Spalten oder Hohlräume wieder vollständig zurückgehen. Hat die Deformation aber eine gewisse Grenze überschritten, so geht sie nicht mehr zurück, sondern schreitet noch etwas weiter. Es wird also potentielle Energie der Molekeln angesammelt, auf deren Kosten im ersten Fall der Vorgang rückgängig wird, im zweiten Fall von selbst noch etwas weiter geht.

§ 7. Die ohne Störung der Symmetrie des Kristalles, d. h. seiner Raumgitterstruktur möglichen plastischen Deformationen.

Wir betrachten nun die Fälle, bei welchen die Wärme ϱ , die zur Änderung 1 des Parameters ω unter konstanter Temperatur nötig ist, groß ist im Vergleich zu den übrigen in (6) § 6 vorkommenden Ausdrücken $(\partial X_h / \partial T)_{X_i}, \dots$. Letztere sind ohnehin klein, da z. B. $(\partial x_h / \partial T)_{X_i}$ ein linearer Ausdehnungskoeffizient ist. Ist also die zur Verdrehung der Molekeln unter konstanter Temperatur nötige Wärmezufuhr ϱ beträchtlich, so folgt aus (6) § 6 die vereinfachte Gleichung:

$$(1) \quad \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial X_i} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i} - \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_{X_i} \left(\frac{\partial x_h}{\partial X_i} \right)_T \right\} = 0.$$

Ist dieselbe erfüllt, so gelangen nach § 6 die Molekeln infolge der Deformation wieder in neue Gleichgewichtslagen, während die Deformationsgrößen x_h sich um dx_h geändert haben. Wenn sie in den neuen Gleichgewichtslagen ange-

1) Solange (5), (13), § 5 von 0 verschieden sind.

kommen sind, so ist die Temperatur nach § 6 wieder die alte. Also können die Verhältnisse

$$(2) \quad \frac{dx_h}{dX_i}, \quad \frac{dx_h}{d\bar{X}_i} \quad (h = 1, 2 \dots, 6)$$

als Differentialquotienten der Zustandsparameter X_h nach X_i bei konstanter Temperatur angesehen und mit den Größen

$$(3) \quad \left(\frac{\partial x_h}{\partial X_i} \right)_T, \quad \left(\frac{\partial X_h}{\partial \bar{X}_i} \right)_T \quad (h = 1, 2 \dots, 6)$$

identifiziert werden; (1) schreibt sich dann

$$(4) \quad \sum_{(h)} \left[\frac{dX_h}{d\bar{X}_i} \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i} - \frac{dx_h}{dX_i} \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_{X_i} \right] = 0.$$

Nach (16) § 2 drücken sich die Spannungskomponenten X_h durch die Deformationsgrößen x_h aus, so daß auch

$$(5) \quad \frac{dX_h}{dX_i} = \sum_{(k)} c_{hk} \frac{dx_k}{dX_i}.$$

Folglich wird (4):

$$(6) \quad \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i} \sum_{(k)} \left(c_{hk} \frac{dx_k}{dX_i} \right) - \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_{X_i} \frac{dX_h}{dX_i} \right\} = 0.$$

Nun ist $\left(\frac{\partial X_i}{\partial T} \right)_{X_i} = 0$, ferner (nach § 2 p. 396/397) $X_h = X_h' (h \neq i)$.

Wir machen noch die Annahme, daß $\left(\frac{\partial X_h'}{\partial T} \right)_{X_i}$ ebenso $\left(\frac{\partial X_h''}{\partial T} \right)_{X_i}$ zu vernachlässigen seien gegenüber $\left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i}$, was nach (19) § 2 heißt, daß die Temperaturabhängigkeit der Spannungen wesentlich durch den „inneren Parameter“ ω vermittelt wird. Dann lautet (6):

$$(7) \quad \sum_{(k)} a_{ik} \frac{dx_k}{dX_i} = 0,$$

wobei

$$(8) \quad a_{ik} = \sum_{(h)} c_{hk} \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_{X_i}.$$

Diese Bedingung wurde abgeleitet unter der Voraussetzung, daß nur die Komponente X_i von ω abhängig sei. Ist der wirkende Spannungstensor ganz beliebig, so betrachten wir statt dessen sechs Spannungstensoren, von denen jeweils nur eine Komponente mit ω variiert, nämlich beim ersten X_1 , beim

zweiten X_2 , usw. Das Endresultat ist nach p. 397 dasselbe, wie wenn alle sechs Komponenten gleichzeitig von ω abhängig wären. Für jeden dieser Tensoren erscheint nun nach dem vorigen eine Bedingung von der Form (7). Also stellen bei Anbringung eines beliebigen Spannungstensors Gleichung (7) für die Indizes $i = 1, 2 \dots 6$ die notwendige und hinreichende Bedingung der Plastizität dar.

Da wir bisher nur ein einzelnes Volumelement des Kristalls betrachtet haben, so sind die auf dasselbe bei der adiabatischen Beanspruchung wirkenden Komponenten $dX_1 \dots, dX_6$ erst zu berechnen aus den auf den ganzen Kristall angewandten äußeren Kräften. Volumkräfte kommen keine zur Anwendung, dagegen Oberflächenkräfte. In den meisten praktisch realisierten Fällen¹⁾ wirkt in jedem Punkte eines Teiles der Oberfläche eine Kraft S in ein und derselben Richtung s . Dann sind jedenfalls die daraus resultierenden auf das Volumelement wirkenden Spannungen X_i Funktionen von S , und es ist ferner

$$(9) \quad \frac{dx_h}{dX_i} = \frac{dx_h}{dS} \frac{dS}{dX_i}.$$

Die Gleichungen (7) schreiben sich demnach

$$(10) \quad \frac{dS}{dX_i} \cdot \sum_{(k)} a_{ik} \frac{dx_k}{dS} = 0 \quad (i = 1, 2 \dots, 6)$$

oder

$$(11) \quad \sum_{(k)} a_{ik} \frac{dx_k}{dS} = 0 \quad (i = 1, 2 \dots, 6).$$

Die Quotienten dx_k/dS definieren diejenige Deformation des Volumelements, welche durch die äußere, in der Richtung s wirkende Kraft hervorgebracht wird. Denn die Belastung dS bringt die Deformationen $dx_k = \frac{dx_k}{dS} dS$ zustande. Genügen die dx_k/dS den Gleichungen (11), so ist die Deformation dauernd, „plastisch“. Die vorhandenen Möglichkeiten plastischer Deformation sind also durch die physikalischen Konstanten des Kristalls (die in den a_{ik} auftreten) bestimmt. Es sind keineswegs beliebige Deformationen möglich. Ihre Mannigfaltigkeit

1) Z. B. wenn der Kristall mit zwei (angeschliffenen) Flächen zwischen die Backen einer Presse gebracht wird.

ist eine diskrete, gegeben durch die Mannigfaltigkeit der Lösungen der linearen Gleichungen (11). Z. B. sind nur in einzelnen bestimmten Richtungen solche möglich. Dies ist nun gerade charakteristisch für die Experimente, welche die Existenz von Gleitflächen, die Möglichkeit künstlicher Zwillingsbildung usw. lehren.

Da die Deformation des Kristalls durch (11) bestimmt ist, worin die Elastizitätskonstanten auftreten, so bleiben diese letzteren bei der Deformation ungeändert. Die Matrix (c_{ik}) der Elastizitätskonstanten legt aber die Symmetrieverhältnisse des Kristalls fest¹⁾, je nachdem welche Konstanten verschwinden, und welche wirklich auftreten. Also bleibt bei den nach (11) möglichen Deformationen die Symmetrie des Kristalls gewahrt, d. h. seine Raumgitterstruktur erhält sich unverändert.

Um die bei einem vorgelegten Kristall mögliche plastische Deformation zu bestimmen, sind die sechs linearen homogenen Gleichungen (11) aufzulösen nach den sechs Unbekannten dx_k/dS ($k = 1, 2 \dots, 6$). Da aber nach p. 406

$$\left(\frac{\partial X_h'}{\partial T}\right)_{X_i}, \quad \left(\frac{\partial X_h''}{\partial T}\right)_{X_i} \quad (h \neq i)$$

zu vernachlässigen sind, so besteht das Gleichungssystem nur aus einer Gleichung. Denn nach (17) § 2 und (19) § 2 ist

$$(12) \quad x_h' = \sum_{(k)} C_{hk} X_k', \quad x_h'' = \sum_{(k)} C_{hk} X_k'',$$

also auch

$$(13) \quad \left(\frac{\partial x_h'}{\partial T}\right)_{X_i}, \quad \left(\frac{\partial x_h''}{\partial T}\right)_{X_i}$$

zu vernachlässigen. Nach (18) § 2 ist somit

$$(14) \quad \left(\frac{\partial x_h}{\partial T}\right)_{X_i} = x_h'' \left(\frac{\partial \omega}{\partial T}\right)_{X_i},$$

und die Gleichungen (11) schreiben sich

$$(15) \quad \sum_{(k)} \frac{dx_k}{dS} \cdot \sum_{(h)} c_{hk} x_h'' = 0$$

oder, wenn

1) W. Voigt, Kristallphysik p. 584. § 287.

$$(16) \quad \sum_{(k)} c_{hk} x_h'' = a_k,$$

$$(17) \quad \sum_{(k)} a_k \frac{dx_k}{dS} = 0.$$

§ 8. Translation längs Gleitflächen.

An Stelle der Deformationsgrößen $x_1, x_2 \dots, x_6$ können die Verschiebungen u, v, w eingeführt werden nach

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, & x_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, & x_3 = \frac{\partial w}{\partial x}, \\ x_4 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}, & x_5 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, & x_6 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Werden

$$(2) \quad \frac{du}{dS} = u', \quad \frac{dv}{dS} = v', \quad \frac{dw}{dS} = w'$$

gesetzt, so liefert (17) § 7 die Gleichung

$$(3) \quad \begin{cases} a_1 \frac{\partial u'}{\partial x} + a_6 \frac{\partial u'}{\partial y} + a_5 \frac{\partial u'}{\partial z} + a_6 \frac{\partial v'}{\partial x} + a_2 \frac{\partial v'}{\partial y} + a_4 \frac{\partial v'}{\partial z} \\ + a_5 \frac{\partial w'}{\partial x} + a_4 \frac{\partial w'}{\partial y} + a_2 \frac{\partial w'}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Wir betrachten nun diese Differentialgleichung in dem speziellen Fall, wo sie eine Translation in der Richtung der x -Achse beschreibt, d. h. wir suchen die Bedingung, unter welcher sie die Lösung zuläßt.

$$(4) \quad u' = \alpha y + \beta, \quad v' = 0, \quad w' = 0$$

(α, β sind Konstante). Die Gleichung (3) vereinfacht sich in diesem Falle zu $a_6 \cdot \alpha = 0$, d. h. es muß

$$(5) \quad a_6 = 0$$

oder

$$(6) \quad \sum_{(h)} c_{h6} x_h'' = 0$$

sein.

Eine Prüfung dieser Bedingung an quantitativen Messungen ist nicht möglich ohne genauere Kenntnis von der Natur des „inneren Parameters“ ω , da die x_h'' ohne dies schlechterdings

unbekannt sind. Es soll daher die vereinfachende Hypothese gemacht werden, daß bei regulären Kristallen die x_h'' alle einander gleich seien. Dies besagt, daß jede Art von Deformation dieselbe Änderung des „inneren Zustandes“ hervorruft, was bei regulären Kristallen einigermaßen plausibel erscheint. Bedingung (6) vereinfacht sich dann noch weiter zu

$$(7) \quad \sum_{(h)} c_{h6} = 0.$$

Diese Formel soll an Steinsalz geprüft werden, für welches die elastischen Konstanten bekannt sind. Die Gleitflächen sind Dodekaederflächen. Die x, z -Ebene unseres Koordinatensystems muß also mit einer solchen zusammenfallen. Das mit den kristallographischen Achsen zusammenfallende Koordinatensystem sei x', y', z' . Auf dieses bezogen sind die adiabatischen Elastizitätskonstanten:

$$(8) \quad c'_{11} = 4,88 \quad c'_{12} = c'_{21} = 1,43 \quad c'_{44} = 1,29$$

(in willkürlichen Einheiten), alle übrigen = 0. Die auf das Koordinatensystem x, y, z bezogenen Elastizitätskonstanten berechnen sich hieraus mit Hilfe der Winkel, die die beiden Achsenkreuze miteinander bilden. Es seien $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Winkel der x -Achse mit den x', y', z' -Achsen entsprechend $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ für y und $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ für z . Dann findet man:

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 = 114^\circ 27' 4'', & \gamma_1 = 35^\circ 49' 44'', \\ \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 54^\circ 10' 16'', \\ \alpha_3 = \beta_3 = 45^\circ & \gamma_3 = 90^\circ. \end{cases}$$

Nach bekannten Formeln¹⁾ sind schließlich

$$(10) \quad \begin{cases} c_{10} = -0,57245, & c_{20} = -0,53723, & c_{30} = 0,48578, \\ c_{40} = 0,39874, & c_{50} = -0,36623, & c_{60} = 0,449307. \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$(11) \quad \sum_{(h)} c_{h6} = -0,20208.$$

Nimmt man an, daß die Konstanten (8) auf 5 Proz. genau bestimmt seien, so sind die Werte (10) nur noch auf 50 Proz. genau, und da diese Größen in (11) additiv auftreten, so kann

1) W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik.

der Fehler in (11) 100 Proz. und noch mehr erreichen. Innerhalb der Fehlergrenzen ist also Bedingung (7) erfüllt.

Aus (7) entstehen natürlich weitere Bedingungen, wenn der Kristall irgendeiner mit den Symmetrieverhältnissen verträglichen Deckbewegung unterworfen wird. Für diese ist der Nachweis nach dem obigen Muster gesondert zu erbringen.

§ 9. Beliebige Deformationen.

Die bisher diskutierte Bedingungsgleichung (11) § 7 für Plastizität ist bloß ein durch gewisse Vernachlässigungen gewonnener Spezialfall der allgemeinen Bedingung (6) § 6. Diese selbst beschreiben noch viel kompliziertere Bewegungen als die aus (11) § 7 folgenden einfachen, wie Translationen usw. sind. Die Symmetrie bleibt bei denselben im allgemeinen nicht erhalten. In der Tat sind Deformationen von Kristallen beobachtet¹⁾, bei welchen einzelne Flächen gekrümmt werden u. dgl. mehr.

An den Gleichungen (6) § 6 ist noch der Spezialfall von Interesse, wo die Größen $(\partial x_i / \partial \omega)_T$ klein sind gegenüber den übrigen darin auftretenden Konstanten. Die linke Seite kann dann in zwei Faktoren zerlegt werden, von denen der eine identisch ist mit (1) § 7 und gleich 0 gesetzt auf den Fall, der §§ 7, 8 führt. Dagegen liefert der andere Faktor, gleich 0 gesetzt, die Bedingung:

$$(1) \quad \frac{c' + c'' \omega - r T}{c'' T} - \frac{c \omega}{c_{X_i} \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_\omega - \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_\omega \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T \right\}} = 0.$$

Dieselbe enthält lediglich Materialkonstanten, aber keine Größen, welche sich auf die Art der Bewegung selbst beziehen wie (11) § 7. Ein Kristall, der unter geeigneten äußeren Kräften und Temperaturen (1) erfüllt, vermag also willkürliche, mit Störung der Symmetrie verbundene Deformationen zu erleiden, genau als wäre er ein amorpher Körper. Dies ist nach Milch und Ritzel bei Steinsalz über 200° der Fall.

1) O. Lehmann entdeckte zuerst derartiges an Gips und Ammoniumnitrat, deren Kristalle sich beliebig biegen lassen. Ferner konnte Reusch Säulchen von Steinsalz komprimieren, wobei die Seitenflächen sich krümmten.

Ferner gehören hierher die zähflüssigen Kristalle O. Lehmanns, z. B. Jodsilber. Da bei denselben die Elastizitätsgrenze so ist¹⁾, sie also Flüssigkeiten vorstellen, so muß (1) bei $\omega = 0$ erfüllt sein, also:

$$(2) \quad \frac{c' - rT}{c''T} - \frac{c\omega}{c_{X_i} \sum_{(h)} \left\{ \left(\frac{\partial X_h}{\partial \omega} \right)_T \left(\frac{\partial x_h}{\partial T} \right)_\omega - \left(\frac{\partial X_h}{\partial T} \right)_\omega \left(\frac{\partial x_h}{\partial \omega} \right)_T \right\}} = 0.$$

Karlsruhe, Physikal. Institut der Techn. Hochschule.

1) Elastizitätsgrenze ist diejenige Kraft, bei der gerade eben Fließen eintritt. Bei geringeren Beanspruchungen verhält sich der Körper elastisch. (1) gibt an, wie groß bei vorgegebener Temperatur die „Verdrehung“ ω durch die Wirkung der Kraft X_i gemacht werden muß, bis Fließen eintritt. Diese beiden Werte T, ω bestimmen dann auch die zugehörige Kraft X_i selbst (da das System zweiparametrig ist). Ist die Elastizitätsgrenze $= 0$, so braucht nicht erst eine Verdrehung ω stattzufinden, bis Fließen eintritt; (1) muß also bei $\omega = 0$ gelten.

(Eingegangen 1. November 1914.)