Papierstreifenkonstruktion einer durch konjugierte Durchmesser gegebenen Ellipse.

Von Karl Mack in Prag.

Bewegt sich eine Gerade G so, daß zwei ihrer Punkte a, b auf zwei Geraden A und B eines ruhenden Systems Σ derart gleiten, daß a stets auf A , b stets auf B liegt, und denkt man sich mit der Strecke $\overline{ab}$ ein ebenes System σ starr verbunden, dessen Träger mit der Ebene des ruhenden Systems Σ zusammenfällt, so beschreibt jeder Punkt x von σ in Σ eine Ellipse, deren Mittelpunkt

Fig. 1.

der Schnittpunkt o von AB ist und die nur in einem besonderen Falle in eine doppelt überdeckte Strecke übergeht. Diese Tatsache läßt sich zur Ableitung einer Papierstreifenkonstruktion einer durch konjugierte Durchmesser gegebenen Ellipse verwenden.

Wir wollen annehmen, daß x auf G liege, und zunächst den zu ox konjugierten Durchmesser L konstruieren (Fig. 1). Da dieser auf der Kurvennormalen N von x senkrecht steht, braucht man nur das Momentanzentrum m , dessen Verbindungslinie mit x die Normale N ergibt, zu suchen und von o das Lot auf N zu fallen. Das Momentanzentrum m ergibt sich aber als Schnittpunkt der Bahnnormalen der Punkte a und b , von denen die eine auf A , die andere auf B senkrecht steht. Kommt bei der Bewegung von G b mit o zur Deckung, so deckt sich x mit dem Endpunkt y des Durchmessers A und es ist $\overline{bx} = \overline{oy}$.

Bei der Bewegung von G ereignet es sich je zweimal, daß G auf einer der Geraden A oder B senkrecht steht. Sei G etwa senkrecht A , dann fällt m mit b , L mit A und N mit G zusammen (Fig. 2). A ist also der zu ox konjugierte Durchmesser und seine Länge $oy = bx$. Sind nun umgekehrt ox und oy als konjugierte Halbmesser einer Ellipse gegeben, so ergibt sich folgende Konstruktion:

Man fällt von x ein Lot G auf $A \equiv (oy)$ (Fig. 2), trägt auf G von x aus in der Richtung zum Lotfußpunkt a die Länge oy auf, wodurch man den Punkt b erhält, und verbindet dann o und b durch die Gerade B .

Fig. 2.

Hierauf markiert man die Punkte abx am Rande eines geradlinig beschnittenen Papierstreifens. Bewegt man diesen so, daß a auf A , b auf B gleitet, so beschreibt x eine Ellipse, von der ox und oy konjugierte Halbmesser sind¹⁾.

Da man von jedem der vier Endpunkte der konjugierten Durchmesser die Konstruktion beginnen könnte, ergeben sich vier derartige Konstruktionen, von denen aber zweimal zwei zusammenfallen.

Mein Kollege K. Carda macht mich aufmerksam, daß obige Konstruktion im wesentlichen allerdings ohne Benutzung eines Papierstreifens und ohne Benutzung kinematischer Begriffe sich bereits bei De La Hire, *Sectiones conicae*, Paris 1685, p. 198—199, findet.

¹⁾ Diese Betrachtungsweise führt also zur selben Konstruktion, die Tessari auf analytischem Wege bewiesen hat. (*La teoria delle ombre e del chiaro scuro*, Torino 1880, p. 56 ff.)