Note über die Normalcurven für $p = 5, 6, 7$.

Von

MAX NOETHER in Erlangen.

Unter den Normalcurven einer algebraischen Classe vom Geschlecht p bieten sich am Natürlichsten diejenigen dar, welche durch alle zwischen den p Functionen φ bestehenden Relationen definirt sind; eine Darstellung, welche für alle Classen ausser den hyperelliptischen möglich ist. *) Wenn dann die darunter existirenden

$$\frac{1}{2} (p - 2) (p - 3)$$

linear-unabhängigen quadratischen Relationen $p - 2$ überhaupt von einander unabhängige Relationen liefern, was für $p \geq 5$ und nicht specielle Werthe der Moduln stattfindet, so definiren schon diese Relationen die Curve; und durch lineare Transformationen muss es dann weiter möglich sein, dieselben in einer Form herzustellen, in der sie die $3p - 3$ Moduln explicit aufweisen. Solche kanonische Formen will ich hier für die Hauptfälle von $p = 5, 6, 7$ mittheilen.

1.

$$p = 5.$$

Bekanntlich hat man für $p = 5$ drei quadratische homogene Gleichungen zwischen den 5 Grössen $\varphi_1, \dots, \varphi_5$ mit ganz willkürlichen Coefficienten. Von 3 linearen Combinationen derselben, mit je 12 Parametern, kann man 2, vermöge der 24 Parameter der linearen Substitution für die φ , zu Relationen mit gegebenen numerischen Coefficienten machen; die dritte Relation bleibt dann willkürlich und enthält in ihren 12 Coefficienten die Moduln der Classe.

Geht man etwa von der ebenen Normalcurve, der Curve 6^{ter} Ordnung mit 5 Doppelpunkten, aus, so mag man diese zunächst mittels Curven 3^{ter} Ordnung, die durch die 5 Doppelpunkte und zwei will-

*) Vgl. meinen Aufsatz „Ueber die invariante Darstellung der algebraischen Functionen“, Math. Ann. Bd. XVII.

kürliche einfache Punkte der Curve gelegt werden, transformiren, und zwar vermöge der so eingeführten zwei willkürlichen Parameter in eine Curve 6^{ter} Ordnung mit solchen 5 Doppelpunkten a, b, c, b', c' , von denen b' dem Punkte b , c' dem Punkte c unendlich benachbart liegen. Nimmt man dann vermöge linearer Transformation der Ebene für die Punkte a, b, c feste Punkte und für die Geraden bb', cc' feste Richtungen, so enthält die Gleichung der Curve gerade noch 12 Parameter.

Für diese Punkte a, b, c habe man bez. die Coordinaten:

$$x_2 = x_3 = 0; \quad x_3 = x_1 = 0; \quad x_1 = x_2 = 0;$$

für die Richtungen bb', cc' bezüglich:

$$x_1 - x_3 = 0; \quad x_1 - x_2 = 0.$$

Für die Curven φ kann man dann nehmen:

$$\varphi_1 = x_1(x_2x_3 - x_1x_2 - x_1x_3),$$

$$\varphi_2 = x_2(x_2x_3 - x_1x_2 - x_1x_3),$$

$$\varphi_3 = x_3(x_2x_3 - x_1x_2 - x_1x_3),$$

$$\varphi_4 = x_1^2x_2,$$

$$\varphi_5 = x_1^2x_3,$$

und die drei quadratischen Relationen werden:

$$\begin{cases} \varphi_3\varphi_4 = \varphi_2\varphi_5 = \varphi_1(\varphi_4 + \varphi_5), \\ \sum a_{ix} \varphi_i \varphi_x = 0, \end{cases}$$

wo die dritte, nachdem vermöge der beiden ersten zwei Producte der φ weggehoben sind, noch die 12 Moduln linear aufweist.

Man hätte auch, von den 3 allgemeinen quadratischen Relationen zwischen den φ ausgehend, nachdem man 2 lineare Combinationen mit verschwindenden Determinanten gebildet, durch einfache geometrische Betrachtungen auf die hier angeschriebene kanonische Form kommen können.

2.

$$p = 6.$$

Man hat hier zwischen den 6 Functionen φ 6 linear-unabhängige quadratische Relationen, von denen 4 überhaupt von einander unabhängige die Normalcurve bestimmen. Diese vier Relationen haben diesmal nicht mehr willkürliche Coefficienten. Ich werde zeigen, dass man sie in eine solche Form bringen kann, dass drei der Relationen nur gegebene Zahlencoefficienten erhalten, während die vierte alle Coefficienten völlig willkürlich hat. Reducirt man diese Relation dann durch die 5 übrigen, so enthält dieselbe linear noch $20 - 5 = 15$ Parameter als Moduln.

Hierzu genügt wieder die Betrachtung der *ebenen* Normalcurve für $p = 6^*)$: der Curve 6^{ter} Ordnung mit vier Doppelpunkten a, b, c, d , eine Curve, die vermöge ebener linearer Transformation gerade 15 Parameter aufweist. Vermöge einer solchen mögen a, b, c, d bez. die Coordinaten erhalten:

$$x_2 = x_3 = 0; \quad x_3 = x_1 = 0; \quad x_1 = x_2 = 0; \quad x_1 = x_2 = x_3.$$

Für die 6 linear-unabhängigen Ausdrücke φ nehme man etwa:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= x_1 \cdot x_2(x_1 - x_3), & \varphi_4 &= x_1 \cdot x_3(x_1 - x_2), \\ \varphi_2 &= x_2 \cdot x_2(x_1 - x_3), & \varphi_5 &= x_2 \cdot x_3(x_1 - x_2), \\ \varphi_3 &= x_3 \cdot x_2(x_1 - x_3), & \varphi_6 &= x_3 \cdot x_3(x_1 - x_2), \end{aligned}$$

woraus die 5 linear-unabhängigen quadratischen Relationen folgen:

$$\begin{aligned} \varphi_2 \varphi_6 - \varphi_3 \varphi_5 &= 0, & \varphi_3 \varphi_4 - \varphi_1 \varphi_6 &= 0, & \varphi_1 \varphi_5 - \varphi_2 \varphi_4 &= 0, \\ \varphi_5(\varphi_1 - \varphi_3) - \varphi_3(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0, \\ \varphi_5(\varphi_4 - \varphi_6) - \varphi_3(\varphi_4 - \varphi_5) &= 0. \end{aligned}$$

Als unabhängige derselben kann man etwa wählen:

$$\begin{aligned} \varphi_1 \varphi_5 - \varphi_2 \varphi_4 &= 0, & \varphi_1 \varphi_6 - \varphi_3 \varphi_4 &= 0, \\ \varphi_5(\varphi_1 - \varphi_3) - \varphi_3(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0, \end{aligned}$$

wozu dann eine Relation

$$\sum a_{ix} \varphi_i \varphi_x = 0,$$

mit beliebigen Parametern a_{ix} tritt.

3.

$$p = 7.$$

Hier existiren zwischen den 7 linear-unabhängigen Functionen φ 10 linear-unabhängige quadratische Relationen, von denen 5 überhaupt von einander unabhängige zur Definition der Normalcurve aufzustellen sind. Zu diesem Zwecke gehe ich auch hier von der *ebenen* Normalcurve 7^{ter} Ordnung mit 8 Doppelpunkten, f_7 aus. Die Transformation auf diese Form enthält**) noch *einen* willkürlichen Parameter, den wir uns so bestimmt denken, dass zwei der 8 Doppelpunkte der f_7 unendlich benachbart liegen — Bestimmungsarten, die, wie die Entstehungsart der ebenen Normalcurven als specielle Projectionen von Raumcurven schon für $p = 5$ und 6 lehrt, für $p > 4$ immer möglich sind. Vermöge linearer Transformation enthält die Curve f_7 dann $35 - 8 - 1 - 8 = 18$ Parameter, die Moduln der Classe.

*) Vgl. Brill und Noether, Ueber die algebraischen Functionen etc., diese Annalen Bd. VII, pag. 298.

**) Vgl. das Citat in der vorhergehenden Anmerkung.

Die Doppelpunkte von f_7 seien $a, b, c, d; e, f, g, h$, und sei d dem Punkte a benachbart. Vermöge linearer Transformation mögen a, b, c bez. die Coordinaten erhalten:

$$x_2 = x_3 = 0; \quad x_3 = x_1 = 0; \quad x_1 = x_2 = 0,$$

und die Richtung ad sei durch $x_2 - x_3 = 0$ gegeben. Der achte Parameter der Transformation erlaubt dann noch, ϱx_1 für x_1 , bei beliebigem ϱ , zu setzen.

Die vier übrigen Punkte e, f, g, h , deren Lage willkürlich bleibt, werden sich dann durch zwei Kegelschnitte

$$K = 0, \quad K' = 0$$

bestimmen, von denen man K noch durch c , K' durch b legen kann:

$$K = x_1 A + x_2 B; \quad K' = x_1 A' + x_3 B',$$

wo

$$\begin{aligned} A &= x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, & B &= b_2 x_2 + b_3 x_3, \\ A' &= x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3, & B' &= b_2' x_2 + b_3' x_3. \end{aligned}$$

Durch die acht Punkte $a, \dots, h$ geht ein Büschel von Curven 3^{ter} Ordnung:

$$C - \lambda C' = 0,$$

wo man unter C und C' die Ausdrücke verstehen kann:

$$\begin{aligned} C &= x_3 K - x_2 K', \\ C' &= (x_1 + a_0' x_3) K - (x_1 + a_0 x_2) K', \end{aligned}$$

für

$$a_0 = a_2 + a_3, \quad a_0' = a_2' + a_3'.$$

Für die 7 linear-unabhängigen Functionen φ kann man dann die folgenden Ausdrücke nehmen:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= C x_1, & \varphi_2 &= C x_2, & \varphi_3 &= C x_3, \\ \varphi_4 &= C' x_1, & \varphi_5 &= C' x_2, & \varphi_6 &= C' x_3, \\ \varphi_7 &= K x_1 (x_2 - x_3). \end{aligned}$$

Um die Beziehungen zwischen diesen Ausdrücken zu erhalten, stelle ich zunächst noch ein zweites System von 7 linear-unabhängigen Functionen ψ auf:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= (K - K') x_1 x_2, & \psi_2 &= K' x_2 x_3, & \psi_3 &= K x_2 x_3, \\ \psi_4 &= K' x_2 (x_2 - x_3), & \psi_5 &= K' x_1 (x_2 - x_3), \\ \psi_6 &= K x_3 (x_2 - x_3), & \psi_7 &= K x_1 (x_2 - x_3). \end{aligned}$$

Die linearen Beziehungen zwischen den ψ_i und den φ_i werden:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \psi_1 - \psi_7, \\ \varphi_2 &= \psi_3 - \psi_2 - \psi_4, \\ \varphi_3 &= \psi_3 - \psi_2 - \psi_6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_4 &= -a_3\psi_5 + b_2(\psi_2 + \psi_4) + b_3\psi_2 - a_2'\psi_7 - b_2'\psi_3 - b_3'(\psi_3 - \psi_6), \\ \varphi_5 &= \psi_1 + a_0'\psi_3 - a_0(\psi_2 + \psi_4), \\ \varphi_6 &= \psi_1 + \psi_5 - \psi_7 - a_0\psi_2 + a_0'(\psi_3 - \psi_6), \\ \varphi_7 &= \psi_7.\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich unmittelbar die folgenden quadratischen Relationen:

$$(1) \quad \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 = \varphi_4 : \varphi_5 : \varphi_6,$$

$$(2) \quad \begin{cases} \psi_3\psi_5 - \psi_2\psi_7 = 0, \\ \psi_3\psi_4 - \psi_6(\psi_2 + \psi_4) = 0, \\ \psi_3(\psi_7 - \psi_5) - \psi_1\psi_6 = 0 \end{cases}$$

und aus diesen die weitere:

$$(2') \quad \psi_1\psi_4 - (\psi_2 + \psi_4)(\psi_7 - \psi_5) = 0.$$

Von den Relationen (1) ist die eine:

$$\varphi_2\varphi_6 - \varphi_3\varphi_5 = 0,$$

eine lineare Folge von (2) und (2'), und aus der weiteren Verbindung von (1) mit (2), (2') ergibt sich noch:

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_4\psi_4 - \varphi_5\psi_5 = 0, \\ \varphi_4(\psi_3 - \psi_2) - \varphi_5(\psi_1 + \psi_5 - \psi_7) = 0, \\ \varphi_4\psi_6 - \varphi_6\psi_7 = 0. \end{cases}$$

In (2), (2'), (3) hat man 7 linear-unabhängige quadratische Relationen, von denen (2) und die erste aus (3) vier überhaupt von einander unabhängige Relationen zwischen den 7 Grössen ψ_i abgeben.

Die letzten 3 Relationen ergeben sich mit Hülfe der Gleichung der ebenen Curve f_7 . Die allgemeinste Curve 7ter Ordnung, welche die Punkte $\alpha, \dots, h$ zu Doppelpunkten hat, enthält noch 11 Constanten, und ihre Gleichung wird:

$$f_7 = KK'x_1(x_2 - x_3)^2 + \psi_7(\alpha C + \beta C') + C^2 \sum \alpha_i x_i + CC' \sum \beta_i x_i + C'^2 \sum \gamma_i x_i = 0,$$

mit den 11 Constanten $\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Die gesuchten Relationen folgen durch Bildung von $x_1 \cdot f_7, x_2 \cdot f_7, x_3 \cdot f_7$:

$$(4) \quad \begin{cases} \psi_7\psi_5 + \psi_7(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_4) + \varphi_1 \sum_1^3 (\alpha_i\varphi_i + \beta_i\varphi_{i+3}) + \varphi_4 \sum_1^3 \gamma_i\varphi_{i+3} = 0, \\ \psi_7\psi_4 + \psi_7(\alpha\varphi_2 + \beta\varphi_5) + \varphi_2 \sum_1^3 (\alpha_i\varphi_i + \beta_i\varphi_{i+3}) + \varphi_5 \sum_1^3 \gamma_i\varphi_{i+3} = 0, \\ \psi_5\psi_6 + \psi_7(\alpha\varphi_3 + \beta\varphi_6) + \varphi_3 \sum_1^3 (\alpha_i\varphi_i + \beta_i\varphi_{i+3}) + \varphi_6 \sum_1^3 \gamma_i\varphi_{i+3} = 0. \end{cases}$$

Die erste dieser Relationen (4) liefert mit den 4 oben genannten die 5 zur Definition der Normalcurve dienlichen Relationen. —

Die Relationen (4) drücken sich in den Grössen $\varphi_1, \dots, \varphi_7$ einfacher aus, als in den Grössen $\psi_1, \dots, \psi_7$. Ich entwickle desshalb noch die einfachste Form, in die sich alle 5 Relationen, in den Grössen $\varphi_1, \dots, \varphi_7$ ausgedrückt, bringen lassen.

Aus den Ausdrücken der φ_i durch die ψ_i folgt zunächst:

$$A\psi_5 = \sum_1^7 u_x \varphi_x,$$

wo

$$u_4 = a_0 - a_0', \quad u_5 = b_2 - b_2', \quad u_6 = b_3 - b_3',$$

$$u_1 = -u_5 - u_6,$$

$$u_2 = a_0 b_2' - a_0' b_2, \quad u_3 = a_0 b_3' - a_0' b_3,$$

$$u_7 = a_2' u_4 - u_5,$$

$$A = u_6 - a_3 u_4$$

und hieraus

$$u_4 A \psi_6 = - \sum_1^7 u_x \varphi_x + A a_0 (\varphi_2 - \varphi_3) - A (\varphi_5 - \varphi_6) + A \varphi_7,$$

$$A(\psi_1 + \psi_5 - \psi_7) = \sum u_x \varphi_x + A \varphi_1.$$

Durch Multiplication der ersten dieser beiden Beziehungen mit φ_1 , der zweiten mit φ_2 ergeben sich aber, wenn man beachtet, dass

$$\psi_6 \varphi_1 = \varphi_3 \varphi_7,$$

$$(\psi_1 + \psi_5 - \psi_7) \varphi_2 = \varphi_3 (\varphi_1 + \varphi_7),$$

die Relationen

$$(5) \quad \begin{cases} u_4 A \varphi_3 \varphi_7 = \varphi_1 \left\{ - \sum u_x \varphi_x + A a_0 (\varphi_2 - \varphi_3) - A (\varphi_5 - \varphi_6) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. + A \varphi_7 \right\}, \\ A \varphi_3 (\varphi_1 + \varphi_7) = \varphi_2 \left\{ \sum u_x \varphi_x + A \varphi_1 \right\}. \end{cases}$$

Weiter schreibt sich die erste Relation von (4) hier:

$$(6) \quad \frac{1}{A} \varphi_7 \sum_1^7 u_x \varphi_x + \varphi_7 (\alpha \varphi_1 + \beta \varphi_4) + \varphi_1 \sum (\alpha_i \varphi_i + \beta_i \varphi_{i+3}) \\ + \varphi_4 \sum \gamma_i \varphi_{i+3} = 0.$$

Nimmt man noch die beiden Relationen

$$(7) \quad \varphi_1 \varphi_5 - \varphi_2 \varphi_4 = 0, \quad -\varphi_1 \varphi_6 = \varphi_3 \varphi_4 = 0$$

so hat man in (5), (6), (7) hier die 5 von einander unabhängigen Relationen. Aus (7) folgt eine dritte, und mit Hülfe von diesen aus den beiden Relationen (5) je eine, aus (6) zwei weitere von jenen linear-unabhängige Relationen. —

Die Beziehungen (5), (6), (7) enthalten noch 19 Parameter; indess kann man einen derselben, wie schon oben gesagt, durch eine einfache Transformation wegschaffen. Setzt man:

$$\varphi_7 = \chi_7, \quad \varphi_1 = \chi_1, \quad u_4 \varphi_2 = \chi_2, \quad u_4 \varphi_3 = \chi_3,$$

$$\frac{1}{u_4}(\varphi_4 - a_0 \varphi_1) = \chi_4, \quad \varphi_5 - a_0 \varphi_2 = \chi_5, \quad \varphi_6 - a_0 \varphi_3 = \chi_5,$$

und

$$\frac{1}{A} \sum_1^7 u_x \varphi_x = \sum_1^7 v_x \chi_x,$$

wo dann auch die v_x wegen des willkürlichen a_0 von einander unabhängig werden, so werden die 5 quadratischen Relationen:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi_1 \chi_5 - \chi_2 \chi_4 = 0, \\ \chi_1 \chi_6 - \chi_3 \chi_4 = 0, \\ \chi_1 \left(\sum_1^7 v_x \chi_x + \chi_5 - \chi_6 - \chi_7 \right) + \chi_3 \chi_7 = 0, \\ \chi_2 \left(\sum v_x \chi_x + \chi_1 \right) - \chi_3 (\chi_1 + \chi_7) = 0, \\ \chi_7 \left(\sum v_x \chi_x + \alpha' \chi_1 + \beta' \chi_4 \right) + \chi_1 \sum_1^6 \alpha'_i \chi_i \\ \quad + \chi_4 \sum_1^3 \beta'_i \chi_{i+3} = 0, \end{array} \right.$$

mit den 18 Parametern $v_1, \dots, v_7, \alpha', \beta', \alpha'_1, \dots, \alpha'_6, \beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$ als Moduln.

Auf ganz analogem Wege lassen sich auch die quadratischen Relationen für $p = 8$ ableiten, indem man von der ebenen Normalcurve der 8^{ten} Ordnung, mit zwei dreifachen und 7 zweifachen Punkten, ausgeht. Und ferner viele specielle Fälle, in welchen die Relationen besondere Formen annehmen.*) Ohne auf diese Rechnungen jetzt weiter einzugehen, füge ich noch eine allgemeine Bemerkung bei. Für $p = 5$ und $p = 6$ waren die Relationen derart, dass *alle* bis auf die

*) Einige solche finden sich in einer Note des jüngst früh verstorbenen L. Kraus, diese Annalen, Bd. XVI, p. 245.

letzte *numerische* waren, während die letzte vollständig willkürliche Coefficienten hatte, die, nach Reduction durch die übrigen Relationen, die Moduln vorstellten. Eine analoge Darstellung würde auch bei beliebigem höherem p auf $3p - 3$ Moduln führen; denn eine allgemeine quadratische Relation zwischen p Grössen enthält $\frac{1}{2}p(p+1) - 1$ Coefficienten, von welchen, nach linearer Reduction der Relation durch die übrigen $\frac{1}{2}(p-2)(p-3) - 1$ von ihr linear-unabhängigen numerischen quadratischen Relationen, noch $3p - 3$ Parameter übrig blieben. Es entsteht die Frage, ob eine solche Darstellung der Relationen auch für $p > 6$ — welche also für $p = 7$ durch lineare Transformation der obigen Relationen (8) folgen müsste — möglich ist?

Erlangen, Januar 1885.