Ueber die genaue Bestimmung der Brechung und Zerstreuung des Lichts in gegebenen Glasarten mit
Hülfe sorgfältig geschliffener Prismen.

Von Herrn Lieutenant *Hartmann* in der Königl. Hannöv. Artillerie.

Lehrsätze aus der Catoptrik und Dioptrik.

1.

Bestimmung der Winkel zwischen leuchtenden Punkten, durch
Zurückstrahlung von einer spiegelnden Ebene.

Wenn der Lichtstrahl, welcher von dem leuchtenden Punkte A ausgeht, die spiegelnde Ebene in dem Punkte R trifft; so liegt der zugehörige reflectirte Strahl $R(A)$ in der Ebene, welche durch die Normallinie RP des Incidenzpunktes R und durch den leuchtenden Punkt A gedacht werden kann. Diese Zurückwerfungsebene durchschneidet sich also mit der spiegelnden Ebene in der geraden Linie $s \dots R \dots (s)$ unter rechten Winkeln.

Betrachtet man den Incidenzpunkt R wie den Anfangspunkt eines beliebigen rechtwinkligen Coordinaten-Systems, dessen Axen in der Zurückwerfungsebene $sP(s)$ liegen und bezeichnen $\alpha\epsilon, (\alpha)(\epsilon)$ in dieser Voraussetzung respective die Coordinaten der Punkte $s, (s)$, ferner $ab, (a)(b)$ der Reihe nach Coordinaten der Punkte $A, (A)$; so kann man

$$\begin{aligned} \tan \psi &= \frac{\epsilon}{\alpha}; & \tan \varphi &= \frac{b}{a} \\ \tan(\psi) &= \frac{(\epsilon)}{(\alpha)}; & \tan(\varphi) &= \frac{(b)}{(a)} \end{aligned}$$

setzen. Hierin bezeichnen $\psi, (\psi)$ die Winkel, welche die Lage der Linien Rs und $R(s)$ gegen die erste Axe des vorausgesetzten Coordinaten-Systems aussprechen und $\varphi, (\varphi)$ bedeuten die Winkel, welche auf die nämliche Art die Lage der Linien RA und $R(A)$ gegen dieselbe Axe des genannten Coordinaten-Systems nennen.

Hierdurch erhält man Gelegenheit, das Gesetz der Zurückstrahlung in der Form

$$\varphi - \psi = (\psi) - (\varphi)$$

darstellen zu können und es ist hierbei ganz gleichgültig, ob der Winkel $(s)R(A)$ oder der Winkel $PR(A)$ den Namen: Reflectionswinkel erhält; weil aber $(\psi) = \psi + 180^\circ$ ist, so findet man aus der obigen Form die Beziehung:

$$\varphi + (\varphi) = 2\psi + 180^\circ.$$

Sollen die Lichtstrahlen, welche von einem zweiten leuchtenden Punkte ausgehen, in demselben Incidenzpunkte R und von derselben spiegelnden Ebene zurückgeworfen werden; so liegt der zugehörige reflectirte Strahl $R(B)$ in der Ebene, welche durch dieselbe Normallinie RP und durch den zweiten leuchtenden Punkt B gedacht werden kann und diese zweite Zurückwerfungsebene durchschneidet sich mit der spiegelnden Ebene in der geraden Linie $s_1 \dots R \dots (s)_1$ unter rechten Winkeln. Nimmt man in dieser zweiten Zurückwerfungsebene $s_1P(s)_1$ ein zweites rechtwinkliges Coordinaten-System an, für welches R wieder der Anfangspunkt ist und bezeichnen $\alpha_1\epsilon_1, (\alpha_1)(\epsilon_1)$ die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte $s_1, (s)_1$, ferner $a_1b_1, (a_1)(b_1)$ die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte $B, (B)$; so kann für diesen Fall zuerst

$$\begin{aligned} \tan \psi_1 &= \frac{\epsilon_1}{\alpha_1}; & \tan \varphi_1 &= \frac{b_1}{a_1} \\ \tan(\psi)_1 &= \frac{(\epsilon)_1}{(\alpha)_1}; & \tan(\varphi)_1 &= \frac{(b)_1}{(a)_1} \end{aligned}$$

gesetzt werden; alsdann hat man nach dem Gesetze der Zurückstrahlung

$$\varphi_1 - \psi_1 = (\psi)_1 - (\varphi)_1$$

und weil $(\psi)_1 = \psi_1 + 180^\circ$ ist; so wird

$$\varphi_1 + (\varphi)_1 = 2\psi_1 + 180^\circ.$$

Wenn man nun der spiegelnden Ebene eine solche Lage giebt, daß sie mit der Ebene ARB rechten Winkel bildet, so müssen beide Zurückwerfungen in dieser Ebene geschehen; alsdann kann aber auch die Lage der Punkte $A, (A)$ und $B, (B)$ auf einerlei Coordinaten-System bezogen werden, dessen Axen in der Ebene ARB liegen und dessen Anfangspunkt R ist.

Sollte aber hierbei der zurückgeworfene Strahl $R(B)$ in die Lage der Linie RA kommen, so kann dieses nur durch eine Drehung der spiegelnden Ebene geschehen und die Axe dieser Drehung muß mit der normalen Zurückwerfungs-

ebene ABR rechte Winkel bilden. Dieser Fall wird in den Gleichungen $\varphi + (\varphi) = 2\psi + 180^\circ$; $\varphi_1 + (\varphi)_1 = 2\psi_1 + 180^\circ$ dadurch bezeichnet, daß man $(\varphi)_1 = \varphi_1$ vorschreibt; alsdann ist

$$\varphi_1 - \varphi = 2(\psi_1 - \psi).$$

Hierinn bezeichnet aber $(\varphi_1 - \varphi)$ den Winkel, welchen die erleuchtenden Lichtstrahlen AR und BR in R mit einander bilden und $(\psi_1 - \psi)$ ist der Winkel, welchen die spiegelnde Ebene beschreiben mußte, indem sie sich um die genannte Axe drehte.

Anmerkung. Wenn man auf die unmittelbare Messung sehr kleiner Winkel verzichtet, so folgt aus dem eben angeführten Satze, daß bei den Spiegelkreisen, Sextanten u. s. f. der kleine Spiegel entbehrt werden kann, ohne daß dadurch ein anderer, als der genannte Nachtheil entsteht; vielmehr ist sehr zu bezweifeln, ob der Umstand, daß man mit den Spiegelwerkzeugen, wie sie gewöhnlich von Liebhabern der Astronomie und von Seefahrern gebraucht werden, sehr kleine Winkel messen kann, wichtig genug ist, um den großen Lichtverlust dadurch zu entschuldigen, der doch durch Anwendung des kleinen Spiegels immer entstehen muß. Es würde zu weit führen, hier die Form näher zu bezeichnen, welche z. B. die Spiegelkreise ohne kleinen Spiegel erhalten müssen, wenn sie ausserdem auch noch den Forderungen einer größeren Bequemlichkeit im Gebrauche und einer größeren Genauigkeit sowohl in der Construction und Anordnung der einzelnen Theile, als auch der Messungen selbst Genüge leisten sollen *); es mag hinreichend sein, nur noch des Umstandes zu erwähnen, daß die Construction der Spiegelkreise und Sextanten mit kleinem Spiegel mehrere Schriftsteller zu einer solchen Darstellung der, dem Gebrauche dieser Instrumente zum Grunde liegenden, Theorie verleitet hat, welche Anderen zu offenbaren Irrthümern Veranlassung geben konnte. Der kleine Spiegel hat ja durchaus nur den Nutzen, die von dem großen Spiegel zurückgeworfenen Lichtstrahlen durch eine zweite Spiegelung in einer anderen und zwar in der Linie zurückzuwerfen, welche man wegen der Construction der übrigen Theile des Instrumentes als bestimmte Ziellinie vorschreiben mußte, weil diese Construction nicht erlaubt, geradezu auf das Spiegelbild zu zielen, welches von dem großen Spiegel hervorgebracht wird. Bei der Messung der Winkel wird mit Hilfe der Eintheilung nur die GröÙe der Drehungen bestimmt, welche der große Spiegel beschreibt, um dadurch nacheinander die von den verschiedenen leuchtenden Punkten ausgehenden Strahlen in einer und derselben vorgeschriebenen Linie zurückzuwerfen. Wäre also diese Linie selbst durch die Axe des Fernrohrs vorgestellt, so ist auch der kleine Spiegel unnütz; wenn aber hingegen die Axe des Fernrohrs in der Zurückwerfungsebene eine andere Lage hat, so muß man jener Linie, z. B. durch eine zweite Zurückwerfung, erst die Lage geben, daß sie mit der

Axe des Zielrohrs zusammenfällt. Hieraus sieht man zunächst, daß diese Ablenkung durch Spiegelung freilich am einfachsten durch den einen Spiegel geschehen kann, welcher vorhin der kleine genannt wurde; wenn man aber nicht an den Lichtverlust denkt, so hätte die genannte Ablenkung auch eben so gut nach und nach durch Spiegelung von mehr als einer neuen spiegelnden Ebene geschehen können. Es soll durch diese Bemerkung nur darauf hingewiesen werden, daß sich der Gebrauch des kleinen Spiegels durchaus nicht geradezu auf die eigenthümliche Anwendung einer spiegelnden Ebene zur Messung der Winkel zwischen leuchtenden Punkten bezieht, sondern daß die genannten Winkel nur durch die Drehungen des großen Spiegels gemessen werden und daß diejenigen Winkel, welche die Ebene des großen Spiegels mit der des kleinen in bestimmten Fällen bilden mag, bei diesen Messungen auf keinen Fall in nothwendige Betrachtung kommen; hieraus folgt aber, daß das Centrum der Winkelmessung das Centrum der Eintheilung ist und daß deshalb auch die Tafeln, welche von Schriftstellern geodätischer Werke in der irrigen Voraussetzung construirt wurden, daß mit Spiegelkreisen und Sextanten, z. B. die Winkel der Dreiecke bey trigonometrischen Aufnahmen excentrisch gemessen wurden, ganz unnütz sind.

2.

Verbindung von zwei spiegelnden Ebenen.

Werden zwei sich durchkreuzende spiegelnde Ebenen die beide dem leuchtenden Punkte A zugewendet sind, von der durch den leuchtenden Punkt gedachten gemeinschaftlichen normalen Zurückwerfungsebene in den geraden Linien $s \dots (s)$ und $s_1 \dots (s)_1$ geschnitten; so bilden diese Linien den Winkel, unter welchem sich die spiegelnden Ebenen selbst durchschneiden. Der Lichtstrahl, welcher von A ausgehend, jene Linien in ihrem Durchschnittspunkte R trifft, wird von der ersten spiegelnden Ebene nach (A) und von der zweiten spiegelnden Ebene nach (B) zurückgeworfen. Sind also ψ, ψ_1 die Winkel, welche nach dem Obigen in der genannten gemeinschaftlichen Zurückwerfungsebene die Lage der Linien Rs und Rs_1 gegen die erste Axe eines vorausgesetzten rechtwinkligen Coordinaten-Systems bezeichnen, dessen Anfangspunkt R ist, ferner auf eine ähnliche Art $\varphi, (\varphi)$ die Lagenwinkel der Linien $RA, R(A)$ und endlich $\varphi_1, (\varphi)_1$ die Lagenwinkel der Linien $RA, R(B)$; so hat man zunächst die Beziehungen

$$\varphi + (\varphi) = 2\psi + 180^\circ; \quad \varphi_1 + (\varphi)_1 = 2\psi_1 + 180^\circ$$

und hieraus findet man sogleich

$$(\varphi)_1 - (\varphi) = 2(\psi_1 - \psi).$$

Hierinn bezeichnet aber $(\psi_1 - \psi)$ den Winkel, welchen die zweite spiegelnde Ebene mit der ersten bildet und $((\varphi)_1 - (\varphi))$ ist der Winkel, welchen der, von der zweiten spiegelnden Ebene zurückgeworfene Strahl $R(B)$ mit dem Strahle ein-

*) Ohnehin ist jetzt der Gebrauch der Reflectionswerkzeuge von keiner Wichtigkeit mehr, wenn man die wenigen Messungen ausnimmt, welche wirklich zur See gemacht werden.

schließt, der von der ersten spiegelnden Ebene zurückgeworfen wurde. *).

Hierbei wurde indessen angenommen, daß der einfal- lende Lichtstrahl in dem Punkte R von beiden spiegelnden Ebenen gleichzeitig zurückgeworfen wird. Diese Voraus- setzung findet also nicht Statt, wenn nur eine von den beiden spiegelnden Ebenen dem leuchtenden Punkte zuge- wendet ist, die andere aber nicht; in diesem Falle könnte man mit der letztern eine dritte spiegelnde Ebene in Berüh- rung bringen, welche nicht allein dem leuchtenden Punkte zugewendet ist, sondern auch eine Zurückstrahlung von der Stelle R gestattet.

Wenn aber die Verbindung der beiden spiegelnden Ebenen um die Kante, in welcher sie sich durchschneiden, wie um eine Axe gedreht werden kann, so wird man hier- durch die zweite spiegelnde Ebene auch in eine solche Lage bringen können, daß diese den leuchtenden Lichtstrahl in der Linie $R(A)$ zurückwerfen muß. Diese Lage der zweiten spiegelnden Ebene wird in den Gleichungen $\varphi + (\varphi) = 2\psi + 180^\circ$; $\varphi + (\varphi)_1 = 2\psi_1 + 180^\circ$ dadurch angezeigt, daß man $\psi_1 = \psi + 180$ setzt und in diese Lage kommt die zweite spiegelnde Ebene nur durch die Beschreibung des Winkels

$$[180^\circ - (\psi_1 - \psi)],$$

weil ψ_1 die ursprüngliche Lage der zweiten spiegelnden Ebene bezeichnet und

$$\psi_1 + [180^\circ - (\psi_1 - \psi)] = \psi + 180^\circ$$

ist.

3.

Weg der Lichtstrahlen durch prismatische Glaskörper.

Die ebene Oberfläche, welche man wie die Grenze von zwei verschiedenen brechenden Mitteln betrachten kann, heißt brechende Ebene. Der Durchschnittspunkt R der brechenden Ebene mit der geraden Linie RA , welche die Lage des Lichtstrahls anzeigt, die er in dem ersten brechen- den Mittel hat, wird in dem folgenden der Incidenzpunkt genannt. In dem zweiten Mittel wird der Lichtstrahl durch die Brechung von seinem Wege RA nach B oder (B) ab- gelenkt, je nachdem das zweite Mittel mehr oder weniger dicht ist, als das erstere. Der gebrochene Lichtstrahl liegt in der Ebene, welche man sich durch die Normallinie RP des Incidenzpunktes R und durch die Linie RA gelegt den- ken kann und deshalb heißt diese normale Ebene die Brechungsebene.

*) Wenn also $(\psi_1 - \psi) = 90^\circ$, so ist $((\varphi)_1 - (\varphi)) = 180^\circ$; in diesem Falle wird die Linie $R(B)$ die Verlängerung von $(A)R$ und umgekehrt; diesen Satz benutzte der Herr Hof- rath und Ritter Gauss bei der Einrichtung der Helio- trope mit 2 Spiegeln.

Wenn in dieser Ebene ein System rechtwinkelig ver- bundener Coordinaten-Axen vorausgesetzt wird, so kann die Lage der Punkte R , P und A , B respective durch die recht- winkligen Coordinaten xy , $\alpha\epsilon$ und ab , $(a)(b)$ angegeben werden. Setzt man also

$$\tan \psi = \frac{\epsilon - y}{\alpha - x}; \quad \tan \varphi = \frac{b - y}{a - x}; \quad \tan(\varphi) = \frac{(b) - y}{(a) - x}$$

so sind ψ , φ , (φ) der Reihe nach die Winkel, welche die Lage der Linien RP , RA , RB gegen die erste Axe des angenommenen Coordinaten - Systems aussprechen, und $(\varphi - \psi)$, $((\varphi) - \psi)$ sind die Winkel, welche beziehungsweise die Linien RA , RB mit der Normallinie RP bilden; die Linien RA und RB bezeichnen aber respective die Lage des einfallenden und gebrochenen Strahls. Ist das zweite Mittel dichter als das erstere und hat der Incidenzwinkel $(\varphi - \psi)$ die Form $(180^\circ - \omega)$ worinn ω einen Winkel- werth bedeutet, der kleiner als 90° ist, so wird der zugehö- rige Refractionswinkel $((\varphi) - \psi)$ größer; ist hingegen das zweite Mittel weniger dicht, als das erstere und hat der Incidenzwinkel die Form $(180^\circ - \omega)$ so wird der zuge- hörige Refractionswinkel kleiner als der Incidenzwinkel. Das Gesetz für die Brechung der Lichtstrahlen in nicht kristallisirten durchsichtigen Mitteln von verschiedener Dich- tigkeit kann nun in der Form

$$(m) \sin(\varphi - \psi) = m \sin((\varphi) - \psi)$$

dargestellt werden, und hierinn sind die Zahlen m , (m) für jede zusammengehörigen Werthe der Winkel $(\varphi - \psi)$, $((\varphi) - \psi)$ dieselben, so lange der Lichtstrahl durch die beiden Mittel geht, für welche diese Zahlen bestimmt wurden.

Trifft der gebrochene Lichtstrahl RB auf seinem Wege eine zweite brechende Ebene in dem Punkte R_1 , so kann man auf eine ähnliche Art durch die Linie $R_1 A_1$ die Lage des Lichtstrahls vorstellen, die er in dem zweiten brechenden Mittel hat; wird dieser Lichtstrahl in dem Incidenzpunkte R_1 in dem dritten Mittel nach B_1 abgelenkt, so liegt der ge- brochene Strahl $R_1 B_1$ in der Ebene, welche durch die Nor- mallinie $R_1 P_1$ des Incidenzpunktes R_1 und durch die Linie $R_1 A_1$ geht. Setzt man in dieser zweiten Brechungsebene ein zweites System rechtwinkliger Coordinaten voraus und bezeichnen $x_1 y_1$, $\alpha_1 \epsilon_1$, $a_1 b_1$, $(a)_1 (b)_1$ der Reihe nach die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte R_1 , P_1 , A_1 , B_1 ; so bedeuten, nach Anleitung des Obigen, in den Gleichungen

$$\tan \psi_1 = \frac{\epsilon_1 - y_1}{\alpha_1 - x_1}; \quad \tan \varphi_1 = \frac{b_1 - y_1}{a_1 - x_1}; \quad \tan(\varphi)_1 = \frac{(b)_1 - y_1}{(a)_1 - x_1}$$

der Reihe nach ψ_1 , φ_1 , $(\varphi)_1$ die Winkel, welche die Lage der Linien $R_1 P_1$, $R_1 A_1$, $R_1 B_1$ gegen die erste Axe von dem vorausgesetzten zweiten Coordinaten - System aussprechen und $(\varphi_1 - \psi_1)$, $((\varphi)_1 - \psi_1)$ sind die Winkel, welche die

Linien R_1A_1 , R_1B_1 mit der Normallinie RP bilden. Das Gesetz für die Brechung in dem zweiten Mittel kann also in der Form

$$(m)_1 \sin(\varphi_1 - \psi_1) = m_1 \sin((\varphi)_1 - \psi_1)$$

geschrieben werden und hierinn darf man $m_1 = (m)$ annehmen.

Fällt die zweite Brechungsebene mit der ersten zusammen, so kann man die Lage der genannten Punkte auf den Anfangspunkt von einem und demselben Coordinaten-System beziehen, geht in diesem Falle der gebrochene Strahl RB durch den Incidenzpunkt R_1 der zweiten brechenden Fläche, so wird er sich in derselben Ebene fortpflanzen und nur in dem zweiten Incidenzpunkte eine Brechung erleiden, durch welche er in der genannten Ebene die Lage R_1B_1 annimmt; weil aber der gebrochene Strahl RB alsdann für die zweite brechende Ebene wie der einfallende Strahl betrachtet werden muß, so wird $\varphi_1 = (\varphi)$ sein und wenn das dritte brechende Mittel dem ersten gleich ist, so darf man auch $(m)_1 = m$ voraussetzen; man hat also für diesen Fall

$$(m) \sin(\varphi - \psi) = m \sin((\varphi) - \psi) \\ m \sin((\varphi) - \psi_1) = (m) \sin((\varphi)_1 - \psi_1).$$

Wenn die brechenden Ebenen z. B. Seitenflächen eines prismatischen Glaskörpers sind, so nennt man den Winkel, welchen die beiden auf einander folgenden brechenden Ebenen mit einander bilden, den brechenden Winkel. Die Brechungsebene durchschneidet sich mit den Seitenflächen des prismatischen Glaskörpers in zwei geraden Linien, welche den brechenden Winkel darstellen; der Scheitelpunkt dieses Winkels ist der Durchschnittspunkt der Kante des brechenden Winkels mit der Brechungsebene und man sieht, daß der Winkel, welchen die Normallinien der beiden Incidenzpunkte mit einander einschließen, dem brechenden Winkel gleich ist. Sind XY die rechtwinkeligen Coordinaten von dem Scheitelpunkte des brechenden Winkels, so kann man

$$\tan \nu = \frac{y-Y}{x-X}; \quad \tan \nu_1 = \frac{y_1-Y}{x_1-X}$$

setzen; alsdann ist der brechende Winkel $\nu_1 - \nu = \psi_1 - \psi$, weil aber $\psi - \nu = 90^\circ = \psi_1 - \nu$ ist, so hat man

$$(m) \cos(\varphi - \nu) = m \cos((\varphi) - \nu) \\ m \cos((\varphi) - \nu_1) = (m) \cos((\varphi)_1 - \nu_1).$$

4.

Brechungsvermögen der brechenden Mittel.

Wird in den Gleichungen

$$(m) \sin(\varphi - \psi) = m \sin((\varphi) - \psi) \\ m \sin((\varphi) - \psi_1) = (m) \sin((\varphi)_1 - \psi_1)$$

das Brechungsverhältniß $\frac{m}{(m)}$ durch n bezeichnet, so erhält man

$$\sin(\varphi - \psi) = n \sin((\varphi) - \psi)$$

$$n \sin((\varphi) - \psi_1) = \sin((\varphi)_1 - \psi_1)$$

bedeutet aber $\omega = \psi_1 - \psi$ den brechenden Winkel eines prismatischen Glaskörpers, so ist

$$\sin(\varphi - \psi) = n \sin((\varphi) - \psi)$$

$$n \sin((\varphi) - \psi - \omega) = \sin((\varphi)_1 - \psi - \omega)$$

Man kann also, wenn der Incidenzwinkel $(\varphi - \psi)$ und das Brechungsverhältniß gegeben wird, mit Hülfe dieser Gleichungen den Winkel $((\varphi)_1 - \psi)$ berechnen; ist aber ausserdem φ gegeben, so findet man zuerst ψ und erhält dann durch jene Gleichungen den Werth von $(\varphi)_1$, indessen wurde hier vorausgesetzt, daß sich die wahre Größe der Winkel $((\varphi) - \psi)$, $((\varphi) - \psi_1)$ und $((\varphi)_1 - \psi_1)$ mit Hülfe ihrer Sinuszahlen erkennen läßt. Der Unterschied $(\varphi)_1 - \varphi = \Delta\varphi$ zeigt alsdann, wie groß der Winkel ist, um welchen der einfallende Strahl durch die Brechung in der Brechungsebene von seiner ursprünglichen Lage abgelenkt wird; man erkennt aber leicht aus den obigen Gleichungen, daß der Werth dieses Winkels, bei einerlei Werthe des brechenden Winkels ω , noch von dem Brechungsverhältnisse n und von dem besonderen Werthe des Incidenzwinkels abhängig ist.

Die vorhergehende Berechnung kann auch mit Hülfe der Gleichungen

$$\cos(\varphi - \nu) = n \cos((\varphi) - \nu)$$

$$n \cos((\varphi) - \nu_1) = \cos((\varphi)_1 - \nu_1)$$

bewerkstelligt werden. Hierin bezeichnet $(\varphi - \nu)$ den Winkel, welchen der erste einfallende Strahl mit der ersten brechenden Fläche bildet; verändert dieser Winkel seinen Werth um die Größe $d(\varphi - \nu)$, so kann man die davon abhängigen Veränderungen der übrigen Winkel $((\varphi) - \nu)$, $((\varphi) - \nu_1)$ und $((\varphi)_1 - \nu_1)$ der Reihe nach durch $d((\varphi) - \nu)$, $d((\varphi) - \nu_1)$ und $d((\varphi)_1 - \nu_1)$ bezeichnen und wenn man

$$\nu_1 = \nu + \omega; \quad (\varphi)_1 = \varphi + \Delta\varphi$$

setzt; so ist, weil der brechende Winkel ω hierbei seine Größe unverändert behält,

$$d((\varphi) - \nu_1) = d((\varphi) - \nu); \quad d((\varphi)_1 - \nu_1) = d(\varphi - \nu) + d(\Delta\varphi).$$

Hiernach findet man aus den Gleichungen

$$\cos[\varphi - \nu + d(\varphi - \nu)] = n \cos[(\varphi) - \nu + d((\varphi) - \nu)] \\ n \cos[(\varphi) - \nu_1 + d((\varphi) - \nu_1)] = \cos[(\varphi)_1 - \nu_1 + d((\varphi)_1 - \nu_1)],$$

wenn die Veränderungen $d(\varphi - \nu)$ sehr klein vorausgesetzt werden, die Beziehungen

$$\sin(\varphi - \nu) d(\varphi - \nu) = n \sin((\varphi) - \nu) d((\varphi) - \nu) \\ n \sin((\varphi) - \nu_1) d((\varphi) - \nu) = \sin((\varphi)_1 - \nu_1) d(\varphi - \nu) \\ + \sin((\varphi)_1 - \nu_1) d(\Delta\varphi).$$

Substituirt man den Werth von $d((\varphi) - \nu)$, welchen man aus der ersten Gleichung entlehnen kann, in die zweite; so wird

$$d(\Delta\varphi) = \left(\frac{\sin(\varphi - \nu) \cdot \sin((\varphi) - \nu_i)}{\sin((\varphi) - \nu) \cdot \sin((\varphi)_i - \nu_i)} - 1 \right) d(\varphi - \nu).$$

Hieraus sieht man, daß $d(\Delta\varphi)$ nur dann gleich Null wird, wenn

$$\frac{\sin(\varphi - \nu)}{\sin((\varphi) - \nu)} = \frac{\sin((\varphi)_i - \nu_i)}{\sin((\varphi)_i - \nu_i)}$$

ist; weil aber die Werthe der Sinuszahlen von den Winkeln $((\varphi) - \nu)$, $((\varphi) - \nu_i)$ und $((\varphi)_i - \nu_i)$, bei einerlei brechendem Winkel ω und einerlei Werthe des Brechungsverhältnisses n nur von dem Werthe der Sinuszahl des Winkels $(\varphi - \nu)$ abhängig sind; so erkennt man leicht, daß es nur einen einzigen Werth der Sinuszahl des Incidenzwinkels geben kann, für welchen der Ablenkungswinkel unveränderlich, d. i. $d(\Delta\varphi) = 0$ wird. Wollte man z. B. $(\varphi - \nu) = 90^\circ$ setzen, so würde zwar $(\varphi) - \nu = 90^\circ$ und daher $\frac{\sin(\varphi - \nu)}{\sin((\varphi) - \nu)} = 1$ sein; weil aber alsdann $\sin((\varphi) - \nu_i)$ von $\sin((\varphi)_i - \nu_i)$ durchaus verschieden ist; so lange ω nicht gleich Null wird, so kann auch in diesem Falle $d(\Delta\varphi)$ nicht gleich Null werden. Wird hingegen sowohl $\sin((\varphi) - \nu) = \sin((\varphi) - \nu_i)$, als auch $\sin(\varphi - \nu) = \sin((\varphi)_i - \nu_i)$ gesetzt, so muß auch $d(\Delta\varphi) = 0$ sein; alsdann bildet aber der erste gebrochene Strahl mit der ersten und zweiten brechenden Fläche gleiche Winkel und hieraus folgt sogleich

$\omega = 2((\varphi) - \psi) = 2(\psi_i - (\varphi))$; $\Delta\varphi = 2((\varphi) - \varphi) = 2((\varphi)_i - \varphi_i)$ man hat also

$$\sin \frac{1}{2}(\omega - \Delta\varphi) = \sin(\varphi - \psi),$$

oder man findet, weil $\sin(\varphi - \psi) = n \sin((\varphi) - \psi)$ ist, den constanten Ablenkungswinkel $\Delta\varphi$ durch die Gleichung

$$\sin \frac{1}{2}(\omega - \Delta\varphi) = n \sin \frac{1}{2}\omega.$$

Bezeichnet $\Delta\varphi$ diesen constanten Ablenkungswinkel für ein brechendes Prisma, dessen Brechungsverhältniß n ist und bedeutet N das Brechungsverhältniß für ein zweites Prisma mit demselben brechenden Winkel; so kann der constante Ablenkungswinkel dieses zweiten Prismas dem Winkel $\Delta\varphi$ nicht gleich sein, sobald N und n nicht gleich sind. Ist hierbei der Ablenkungswinkel des zweiten Prismas größer, als der des ersten; so hat das zweite Prisma ein größeres Brechungsvermögen, als das erstere und in diesem Falle wird auch N größer als n sein.

5.

Farbenzerstreuungsvermögen der brechenden Mittel.

Bisher wurde vorausgesetzt, daß die einfallenden Lichtstrahlen in der Brechungsebene durch die Brechung von ihrem ursprünglichen Wege nach einerlei Gesetze abgelenkt würden. Wenn aber der Lichtstrahl, welcher die brechende Oberfläche eines Glaskörpers trifft, von glänzend weißen Gegenständen ausstrahlt, so wird er durch die Brechung nicht

allein von seinem ursprünglichen Wege abgelenkt, sondern auch in eine Menge einzelner Strahlen zerstreut, von denen einige vorzugsweise die Empfindung der bekannten Farben des Regenbogens hervorbringen. Diese Erscheinung, welche stets die Brechung des weißen Lichtes begleitet, obgleich sie sich dem bloßen Auge nicht immer bemerklich macht, wird die Farbenzerstreuung genannt.

Bezeichnet R den Incidenzpunkt des weißen Lichtstrahls R_0 , so bringt von den farbigen Lichtstrahlen $R_1, R_2 \dots R_6, R_7$ der erstere die Empfindung der rothen Farbe, der letztere aber die der violetten hervor; der rothe Theil des zusammengesetzten Lichtstrahls wird weniger als der violette von seinem anfänglichen Wege abgelenkt, oder die Brechbarkeit des rothen Lichtes ist geringer als die des violetten. Ist also n das Brechungsverhältniß für die rothen Strahlen, so kann man das für die violetten durch $(n + dn)$ bezeichnen und wenn bei einem zweiten brechenden Mittel das Brechungsverhältniß für die rothen Strahlen N ist, so kann das Brechungsverhältniß für die zugehörigen violetten Strahlen $(N + dN)$ gesetzt werden. Der Unterschied in der Brechbarkeit der rothen und violetten Strahlen ist für das erste Mittel dn und für das zweite dN ; wenn dN größer ist als dn , so hat das zweite Mittel ein größeres Farbenzerstreuungsvermögen.

Die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin(\varphi - \psi) &= n \sin((\varphi) - \psi) \\ n \sin((\varphi) - \psi_i) &= \sin((\varphi)_i - \psi_i) \end{aligned}$$

zeigen, daß die farbigen Lichtstrahlen nach der letzten Brechung nur dann parallel werden können, wenn $\psi_i = \psi$ gesetzt wird; alsdann wird aber auch der brechende Winkel des prismatischen Glaskörpers gleich Null sein. Ist dieses hingegen nicht der Fall; so kann nach der letzten Brechung jeder von den nicht parallelen farbigen Strahlen für sich die Empfindung einer besonderen Farbe hervorbringen. Wenn durch die obigen Gleichungen der Weg für die rothen Strahlen angedeutet wird, so kann man den Weg der zugehörigen violetten Strahlen in den Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin(\varphi - \psi) &= (n + dn) \sin((\varphi) + d(\varphi) - \psi) \\ (n + dn) \sin((\varphi) + d(\varphi) - \psi_i) &= \sin((\varphi)_i + d(\varphi)_i - \psi_i) \end{aligned}$$

vorstellen.

6.

Berechnung des Brechungs-Verhältnisses.

Ist der brechende Winkel ω eines prismatischen Glaskörpers gegeben, so kann man, weil nahe $2 \sin(\varphi - \psi) = 3 \sin((\varphi) - \psi)$ ist, wenn der Lichtstrahl aus Luft in Glas übergeht, für n den Näherungswerth $\frac{3}{2}$ setzen und also auch durch die Gleichung

$$2 \sin \frac{1}{2}(\omega - \Delta\varphi) = 3 \sin \frac{1}{2}\omega$$

einen Näherungswerth für $\frac{1}{2}(\omega - \Delta\varphi)$ berechnen, durch welchen man ferner, weil $\omega - \Delta\varphi = 2(\varphi - \psi)$ ist, einen Näherungswerth für den Incidenzwinkel $(\varphi - \psi)$ erhält. Giebt man nun der einen Seitenfläche des brechenden Winkels gegen den einfallenden Lichtstrahl die hierin vorgeschriebene Lage, so wird man sich auch die Lage des letzten gebrochenen Strahls auf irgend eine Art bemerken können. Man verändert alsdann z. B. durch eine Drehung des Prismas um die Kante des brechenden Winkels, den Incidenzwinkel so lange nach und nach um eine geringe Größe, bis eine sehr geringe Vergrößerung oder eine sehr geringe Verkleinerung des Incidenzwinkels keine bemerkbare Veränderung in der Lage des letzten gebrochenen Strahls mehr hervorbringt, d. h. bis der Ablenkungswinkel constant wird. Hat man dieses Ziel erreicht, so wird der Winkel $\Delta\varphi$ durch unmittelbare Messung bestimmt und mit Hülfe dieses constanten Ablenkungswinkels erhält man das Brechungsverhältniß n durch die Gleichung

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega - \Delta\varphi)}{\sin \frac{1}{2}\omega}$$

Ist hingegen der Ablenkungswinkel nicht constant, so findet man aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin(\varphi - \psi) &= n \sin((\varphi) - \psi) \\ n \sin((\varphi) - \psi) &= \sin((\varphi)_1 - \psi_1) \end{aligned}$$

zunächst die Beziehung

$$\frac{\sin((\varphi) - \psi)}{\sin((\varphi) - \psi_1)} = \frac{\sin((\varphi) - \psi)}{\sin((\varphi)_1 - \psi_1)}$$

und hieraus erhält man leicht

$$\frac{\sin((\varphi) - \psi) + \sin((\varphi) - \psi_1)}{\sin((\varphi) - \psi) - \sin((\varphi) - \psi_1)} = \frac{\sin(\varphi - \psi) + \sin((\varphi)_1 - \psi_1)}{\sin(\varphi - \psi) - \sin((\varphi)_1 - \psi_1)}$$

welches mit

$$\frac{\tan((\varphi) - \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi))}{\tan \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\varphi - \psi + (\varphi)_1 - \psi_1)}{\tan \frac{1}{2}(\varphi - \psi - ((\varphi)_1 - \psi_1))}$$

gleichbedeutend ist. Macht man noch

$$\psi_1 = \psi + \omega; \quad (\varphi)_1 = \varphi + \Delta\varphi$$

so wird durch die Gleichung

$$\tan((\varphi) - \psi - \frac{\omega}{2}) = \frac{\tan((\varphi - \psi) - \frac{1}{2}(\omega - \Delta\varphi)) \tan \frac{\omega}{2}}{\tan \frac{1}{2}(\omega - \Delta\varphi)}$$

der Winkel $((\varphi) - \psi)$ bekannt und weil $(\varphi) - \psi_1 = (\varphi) - \psi - \omega$, ferner $(\varphi)_1 - \psi_1 = \varphi - \psi - (\omega - \Delta\varphi)$ ist; so findet man aus den obigen Gleichungen

$$n = \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin((\varphi) - \psi)}; \quad n = \frac{\sin(\varphi - \psi - (\omega - \Delta\varphi))}{\sin((\varphi) - \psi - \omega)}$$

Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin(\varphi - \psi) &= (n + dn) \sin((\varphi) + d(\varphi) - \psi) \\ (n + dn) \sin((\varphi) + d(\varphi) - \psi) &= \sin((\varphi)_1 + d(\varphi)_1 - \psi_1) \end{aligned}$$

erhält man auf eine ähnliche Art

$$\begin{aligned} \tan((\varphi) + d(\varphi) - \psi - \frac{\omega}{2}) \\ = \frac{\tan((\varphi - \psi) - \frac{1}{2}(\omega - \Delta\varphi) + \frac{1}{2}d(\varphi)_1) \tan \frac{\omega}{2}}{\tan \frac{1}{2}(\omega - \Delta\varphi - d(\varphi)_1)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} n + dn &= \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin((\varphi) + d(\varphi) - \psi)}; \\ (n + dn) &= \frac{\sin((\varphi - \psi) - (\omega - \Delta\varphi) - d(\varphi)_1)}{\sin((\varphi) + d(\varphi) - \psi + \omega)} \end{aligned}$$

Wenn aber die Ablenkung für die Strahlen constant ist, welche zu dem Brechungsverhältniß n gehören, so hat man $(\varphi) - \psi = \frac{\omega}{2}$ und $\varphi - \psi = \frac{1}{2}(\omega - \Delta\varphi)$; in diesem Falle wird

$$\tan d(\varphi) = \frac{\tan \frac{1}{2}d(\varphi)_1 \tan \frac{\omega}{2}}{\tan \frac{1}{2}(\omega - \Delta\varphi - d(\varphi)_1)}$$

und endlich

$$\begin{aligned} n + dn &= \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega - \Delta\varphi)}{\sin(\frac{\omega}{2} + d(\varphi))}; \\ n + dn &= \frac{\sin(\frac{1}{2}(\omega - \Delta\varphi) - d(\varphi)_1)}{\sin(\frac{\omega}{2} - d(\varphi))} \end{aligned}$$

Anmerkung. Aus den Bedingungen

$$\begin{aligned} \omega &= 2((\varphi) - \psi) = 2(\psi_1 - (\varphi)) \\ \Delta\varphi &= 2((\varphi) - \varphi) = 2((\varphi)_1 - \varphi_1) \end{aligned}$$

für die constante Ablenkung erhält man

$$\omega - \Delta\varphi = 2(\varphi - \psi); \quad \omega + \Delta\varphi = 2(\psi_1 - \varphi)$$

Diese Gleichungen zeigen, daß man dem Prisma zwei verschiedene Stellungen gegen den einfallenden Strahl geben kann, für welche die Ablenkung constant werden muß; bei der ersten Stellung des Prismas fallen die erleuchtenden Strahlen auf die erste von den Seitenflächen des brechenden Winkels und bei der zweiten Stellung treffen sie die zweite Seitenfläche. In dem ersten Falle erhält man nach dem Obigen als constanten Ablenkungswinkel den Werth $-\Delta\varphi$ und im zweiten Falle wird man alsdann $+\Delta\varphi$ für den Werth des constanten Ablenkungswinkels finden; hieraus folgt, daß die beiden Strahlen, welche respective für die beiden Aufstellungen die letzten gebrochenen Strahlen sind, um das Doppelte des constanten Ablenkungswinkels von einander abweichen.

Hartmann.