Ueber gewisse von Helmholtz für die Magnetoinduction und Voltainduction gegebene Formeln*).

VON CARL NEUMANN IN LEIPZIG.

In meinen Untersuchungen von 1871 habe ich diejenige allgemeine Form des Gesetzes der Erhaltung der Energie zu entwickeln versucht, welche demselben für die elektrodynamischen Kräfte unter Zugrundelegung des Weber'schen Gesetzes zuzuertheilen ist. Dass die hiebei resultirenden Formeln (26) gegenüber den betreffenden von Herrn Helmholtz in seiner bekannten Schrift über die Erhaltung der Kraft (1847) aufgestellten Formeln gewisse Differenzen zeigten, glaubte ich nicht verschweigen zu dürfen, vielmehr diese Differenzen mit möglichster Genauigkeit angeben zu müssen.

*) Ich werde im vorliegenden Aufsatz die in Betracht kommenden Publicationen von Helmholtz, nämlich:

1847. *Ueber die Erhaltung der Kraft*, Berlin 1847;

1851. *Ueber die Dauer und den Verlauf der durch Stromesschwankungen inducirten elektrischen Ströme*. Pogg. Ann. 83, S. 505;

1854. *Erwiderung auf die Bemerkungen von Herrn Clausius*. Pogg. Ann. 91, S. 241;

1870. *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektrizität für ruhende leitende Körper*. Borch. J. 72, S. 57;

1872. *Ueber die Theorie der Elektrodynamik*. Kritisches. Borch. J. 75, S. 35

kurzweg nach den Jahreszahlen benennen. In gleicher Weise werde ich verfahren bei meinen eigenen Abhandlungen:

1871. *Elektrodynamische Untersuchungen mit besonderer Rücksicht auf das Princip der Energie*, und: *Ueber die von Helmholtz in die Theorie der elektrischen Vorgänge eingeführten Prämissen*. Berichte der Kgl. Sächs. Ges. d. Wss., October 1871, S. 386—478;

1872. *Ueber das Elementargesetz derjenigen elektromotorischen Kräfte u. s. w.* Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., August 1872, S. 144—164.

Ferner sei bemerkt, dass ich in diesem Aufsatz die Bezeichnungen des vorhergehenden Aufsatzes beibehalten und auch bei den Formeln die fortlaufenden Nummern anwenden werde.

Mit Bezug hierauf hat Herr Helmholtz in einem seiner letzten Aufsätze (1872, S. 61) folgende Bemerkungen gemacht.

„. . . . „in Betreff der Kritik, in welcher sich Herr C. Neumann dabei gegen meine vor 25 Jahren erschienene Schrift von der „Erhaltung der Kraft“ ergeht, will ich mir zu bemerken erlauben, dass „ich selbst schon längst in allen wesentlichen Punkten diese Kritik „ausgeübt hatte*). Die Darstellung in der „Erhaltung der Kraft“ „leidet, wie ich ausdrücklich auf S. 69 schon in dem Büchlein selbst „hervorgehoben habe, an dem Mangel, dass man damals den Verlauf „der durch plötzliche Stromesschwankung inducirten Ströme noch nicht „kannte, und also die davon herrührende Wärmeentwicklung nicht berechnen konnte. Dann bin ich selbst es zuerst gewesen, welcher im „Jahre 1851 (Pogg. Ann. Bd. 83, S. 505—540) diese Lücke durch „neue Versuchsreihen ausgefüllt hat, indem ich zeigte, dass der Verlauf auch dieser Ströme durch F. Neumann's, des Vaters, und „Ohm's Gesetz bestimmt wird. Welche Aenderungen dem entsprechend in der Anwendung des Gesetzes von der Constanz der Energie „auf die inducirten Ströme zu machen sind, habe ich 1854 in einer „Antwort gegen Herrn Clausius (Pogg. Ann. Bd. 91, S. 258—260) „kurz, aber in den wesentlichen Punkten vollständig angegeben. Dort „wird vorangestellt der Satz, dass ein galvanischer Strom von der Intensität J durch sein Bestehen ein Arbeitsäquivalent von der Form $\frac{1}{2} p J^2$ repräsentire, und habe weiter hinzugefügt:

„„Für einen einzelnen Stromkreis ist mir noch nicht gelungen „zu beweisen““ (nämlich vom Gesetze der Energie ausgehend), „dass die mit p bezeichnete Constante gleich dem doppelten Potential““ (des Stromes auf sich selbst) „sein müsse, so wahrscheinlich dies auch nach der Analogie der übrigen Fälle sein mag.““ „In der That kommt hierbei die Frage nach der Trägheit der Elektrizität in Betracht, die durch bloß theoretische Schlüsse ohne That-sachen nicht zu entscheiden ist.“

„Die Anwendung des Gesetzes von der Erhaltung der Energie auf „die elektrischen Ströme modificirte sich in der That nur dadurch, „dass zu den übrigen schon sonst bekannt gewesenen Arbeitsäquivalenten auch noch jenes $\frac{1}{2} p J^2$ für die bestehenden elektrischen Ströme „hinzugenommen werden musste.“

*) Im ersten Augenblick brachten mich diese Worte von Helmholtz zu der Vermuthung, dass meine Erörterungen von 1871 vielleicht wirklich überflüssig gewesen wären und auf Irrthum oder vielmehr auf mangelhafter Kenntniss der einschlagenden Literatur beruhten. In der That habe ich in diesem Sinne zu einer Zeit mich ausgesprochen, als jene Helmholtz'sche Abhandlung von 1854 mir nicht zugänglich war. (Diese Annalen Bd. 5, S. 622, Note.)

„Wenn aber Herr C. Neumann, der doch die Streitschriften von „Clausius gegen mich citirt, meine Antwort darauf nicht gekannt „haben sollte, so hätte er billiger Weise nicht übersehen sollen, dass „diese selbe Bedeutung des Potentials elektrischer Ströme, deren fehlende Kenntniss den wesentlichen Mangel des betreffenden Capitels „meiner Schrift von der Erhaltung der Kraft bildet, von mir in meiner „letzten Arbeit im 72. Bande dieses (des Borchardt'schen) Journals „geradezu zum Fundament der ganzen Betrachtung gemacht ist, aus „welcher die auch von ihm in seiner letzten Arbeit benutzten Hypothesen hergeleitet sind.“

Ich könnte zunächst darauf hinweisen, dass von den *beiden* Clausius'schen Abhandlungen, welche Herr Helmholtz als *Streitschriften* bezeichnet*), nur die *erste* auf den hier erörterten Gegenstand Bezug hat, dass ich aber auf diese bei Gelegenheit meiner damaligen Publication (1871) nicht aufmerksam geworden war, und dass in der That die von mir citirte Abhandlung die *zweite* jener Abhandlungen ist, die hier gar nicht in Betracht kommen kann; ich könnte ferner bemerken, dass ich zur Zeit meiner damaligen Publication über die Helmholtz'sche letzte Arbeit (im 72. Bande des Borchardt'schen Journals) immer nur mit der grössten Reserve mich auszudrücken pflegte, indem ich bei gelegentlichen Gesprächen darüber fast regelmässig hinzufügte: *falls ich den Aufsatz wirklich verstanden, oder: soweit ich denselben verstanden habe**)*, und dass ich damals also wirklich nicht in der Lage war, die Helmholtz'sche Schrift über die Erhaltung der Kraft nach Massgabe jenes letzten Aufsatzes mit irgendwelcher Sicherheit interpretiren oder emendiren zu können. —

*) Es sind das wohl ohne Zweifel die Abhandlungen:

Bemerkungen zu einigen Stellen der Schrift von Helmholtz über die Erhaltung der Kraft. Pogg. Annal. Bd. 89, S. 568, und
Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf die thermo-elektrischen Erscheinungen. Pogg. Annal. Bd. 90, S. 513.

**) Aehnliche Vorsicht habe ich in meinen betreffenden Publicationen beobachtet. So sage ich z. B. (1871, S. 457), nachdem ich die Helmholtz'sche Theorie zu reproduciren versucht habe, absichtlich:

„Hiemit *dürften*, wie ich *glaube*, die Helmholtz'schen Prämissen und ebenso „auch diejenigen Ueberlegungen, welche zu denselben hingeleitet haben, in *correc-*ter Weise dargelegt sein.“

Ebenso spreche ich (1872, S. 155) von den *Andeutungen*, welche Helmholtz über seine *neue* Theorie gemacht habe, und füge dann hinzu:

„So gut als es mit *Hülfe* dieser *Andeutungen* möglich war, habe ich in jene „*neue* Theorie mich hinein zu versetzen gesucht.“

Ausdrücklich wird sodann (l. c., S. 157) noch hinzugesetzt:

„Immerhin ist es möglich, dass jene *Andeutungen* von mir in fehlerhafter „Weise aufgefasst worden sind.“

Ohne mich indessen mit derartigen (mehr oder weniger persönlichen) Bemerkungen weiter aufzuhalten, will ich sofort zur Hauptsache gehen.

Helmholtz behauptet — das ist offenbar der eigentliche Kern seiner Worte —, die von mir ausgeübte „Kritik“ sei überflüssig, denn dieselbe sei in allen wesentlichen Punkten schon vor langer Zeit von ihm selber ausgeübt.

Ich werde nachweisen, dass diese Behauptung von Helmholtz auf einem Irrthum beruht, nämlich nachweisen, dass die von ihm angedeuteten Correctionen von den von mir proponirten sehr wesentlich verschieden sind.

§ 1.

Ueber einige Stellen der Helmholtz'schen Schrift vom Jahre 1847.

Versucht man die Betrachtungen, welche Helmholtz in seiner Schrift über die Erhaltung der Kraft (1847, S. 64–69) angestellt hat, soweit dieselben auf Magnete und elektrische Ströme Bezug haben, ihrem Hauptinhalte nach zu reproduciren, so wird man sich etwa folgendermassen auszudrücken haben.

Für einen sich selbst überlassenen Stromring ist nach dem Ohm'schen Gesetz: $J = \frac{A}{w}$, oder anders geschrieben:

$$(31) \quad AJdt = wJ^2dt;$$

in Worten ausgedrückt: Die während der Zeit dt im Strome verbrauchte Spannkraft*) $AJdt$ ist gleich gross mit der während dieser Zeit in der Strombahn erzeugten Wärmemenge wJ^2dt .

Dieser Satz bedarf einer Modification, sobald der gegebene Stromring J , wie solches z. B. bei den Systemen (J, M_1) und (J, J_1) der Fall ist, in Wechselwirkung tritt mit einem constanten Magnet M_1 oder mit einem andern Stromringe J_1 . Es verhält sich alsdann so:

Die im Systeme (J, M_1) während der Zeit dt verbrauchte Spannkraft $AJdt$ zerfällt in zwei Theile; der eine verwandelt sich in die elektrodynamisch erzeugte Wärme wJ^2dt , der andere in die elektrodynamisch erzeugte

Die im Systeme (J, J_1) während der Zeit dt verbrauchte Spannkraft $(AJ + A_1J_1)dt$ zerfällt in zwei Theile; der eine verwandelt sich in die elektrodynamisch erzeugte Wärme $(wJ^2 + w_1J_1^2)dt$, der andere in die elektrodynamisch er-

*) Da wir über die Natur der Kräfte A (der sogenannten Contactkräfte) bestimmte Vorstellungen vorläufig noch nicht besitzen, so ist es einerlei, ob das Product $AJdt$ mit diesem oder jenem Namen bezeichnet wird. Der Bequemlichkeit willen habe ich hier festgehalten an der Helmholtz'schen Benennung (von 1847), nämlich das Wort „Spannkraft“ gebraucht.

lebendige Kraft*) — $J \cdot d\Sigma(j_1 Q)$. Demnach ist**):

$$(32) \quad AJ dt = wJ^2 dt - J \cdot d\Sigma(j_1 Q); \quad \parallel \quad \begin{array}{l} \text{zeugte lebendige Kraft*)} - JJ_1 dQ. \\ \text{Demnach ist**):} \\ (AJ + A_1 J_1) dt = (wJ^2 + w_1 J_1^2) dt - JJ_1 dQ. \end{array}$$

Hiermit dürfte die ursprüngliche Helmholtz'sche Theorie vom Jahre 1847 in correcter Weise dargelegt sein.

§ 2.

Ueber die von Helmholtz theils angedeuteten, theils vielleicht beabsichtigten Correctionen.

In seiner Antwort an Clausius (1854, S. 257 ff.), deren Inhalt später (1872, S. 61) von Neuem wiederholt wurde, bemerkt Helmholtz, dass seine Formeln (32) gewisser Correctionen bedürften. Ein elektrischer Strom von der Stärke J repräsentire nämlich durch sein blosses Bestehen ein *eigenthümliches Arbeitsäquivalent* vom Werthe $[-\frac{1}{2} q J^2]$ ***) und jene Correctionen bestünden lediglich darin, dass daselbst die diesen Arbeitsäquivalenten entsprechenden Glieder noch hinzuzufügen seien.

Auch geht aus seinen Worten (1854, S. 258) deutlich hervor, dass eine *Steigerung* des Arbeitsäquivalentes $[-\frac{1}{2} q J^2]$ als eine durch den Strom geleistete Arbeit aufzufassen, also in gleiche Linie zu stellen sei z. B. mit der durch den Strom erzeugten Wärme.

Diesen Andeutungen zufolge würde die ursprüngliche Helmholtz'sche Theorie (31), (32) folgendermassen abzuändern sein:

*) Unter der *elektrodynamisch* erzeugten lebendigen Kraft ist derjenige Theil von lebendiger Kraft zu verstehen, welcher speciell durch die *elektrodynamischen* Kräfte hervorgebracht wird. Dieser Theil aber besitzt in der That [vgl. die Formeln (15, A, B)] den Werth:

$$- J \cdot d\Sigma(j_1 Q), \quad \parallel \quad - JJ_1 dQ.$$

**) Die betreffenden Formeln in der Helmholtz'schen Schrift (1847, S. 64 und 67) lauten:

$$AJ dt = wJ^2 dt + \frac{1}{a} J dV, \quad \parallel \quad (AJ + A_1 J_1) dt = (wJ^2 + w_1 J_1^2) dt + \frac{1}{a} JJ_1 dV;$$

dass dieselben mit den obigen Formeln (32) identisch sind, ergiebt sich augenblicklich, falls man nur beachtet, *erstens* dass das von Helmholtz mit

$$V \quad \parallel \quad V$$

bezeichnete Potential dasselbe ist, welches von mir mit

$$- \Sigma(j_1 Q) \quad \parallel \quad - Q$$

benannt worden ist, und *zweitens*, dass die Helmholtz'sche Constante a bei den von mir zu Grunde gelegten Maasseinheiten den Werth *Eins* besitzt.

***) Helmholtz schreibt $[\frac{1}{2} p J^2]$. Doch geht aus jener Stelle unzweifelhaft hervor, dass das Helmholtz'sche p identisch ist mit meinem $-q$.

Die in dem Systeme (J, M_1) verbrauchte Spannkraft $AJ dt$ zerfällt nicht in zwei, sondern in drei Theile, von denen die beiden ersten die schon angegebenen Verwandlungen erfahren, während der dritte zur Steigerung des eigenthümlichen Arbeitsäquivalentes $[-\frac{1}{2}qJ^2]$ verbraucht wird, so dass man also an Stelle der Formel (32) erhält:

$$(33) \quad AJ dt = wJ^2 dt - J \cdot d\Sigma(j_1 Q) + d[-\frac{1}{2}qJ^2].$$

Die im Systeme (J, J_1) verbrauchte Spannkraft $(AJ + A_1 J_1) dt$ zerfällt ebenfalls in drei Theile, von denen wiederum die beiden ersten die schon genannten Verwandlungen erfahren, während der dritte zur Steigerung des eigenthümlichen Arbeitsäquivalentes $[-\frac{1}{2}qJ^2 - \frac{1}{2}q_1 J_1^2]$ verbraucht wird, so dass man also statt der Formel (32) folgende erhält:

$$(AJ + A_1 J_1) dt = (wJ^2 + w_1 J_1^2) dt - JJ_1 dQ + d[-\frac{1}{2}qJ^2 - \frac{1}{2}q_1 J_1^2].$$

Die von Helmholtz im Jahre 1854 für seine ursprüngliche Theorie angedeutete Correction besteht also darin, dass den rechten Seiten der Formeln (32) die Glieder zuzufügen sind:

$$(34) \quad d[-\frac{1}{2}qJ^2], \quad \parallel \quad d[-\frac{1}{2}qJ^2 - \frac{1}{2}q_1 J_1^2],$$

Correctionen, welche von den von mir (1871) proponirten sehr stark verschieden sind*).

Uebrigens könnte aus dem Inhalt des Helmholtz'schen Aufsatzes von 1870, namentlich aus einer gewissen Stelle desselben (S. 70, 71), wo es heisst

jedes System elektrischer Ströme repräsentire durch sein blosses Bestehen ein Arbeitsäquivalent, welches identisch sei mit dem negativen Potential des Systemes auf sich selber, gefolgert werden, dass Helmholtz (wenigstens zu jener späteren Zeit) nicht mehr die Correctionen (34), sondern vielmehr *folgende* für nothwendig erachtet habe:

$$(35) \quad d[-\frac{1}{2}qJ^2 - \frac{1}{2}C_1 - J \cdot \Sigma(j_1 Q)], \quad \parallel \quad d[-\frac{1}{2}qJ^2 - \frac{1}{2}q_1 J_1^2 - QJJ_1].$$

Noch andere Möglichkeiten liegen vor. Denn es wäre denkbar, dass Helmholtz die Ampère'sche Vorstellung, derzufolge der magnetische Zustand eines Körpers auf elektrischen Molecularströmen beruht, nicht anerkenne, und

dass also nach seiner Ansicht jenes soeben erwähnte Arbeitsäquivalent für ein aus elektrischen Strömen $J, J_1, \dots$ und magnetischen Körpern $M, M_1, \dots$ bestehendes System nicht mehr durch das negative Potential des *ganzen* Systemes, sondern vielmehr durch das negative Potential des *partiellen* Systemes $(J, J_1, \dots)$ ausgedrückt sei.

*) Die von mir (1871) proponirten Correctionen sind nämlich nach (29. α, β) folgende:

$$d[-\frac{1}{2}qJ^2 - \frac{1}{2}C_1 - J \cdot \Sigma(j_1 Q)], \quad \parallel \quad d[-\frac{1}{2}qJ^2 - \frac{1}{2}q_1 J_1^2 - QJJ_1],$$

wo übrigens C_1 (als Constante) auch fortgelassen werden darf.

Bei solcher Ansicht würden die Correctionen (35) zu ersetzen sein durch folgende:

$$(36) \quad d[-\tfrac{1}{2}qJ^2], \quad \parallel \quad d[-\tfrac{1}{2}qJ^2 - \tfrac{1}{2}q_1J_1^2 - QJJ_1],$$

und beiläufig bemerkt, würden diese letztern Correctionen (36), die allerdings auf einer ziemlich unwahrscheinlichen Conjectur beruhen, *die einzigen*) sein, durch welche die ursprünglichen Helmholtz'schen Formeln (32) mit dem gewöhnlichen Inductionsgesetz (16, 16^{bis}) in Einklang gesetzt werden könnten.*

Dass die Correctionen (34) diejenigen sind, welche Helmholtz durch seine Andeutungen von 1854 beabsichtigte, ist wohl kaum zweifelhaft; aber entscheiden zu wollen, welche von den Correctionen (34), (35), (36) im Sinne seines spätern Aufsatzes von 1870 die richtigen sind, dürfte schwierig sein.

Wie dem auch sei — trotzdem ist die Verschiedenheit der von Helmholtz beabsichtigten Correctionen gegenüber den von mir selber (1871) proponirten nachweisbar, wie sogleich gezeigt werden soll.

Die Suppositionen, auf denen die von Helmholtz im Jahre 1847 für die Magneto- und Volta-Induction aufgestellten Formeln, sowie die später von ihm angedeuteten Correctionen dieser Formeln, basirt sind, dürften der Hauptsache nach bestehen in dem *Princip der lebendigen Kraft* und in der *Vorstellung constanter Magnete*; und auf denselben Suppositionen beruhen andererseits auch die von mir, im Jahre 1871, angegebenen Correctionen. Die trotzdem zwischen den beiderlei Correctionen stattfindende Differenz dürfte dadurch erklärbar sein, dass die Helmholtz'sche Anschauung vom Princip der lebendigen Kraft wahrscheinlich eine etwas andere ist als die meinige. — Doch es handelt sich hier nicht um die *Erklärung*, sondern um die *Constatirung* jener Differenz. Zu diesem Zweck erlaube ich mir auf folgende Umstände aufmerksam zu machen:

Helmholtz bemerkt in seiner ursprünglichen Schrift (1847, S. 65 sq.), dass die von ihm daselbst für die Magneto- und Volta-Induction aufgestellten Formeln in *Einklang* ständen mit den gewöhnlichen und für richtig geltenden Gesetzen; Analoges bemerkt er später (1854, S. 259) mit noch grösserem Nachdruck hinsichtlich der von ihm, inzwischen *corrigirten* Formeln; und dieselbe Bemerkung wiederholt sich auch in seinen Aufsätzen neuester Zeit (1870, S. 69) und (1872, S. 62). Die von Helmholtz theils angedeuteten, theils vielleicht

*) Nur *deswegen* erwähne ich dieser sonderbaren Conjectur. Denn es geht daraus hervor, wie sehr schwierig es ist, irgend ein bestimmtes *Princip* zu finden, vermöge dessen für die ursprünglichen Helmholtz'schen Formeln (32) Correctionen sich ergeben, durch welche die zwischen ihnen und zwischen den Formeln des gewöhnlichen Inductionsgesetzes vorhandene Kluft ausgefüllt wird.

auch nur beabsichtigten Correctionen sind also stets von solcher Art gewesen, dass sie seine ursprünglichen Formeln in *Einklang* liessen, respective in *Einklang* brachten mit den für richtig geltenden Gesetzen.

Von wesentlich *anderem* Charakter sind diejenigen Correctionen, zu denen ich meinerseits, im Jahre 1871, auf Grund der schon genannten Suppositionen mich hingedrängt sah. Denn dass diese von mir gegebenen Correctionen zu Formeln führen, welche mit den für richtig geltenden Gesetzen theilweise in *Widerspruch* stehen, und dass eben in Folge dieses Widerspruchs für mich die Nothwendigkeit erwuchs, einen gewissen Bestandtheil jener Suppositionen, nämlich die Vorstellung constanter Magnete, für unzulässig zu erklären, — ist im vorhergehenden Aufsatz dargelegt worden.

Obwohl also die von Helmholtz theils angedeuteten, theils vielleicht beabsichtigten Correctionen mehr oder weniger unbekannt sind, so geht dennoch aus den darüber von Helmholtz selber gemachten Angaben deutlich hervor, dass dieselben wesentlich verschieden sind von den von mir (1871) für nothwendig befundenen Correctionen.

Das *Ergebniss* der von Helmholtz selber gegen seine Schrift von 1847 theils geübten, theils vielleicht beabsichtigten Kritik besteht, wie aus seinen eigenen Angaben (1847, S. 65 sq.), (1854, S. 259), (1870, S. 69), (1872, S. 62) hervorgeht, in der Behauptung, dass die genannten Suppositionen (das Princip der lebendigen Kraft und die Annahme constanter Magnete) mit den gewöhnlichen und für richtig geltenden Gesetzen in *Einklang* gebracht werden können. Das *Ergebniss* der von mir selber (1871) geübten „Kritik“ hingegen besteht in der Behauptung, dass die Herstellung eines solchen Einklanges unmöglich und folglich die eine jener beiden Suppositionen unhaltbar sei.

Hieraus folgt, dass die von mir gegen die Helmholtz'sche Schrift von 1847 geübte „Kritik“ in hohem Grade verschieden ist von der von Helmholtz selber ausgeübten, und dass also die diesen Unterschied in Abrede stellende Bemerkung von Helmholtz auf Irrthum beruht.